



Matematiikan opetus mielekkään oppimisen edistämiseksi: integratiivista mallia kohti

Rauno Koskinen¹ ja Harri Pitkäniemi²

¹ Kasvatustieteellinen tiedekunta, Helsingin yliopisto

² Filosofinen tiedekunta, Itä-Suomen yliopisto



Synteetitutkimuksemme tarkoituksena on rakentaa laaja-alainen koonti niistä yhteyksistä, jotka kohdentuvat matematiikan kouluopetuksen ja mielekkään oppimisen kontekstiin. Tutkimusmetodologisesti synteesi koostuu kvalitatiivisista, kvantitatiivisista ja mixed methods -lähestymistapaan perustuvista alkuperäistutkimuksista ja muutamista meta-analyyseistä. Lopullinen Ebsco-haku tuotti 50 analyysiin soveltuvaa julkaisua vuosilta 2007–2017. Aineiston analyysin alkuperäisenä kehikkona toimi aikaisemmin laadittu käsitteellinen malli (Koskinen, 2016). Aineistostamme ei löytynyt yhtään tutkimusta, jossa olisi tutkittu edellä mainittua kokonaisuutta. Tutkimustulosten mukaan matemaattiseen ymmärtämiseen tähtäävät opetuksen lähestymistavat – kontekstuaaliset, konkreettiset ja sosiaaliset – edistävät mielekästä oppimista. Niiden onnistunut soveltaminen edellyttää kuitenkin opettajan taitoa valita sopivat välineet ja käyttää niitä sekä oppilaan toiminnan vuorovaikutteista ohjaamista. Näiden lähestymistapojen yhdistäminen opetuksessa parantaa entisestään niiden vaikuttavuutta.

Matematiikka, opetus, oppiminen, synteetitutkimus, holistinen lähestymistapa

Lähetetty: 24.5.2019

Hyväksytty: 3.4.2020

Vastuukirjoittaja: rauno.koskinen@helsinki.fi

DOI: 10.23988/ad.82548

Johdanto

Matematiikan opetukselle suuntaa antanut National Council of Teachers of Mathematics (esim. 1989, 2000, 2014) on jo vuosikymmenten ajan asettanut mielekkään oppimisen matematiikan opetuksen keskeiseksi tavoitteeksi ja korostanut ymmärtämisen merkitystä oppimisessa. Edelleen se on painottanut reaalimaailman kontekstien, ongelmanratkaisun, konkreettisten ja toiminnallisten apuvälineiden sekä kommunikoinnin ja yhteistoinnallisten työmuotojen lisäämistä matematiikan opetukseen. Tämä on heijastunut selvästi matematiikan opetusta koskeviin empiirisiin tutkimuksiin ja kehittämishankkeisiin. Käytännön tasolla ei mielekkään oppimisen tavoitteeseen ole kuitenkaan tyydyttävällä tavalla päästy. Esimerkiksi Opetushallituksen tutkimus Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2013 osoitti, että kouluvuosien myötä yläluokille ja lukioon tullessa muuttuvat oppilaiden asenteet kielteisemmiksi, motivaatio laskee ja tulokset heikkenevät (Metsämuuronen, 2013). Vastaava ilmiö on havaittu muuallakin kuin Suomessa (esim. Vettenranta ym., 2016; Lee, 2009; Middleton & Spanias, 1999). Matematiikkaa ei koeta iän karttuessa henkilökohtaisesti mielekkäänä ja näin herääkin kysymys, mistä matematiikan mielekkäässä oppimisessa on kysymys ja miten siihen tulisi opetuksellisesti pyrkiä.

Toisaalta tarkastelumme lähtökohtana on matematiikan opettamiseen ja kouluoppimiseen liittyvän tutkimuksen nykytilanne, joka ilmenee hajanaisuutena. On toisin sanoen useita sellaisia yksittäisiä tutkimuksia, joista kukin käsittelee omaa tutkimustehtäväänsä analyttisesti. Vaikka yksittäiset empiiriset tutkimukset ovat tärkeitä sinänsä, aika ajoin tarvitaan tutkimusten yhteenvedoja, mutta lisäksi ja etenkin sellaisia synteesejä, jotka perustuvat tutkimusten varaan, mutta jotka samalla rakentavat yhdessä *suurempaa kokonaisuutta*. Tuo suurempi kokonaisuus on myös ilmiön hallinnan ja validiteetin kannalta tärkeä näkökulma. Usein tutkimussynteeseissäkin on varsin spesifi konteksti. Sen sijaan tavanomaiseen koulukontekstiin sijoituvaa (vrt. kuitenkin Bolyard & Moyer-Packenham, 2008) tai sellaista synteesiä, joka rakentuisi yhdistellen eri konteksteja, on matematiikkakasvatuksen osalta tehty vähän jos ollenkaan. Yhteenvetotutkimuksia on laadittu sellaisista opetus-oppimiskonteksteista, joissa painottuvat esimerkiksi oppimisvaikeudet (Allsopp & Haley, 2015; Dennis ym., 2016), emotionaaliset tai käyttäytymiseen liittyvät ongelmat (Ralston, Benner, Tsai, Riccomini, & Nelson, 2014) tai opettajan pedagogisen sisältötiedon näkökulma (Şimşek & Boz, 2016).

Mielekkään oppimisen viitekehys tutkimuksen kontekstina

Tutkimuksemme tavoitteena on mielekkään oppimisen ja matematiikan opetuksen kokonaismallin rakentaminen. Tutkimuksen alustavana teoreettisena viitekehikkona käytämme Koskisen (2016) esittämää *mielekkään oppimisen ja matematiikan opetuksen kokonaismallia*, joka soveltui tarkoitukseemme sen laaja-alaisuuden ja generaalien kontekstin takia.

Tutkimus tarkasteli mielekästä oppimista historiallisesti ja käsitteellisesti kognitiivisen, sosiokulttuurisen ja humanistisen oppimispsykologian näkökulmasta ja kokosi aihetta koskevaa tutkimusta yhteen viitekehykseen. Mallissa tieto on systematisoitu seuraavien pääkategorioiden alle: matematiikan opetusta ohjaavat periaatteet, opetuksen suunnittelu ja tavoitteet, opetuksen lähestymistavat, oppimisympäristö sekä opetus-oppimisprosessi ja sen ohjaaminen.

Kehitämme ja tarkennamme kyseistä mallia tässä tutkimuksessa hyödyntämällä uusimpia empiirisiä tutkimuksia, jotka on julkaistu kansainvälisissä artikkeleissa vuosina 2007–2017. Tässä esillä olevassa tutkimuksessa on lisäksi huomioitu tarkemmin oppimistuotokset. Ydinajatuksena oli, että tarkastellaan sitä, millaisia eri opetusratkaisuja on esiintynyt aiemmissa tutkimuksissa ja millaisia oppimistuotoksia ne ovat saaneet aikaan. Nyt Koskisen (2016) kokonaismallia mukaillen tarkentava informaatio koottiin pääkategorioittain:

- opetuksen intentiot ja opetuksen suunnittelu
- opetuksen lähestymistavat
- oppimisympäristö
- opetus-oppimisprosessi ja sen ohjaaminen
- oppimistuotokset.

Mielekäs oppiminen on ilmiönä ja käsitteenä moniulotteinen. Käsitteen käytön haastavuutta lisää se, että siihen on kirjallisuudessa viitattu hyvin erilaisin termein (meaningful learning, learning with understanding, relational understanding jne.). Kuitenkin näissä eri tulkinnoissa ymmärtäminen näyttäytyy keskeisenä tekijänä mielekkään oppimisen käsitteen ytimessä. Tämä näkyy erityisesti *Learning With Understanding*-traditiossa (esim. Kieran, 1994; Hiebert & Carpenter, 1992; Hiebert & Wearne, 1992). Esimerkiksi Hiebert ja Wearne (1992, 99) määrittelevät ymmärtävän oppimisen merkitysyhteyksien rakentamisena matemaattisten ideoiden eri representaatioiden välille. *Oppiminen* käsitteenä viittaa uuden asian omaksumiseen (akkomodaatioon, muutokseen oppijan tietorakenteessa) ja *ymmärtäminen* aiheeseen liittyvien merkitysyhteyksien oivaltamiseen osana oppimisprosessia. Ymmärtämisellä käsitteenä voidaan tarkoittaa merkityksiä muodostavaa tulkintaprosessia tai sen tuotoksia (esim. Kieran, 1994; Hiebert & Carpenter, 1992). Oleellista tässä on, että opittavana oleva uusi asia liitetään oppilaalle entuudestaan tuttuihin ja merkityksellisiin kokemuksiin sekä hänen omaan käsitteelliseen viitekehykseen.

Ymmärtävä oppiminen käsitteenä ja ilmiönä voidaan tulkita kohdistuvan oppimisen kognitiivisiin tekijöihin, kun taas *mielekäs oppiminen* voidaan tulkita laajemmin. Matematiikan kieli näyttää oppilaalle hyvin abstraktina ja sen teoria rakentuu pitkien käsitteellisten seuraantoketjujen varaan. Siksi ymmärtämisen painottaminen on keskeistä matematiikan opetuksessa ja sen syvässä oppimisessa. Tämä edellyttää oppilaalta sitoutumista pitkäjänteiseen semanttiseen työskentelyyn (merkitysten muodostamiseen), mikä puolestaan kytkee oppilaan motivaation mielekkään oppimisen käsitteeseen. Näin ollen mielekäs oppiminen käsitteenä

määritellään tässä yhteydessä sen kognitiivisen (ymmärtäminen ja maattainen ajattelu), konatiivisen (semanttista työskentelyä ylläpitävä oppilaan motivaatio ja sitoutuminen opetus-oppimisprosessiin) ja affektiivisen (motivaatiota ylläpitävät positiiviset asenteet ja tunteet) ulottuvuuden kokonaisuutena (Koskinen, 2016). Näihin seikkoihin kiinnitettiin huomiota myös aineiston valinnassa ja analyysissa.

Synteesimetodologian kehittäjä: analyttisistä kohti laaja-alaista ja metodologisesti inklusiivista vaihtoehtoa

Tutkimussynteesejä on tehty tätä aikaisemmin jo monella eri tavalla (esim. Wolgemuth, Hicks, & Agosto, 2017). Jotkut synteetit laajentavat ilmiön kuvausta sen verran, että ne eivät sisällä tiukasti ottaen vain samalle alueelle kohdentuvia tutkimuksia. Tällaisia ovat lähinnä narratiivinen katsaus (narrative review), metanarratiivi (metanarrative) ja kriittis-tulkinnallinen synteesi (critical interpretive synthesis). Toisaalta näissäkään ei pyritä laajaan, ilmiön kokovaltaiseen haltuunottoon. Useissa synteeseissä rajataan tutkimukset joko laadulliseen tai määrälliseen tutkimustraditioon, toki on myös poikkeuksia. Herää kysymys, miksi pitää rajoittaa vain esimerkiksi laadullisiin tutkimuslöydöksiin – varsinkin, jos ne käsittelevät vain tietyn ”saman” alueen tuloksia. Tilanne on vastaava perinteisessä meta-analyysissä, jossa tutkimuksen lähtökohtana ovat verrattain samasta alueesta (samat käsitteet) tehdyt kvantitatiiviset tutkimukset (Finlayson & Dixon, 2008; Glass, McGaw, & Smith, 1981). Toki laadulliset tutkimukset ovat kaiken kaikkiaan melko heterogeeninen joukko, koska ilmiön haltuunotto on niissä sisällöllisesti ja metodologisesti laaja-alaista ja kontekstisitoutunutta.

Jotkut tutkijat ovat alkaneet kehittää myös sellaisia yhteenvedotutkimuksia, joissa lähteenä ovat aikaisemmat synteetit joltakin tutkimusalueelta (esim. Cooper & Koenka, 2012; Polanin, Maynard & Dell, 2017). Suri ja Clarke (2009) ovat jo aikaisemmin ja myös 2010-luvun julkaisuissaan tuoneet esille, että myös tutkimussynteeseissä tulisi käyttää ihmistieteellisiä metodologioita monipuolisesti (methodologically inclusive research synthesis, MIRS). Vastaavaan asiaan kiinnitettiin huomiota jo 2000-luvulla, kun Harden ja Thomas (2005) julkaisivat aiheeseen liittyvän artikkelin. He oivalsivat, että tutkimuskysymykset voivat synteetivaiheessa olla laajoja. Jos kerta yksittäisen tutkimusten tasolla joukko on metodologisesti moninainen, kompleksinen ja eri tutkimukset sisältävät erilaisuutta tavoitteissa, metodeissa ja näkökulmissa, niin eikö vastaavan tulisi odottaa heijastuvan myös kasvatustieteellisissä synteeseissä.

Tutkimusmetodologiamme kehittelyn lähtökohtana voidaan pitää 1) *tutkimusten hajanaisuutta ja yhdistämistarvetta*, 2) perinteisen *meta-analyysin kykenemättömyyttä rakentaa laaja-alaisia* käsitteellisiä synteesejä ja tämän ongelman ratkaisua ja 3) *teoreettis-käsitteellisen analyysin* (tässä Koskinen, 2016) *yhdistämistä metatutkimukseen hyödyntämällä empiiristä tutkimusta* systeemisen kokonaisuuden aikaansaamiseksi. Meillä tutkimusmetodologian lähtökohtana ei ole vain yksittäinen

tutkimuskysymys, vaan pikemminkin kokonaisvaltaisen mallin rakentaminen, joka pyrkii hahmottamaan ilmiössä olevia moninaisia interaktiivisia voimia ja suhteita. Toki mallin rakentaminen ei estä laajahkon tutkimuskysymyksen tai -kysymysten esittämistä. Voimme tutkimuksessamme asettaa yleisen mutta kuitenkin matematiikkakasvatukseen kohdentuvan tutkimustehtävän probleemamuotoisena seuraavaan tapaan: *Mitkä eri tekijät yhdessä ja toisiinsa kietoutuen edistävät tai vaikeuttavat oppilaan mielekästä oppimista matematiikassa?* Tutkimuksessamme aineistoa ei rajoiteta metodologisesti, vaan kvantitatiiviset, kvalitatiiviset, mixed methods -lähestymistapaan perustuvat ja aiheeseen liittyvät meta-analyysit ovat mukana. Toki meilläkin (kuten aina synteetitutkimuksissa) on tutkimuksille asetettu tutkimusilmiöön liittyviä kriteereitä, eli joitakin kontekstitekijöitä suljetaan pois, ja toisaalta tutkimuksen tulee täyttää tutkijoiden asettamat ilmiöön liittyvät kriteerit.

Tutkimussynteetin toteuttamisen prosessissa keskeinen vaihe on analysoitavien tutkimusartikkeleiden haku ja valinta. Esimerkiksi Thunder ja Berry (2016) kuvaavat yksityiskohtaisesti aineiston hankinnan prosessia, joka tyypillisesti esitetään tutkimussynteetin metodologiassa. Ensin määritetään kriteerit hakusanojen avulla, ja sitten prosessin edetessä todetaan, että kaikkia alustavassa aineistonkeruussa mukanaolevia tutkimuksia ei voida ottaa analyysiin mukaan. Omassa tutkimuksessamme hyödynsimme Ebsco-tietokannan tutkimusartikkeleita. Ebscon käyttöä perustelimme sillä, että se sisältää monipuolisten viitetietojen lisäksi useimmiten linkityksen myös suoraan artikkeliin. Käytimme Ebsco-hauissa seuraavia avainsanoja: 'math*', 'teach*' ja 'learning outcomes'. Pyrimme siihen, että haku kattaisi noin kymmenen vuoden aikajakson. Valitsimme aikaväliksi tutkimusjulkaisut, jotka ovat ilmestyneet ajalla 1.1.2007–31.12.2017. Tuo haku tuotti kaiken kaikkiaan 341 viitettä.

Tässä vaiheessa keskeisiksi valintakriteereiksi muodostuvat myös tutkimuksen viitteessä olevat kuvailusanat eli deskriptorit. Valitsimme analyysiin mukaan kaikki sellaiset tutkimukset, jotka fokusoituvat kouluopetuksen matematiikkaan. Kontekstit, jotka kohdentuvat varhaiskasvatukseen, erityisluokan opetukseen, ammatilliseen koulutukseen tai yliopistoihin ja muihin ylemmän ikätason oppilaitoksiin, jäivät näin ollen pois analyysistä. Vaikka oppilaan toiminnasta, ajattelusta ja tunteista emme ole laittaneet hakusanaa, olemme artikkeleiden lukemisen yhteydessä kiinnittäneet huomiota oppimistulosten lisäksi oppilaan kokemaan mielekkyyteen, ymmärtämiseen, motivaatioon ja ylipäättään affektiiviseen ulottuvuuteen. Oppimistuloksia on artikkeleissa tutkittu hyvin monipuolisesti, tai sitten niin, että niissä painottuu mielekäs tai ymmärtämiskeskeinen oppiminen. Olemme ottaneet analyysiin mukaan sellaiset tutkimukset, joiden fokusoituminen ulottuu joko ymmärtävään oppimiseen (tai vastaavaa synonyyminen käsite) tai sitten tutkimuksessa on arvioitu oppimista laaja-alaisesti, mutta mukana on myös mielekkään oppimisen indikaattoreita. Kun kaikki edellä mainitut kriteerit otettiin käyttöön, tutkimuksen aineistoon tuli lopulta valituksi 50 tutkimusta.

Analyysi oli luonteeltaan aineistolähtöistä, vaikkakin se tapahtui edellä mainitun kokonaismallikehikon ohjaamana. Tässä käytetty aineiston systemaattinen analyysi perustuu *immanenttiin analyysiin*, jossa tavoitteena on eritellä aineistona olevien tekstien sisältöä niiden omaan

käsitteistöön pitäytyen (Jussila, Montonen, & Nurmi, 1993). Analyysi on kvalitatiivista sisällönerittelyä, jossa tarkastellaan tekstikorpusta lukemalla. Tekstien merkitysten tulkinta tapahtuu *hermeneuttisen luennan* kautta sisältäen useamman luentakierroksen tekstin sisältämien merkitysten aukikerimiseksi (Varto, 1991). Aluksi artikkelit luokiteltiin pääkategorioittain niiden päätulosten mukaan. Luennan edetessä tekstien sanoma tarkentui ja informaatio jaettiin teemoittain, jolloin tutkijan tulkinta määräsi tekstin informaation painoarvon ja mihin kategoriaan tai teemaan se liitettiin. Erityinen huomio kiinnittyi eri opetusratkaisuihin (esim. opetuksen intentiot, lähestymistavat ja opetusvälineet, oppimisympäristön ilmasto ja vuorovaikutus opetus-oppimisprosessin ohjaamisessa) ja niiden yhteyksiin oppilaan oppimiseen (esim. matematiikan tiedot ja taidot, ymmärtäminen ja ajattelu, motivaatio ja tunteet).

Tulokset

Tutkimustuloksena esitetään seuraavassa tutkimussynteesi, joka on rakennut osin teoriaohjaavasti (Koskinen, 2016) ja osin täsmentynyt tämän tutkimuksen aineistolähtöisen analyysin kautta. Seuraavassa tuloksia on esitelty mallin päärakenteiden mukaan teemoittain seuraavasti: *opetuksen intentiot* (n = 8), *opetuksen lähestymistavat* (n = 23), *oppimisympäristö* (n = 5) ja *opetus-oppimisprosessi ja sen ohjaaminen* (n = 14).

Opetuksen intentiot, opettajan tieto ja opetuksen suunnittelu

Opetuksen suunnittelu ja luokan toiminnan suuntaaminen opetustapahtumassa pohjautuu merkittävältä osaltaan opettajan tietoon ja ajatteluun. Kun matematiikan opetuksen pyrkimyksenä on ymmärtäminen, nousee tutkimuksissa esiin opettajan matematiikkatiedon ja pedagogisen tiedon merkitys tehtävässä onnistumisen edellytyksenä (Amador, 2016; Azigve, Kyriakides, Panayiotou, & Creemers, 2016; Marshall ym., 2009; Modiba, 2011). Esimerkiksi Modiban (2011) tutkimus osoitti, että ymmärtävään oppimiseen pyrittäessä oleellista on, että oppilas käsittää myös ne perusteet, jotka ovat matemaattisten sääntöjen ja operaatioiden takana. Tämä on mahdollista vain, jos opettajan matematiikkatieto on riittävän laajaa ja syvällistä. Mielekkyyden ja ymmärtämisen kannalta oleellista on, että oppilas oivaltaa, miksi matematiikassa toimitaan tietyllä tavalla tietyssä tilanteessa.

Usein esille noussut opetusstrateginen kysymys opetuksen suunnitteluun liittyen on ollut, tulisiko ensin tähdätä matematiikan käsitteelliseen ymmärtämiseen ja sen jälkeen erikoistapauksiin, ongelmanratkaisuun ja soveltamiseen vai toisin päin. Useat tutkimukset puhuvat ongelmalähtöisen strategian puolesta (Csapó, 2007; Davis, 2014; Guo, Yang, & Ding, 2014; Kapur, 2014; Rittle-Johnson, Star, & Durkin, 2012; Schwonke, Renkl, Salden, & Alevén, 2011). Esimerkiksi Kapurin (2014) tutkimus, jossa motivoivana tekijänä hyödynnettiin oppilaiden omia virheitä, osoitti että käsitteelliseen ymmärtämiseen päästään paremmin ongelmalähtöisen ratkaisun kautta kuin suoran opetuksen kautta. Joissakin tapauksissa yleisestä erikoistapauksiin eteneminen on osoittautunut toimivammaksi (Olteanu & Holmqvist, 2012). Toisaalta on myös havaittu, että ongelmanratkaisu vähemmällä ohjauksella voi johtaa parempiin tuloksiin proseduraa-

lisen osaamisen ja yksinkertaisempien tehtävien kohdalla, mutta vaativampien aiheiden kohdalla käsitteelliseen ymmärtämiseen päästään vain opettajan ohjaamisen kautta (Schwonke, Renkl, Salden, & Aleven, 2011). Ongelmalähtöiset strategiat näyttäisivät vaikuttavan myönteisesti niin matemaattisen teorian käsitteelliseen ymmärtämiseen kuin teorian soveltamiskyvyn kehittymiseen, erityisesti silloin kun oppimisprosessiin yhdistyy opettajan ohjaava toiminta.

Tutkimukset osoittavat, että *käsitteelliseen ymmärtämiseen tähtäävä opetus tuottaa parempia oppimistuloksia ja syvällisempää osaamista* kuin mekaanisiin laskutaitoihin pyrkivä opetus. Pyrkimys ymmärtämiseen matematiikan opetuksessa kytkeytyy oppimisympäristön rakentamisen, lähestymistapojen valinnan ja opetus-oppimisprosessin ohjaamisen kautta oppilaan sitoutumiseen semanttiseen työskentelyyn ja tämän kautta oppimistuloksiin. Semanttisen työskentelyn onnistuminen edellyttää kuitenkin oppilaan motivoitumista pitkäjänteiseen työskentelyyn, tätä tukevia lähestymistapoja ja mielekkäälle oppimiselle affektiivisesti suotuisaa oppimisympäristöä. Näitä aiheita tarkastellaan seuraavassa.

Opetuksen lähestymistavat

Tutkimuksia, joissa käsiteltiin matematiikan opetuksessa käytettyjä erilaisia lähestymistapoja, tuli haun kautta analyysiin mukaan useita. Lähestymistavat on tähän yhteyteen koottu kolmen alakategorian alle: kontekstuaalisiin (n = 7), konkreettisiin (n = 13) ja sosiaalisiin (n = 3) lähestymistapoihin.

Kontekstuaaliset lähestymistavat viittaavat toimintamalliin, jossa puhtaan matematiikan oppisisältöä lähestytään reaalimaailman ilmiöiden kautta. Näissä lähestymistavoissa on korostettu mielekkään oppimisen kannalta kahta tärkeää erityispiirrettä: reaalimaailmalähtöisyyttä ja ongelmalähtöisyyttä. Reaalimaailmakonteksti on määritelty tässä yhteydessä laajasti viitaten fyysisiin, sosiaalisiin ja kulttuurisiin tekijöihin. Reaalimaailmalähtöisyyttä painottaneissa tutkimuksissa on nähtävissä, kuinka ymmärtämisen kannalta keskeistä on oppisisällön linkittyminen oppilaan reaali- tai arkimaailmaan, jolloin matematiikan käsitteiden takana olevat merkitykset ja toiminnan syyt aukeavat oppilaalle (esim. Slavin, Lake & Groff, 2009; Modiba, 2011; Reid & Carmichel, 2015; Christie, Beames & Higgins, 2016). Esimerkiksi Christien, Beamesin ja Higginsin (2016) luokkahuoneen ulkopuoliseen opetukseen eli retkeilyyn kohdistunut tutkimus osoitti, että lähestymistapa kehitti oppilaiden metakognitiivisia taitoja ja kriittistä ajattelua matematiikassa. Oppilaat myös innostuvat itse lähestymistavasta, kun he saivat enemmän vapauksia oman oppimistoimintansa säätelyyn. Reaalimaailmalähtöisyydellä on siten ollut myönteinen vaikutus oppilaan matemaattisen ajattelun, käsitteellisen ymmärtämisen ja motivaation kehittymiseen.

Ongelmalähtöisyyttä painottaneissa tutkimuksissa kontekstina toimii jokin ongelmatilanne, usein reaalimaailmaan kytkeytyneenä, jonka kautta opetus lähestyy uutta aihetta. Varsin kattavia matematiikan opetuksen uudistukseen pyrkiviä ohjelmia on ollut esillä, joissa painotus on ollut käsitteellisessä ymmärtämisessä ja ongelmanratkaisussa (Cai, Wang, Moyer, Wang, & Ni, 2011; Ni, Li, Li, & Zhang, 2011). Näissä toimintaa on verrattu perinteisempään ”suoraan opetukseen” ja havaittu niiden

tuottaneen parempia oppimistuloksia. Ongelmalähtöiset työtavat ovat johtaneet erityisesti matematiikan ongelmanratkaisu- ja sovellustaitojen kehittymiseen. Mukaan mahtuu myös tutkimuksia, joissa lähestymistavan yhteyttä matematiikan käsitteelliseen ymmärtämiseen ei ole havaittu (Rittle-Johnson, Star & Durkin, 2012).

Kontekstuaaliset ja ongelmalähtöiset lähestymistavat edistävät mielekästä oppimista. Tutkimukset ovat osoittaneet, että opetuksessa on tärkeää oppisisällön linkittäminen oppilaan arkimaailmaan. Ymmärtämisprosessin kannalta oleellista on, että oppilas pääsee omaan arkimaailmaansa kytkeytyneen käsitteellisen viitekehyksensä kautta tulkitsemaan uutta asiaa. Oppilaan motivoitumisen kannalta keskeistä on, että oppilas näkee, missä matematiikkaa todella tarvitaan. Kontekstuaaliset ja reaali-maailmaan sidotut ongelmalähtöiset lähestymistavat ovat siten yhteydessä oppilaan ymmärtämis- ja tulkintaprosesseihin, motivaation kehittymiseen ja oppilaan tunnekokemuksiin. Näihin lähestymistapoihin yhdistyy usein myös yhteistoiminnallisuus, joka parantaa oppimista entisestään (Jorgensen & Niesche, 2008; Ni & Cai, 2011; Slavin, Lake, & Groff, 2009).

Konkreettisilla lähestymistavoilla viitataan kaikkiin havainnollistavia ja toiminnallisia välineitä käyttäviin työtapoihin. Nämä välineet on jaoteltu tässä fysikaalisiin välineisiin tai materiaaleihin, tietoteknisiin ohjelmiin ja oppimispeleihin. Havainnollistavia fysikaalisia välineitä käytettäessä keskeistä oppilaan ymmärtämisen kannalta on se, että oppilas pystyy yhdistämään matemaattisen idean sen ulkoisiin representaatioihin. Tärkein seikka välineessä on se, että siinä korostuvat juuri ne ominaisuudet, jotka ovat oleellisia esillä olevan matemaattisen käsitteen tai operaation ymmärtämisen kannalta. Erityinen huomio kiinnittyy siten konkreettisten välineiden laatuun ja niiden käytön ohjaamiseen (Berthold & Renkl, 2009; Carbonneau, Marley, & Selig, 2013; Vitale, Black, & Swart, 2014). Esimerkiksi Carbonneau, Marleyn ja Seligin (2013) tutkimus osoitti, että matemaattisen idean tavoittaminen onnistuu paremmin ”puhtailla välineillä” (esim. palikat) suhteessa ”realistisiin välineisiin” (esim. kakkupalat), huomion kiinnittyessä helpommin oleelliseen. Tutkimuksessa nousi esiin myös ohjauksen merkitys. Optimaalisesti ohjausta saaneet oppilaat saavuttivat paremmat oppimistulokset.

Erilaisten tietoteknisten apuvälineiden (esim. tietokoneet, tabletit, videopelilaitteet) käyttö matematiikan opetuksessa on kerännyt tutkijoiden huomiota enenevässä määrin. Käyttötarkoitus on vaihdellut tietokoneohjelmien käytöstä oppimisen tukena (Kong, 2008; Reed, Drijvers, & Kirschner, 2010) aina oppilasta motivoiviin oppimispeleihin (Howard & Crotty, 2017; Mavridis, Katmada, & Tsiatsos, 2017). Tietotekniset välineet ja ohjelmat tarjoavat lisämahdollisuuksia, kuten yhteyden erilaisiin reaali-maailmaa koskeviin ilmiöihin ja tiedon lähteisiin (Volk, Cotič, Zajc, & Istenic Starcic, 2017). Oppilasta kiinnostavien tietokonepelien kautta on saatu aikaan myös oppimisympäristö, jolla on ollut vaikutusta oppilaan motivoitumiseen, sitoutumiseen itse oppiaiheeseen, positiivisiin tunteisiin ja asenteisiin matematiikkaa kohtaan (Al-Washmi, Blanchfield, & Hopkins, 2015; Howard & Crotty, 2017; Ke, 2008; Núñez Castellar, Mavridis, Katmada, & Tsiatsos, 2017; Van Looy, Szmalec, & de Marez, 2014). Peleillä on ollut usein vaikutusta oppilaan affektiiviseen puoleen, mutta vasta

hyvällä ohjauksella on voitu kohdistaa oppilaan huomio varsinaiseen oppisisältöön. Tällöin toimintaa on tuettu esimerkiksi ohjaavilla kysymyksillä (Sun, Ye, & Hsieh, 2014) ja yhteistoiminnallisilla ratkaisuilla (Ke, 2008).

Tutkimukset osoittavat selkeästi oppilaiden hyötyvän konkreettisten, fysikaalisten ja tietoteknisten apuvälineiden käytöstä (tarpeen riippuessa mm. ikävaiheesta). Laadukkaana oppimisen on todettu jopa edellyttävän näiden käyttöä (Ferrucci, McDougall, & Carter, 2009; Kainose Mhlolo & Schafer, 2013). Oppiminen riippuu kuitenkin näiden välineiden valinnasta ja ohjauksen laadusta (Carbonneau, Marley, & Selig, 2013). Tarkoituksenmukaisesti käytettynä konkreettisilla lähestymistavoilla (toiminnallisilla välineillä ja tietoteknisillä sovelluksilla) on myönteinen vaikutus oppilaan ymmärtämiseen, motivaatioon, asenteisiin ja tunnetekijöihin.

Sosiaaliset lähestymistavat perustuvat sosiokonstruktivistiseen näkemykseen oppimisesta. Tutkimuksissa on siten kiinnitetty erityistä huomiota yhteistoiminnallisiin työmuotoihin, ryhmätyöskentelyyn, yhteiseen toimintaan osallistumiseen ja kommunikaatioon. Erityisesti yhteistoiminnallisilla työtavoilla ja kommunikaation lisäämisellä on havaittu positiivinen yhteys matematiikan oppimistuloksiin (Gresalfi, Martin, Hand, & Greeno, 2009; Muis, Psaradellis, Chevrier, Di Leo, & Lajoie, 2016; Pampaka ym., 2012; Souvignier & Kronenberger, 2007). Tyypillisessä yhteistoiminnan toteutusmuodossa oppilaat tutkivat ensin ”asiantuntijaryhmissä” uutta oppisisältöä, jonka jälkeen he ”kotiryhmissä” opettavat uuden asian toisille. Esimerkkinä mainittakoon Souvignierin ja Kronenbergerin (2007) tutkimus, jossa oppilaat asiantuntijoina tutkivat konkreettisin välinein tiettyä geometrian aihetta ja opettivat sitten muille oppilaille, jotka vuorostaan olivat perehtyneet toisiin aiheisiin. Lähestymistapa vaikutti myönteisesti oppilaiden oppimisprosessiin ja oppimistuloksiin.

Yhteistoiminnallisuus kytketään usein muihin lähestymistapoihin, jolloin näiden yhteisvaikutuksella on havaittu myönteinen merkitys oppimistuloksiin (Ferrucci, McDougall, & Carter, 2009; Ke, 2008; Kong, 2008; Muis ym., 2016; Souvignier & Kronenberger, 2007; Slavin, Lake, & Groff, 2009). Esimerkiksi Muis ym. (2016) tutkivat yhteistoiminnallista lähestymistapaa, jossa oppilaat valmistautuivat opettamaan toisiaan käytössään käsittekartat ja tabletit. Samalla oppilaat sitoutuivat metakognitiivisiin prosesseihin, mikä johti oppilaiden käsitteelliseen ymmärtämiseen ja korkeatasoiseen matemaattisen ongelmanratkaisun oppimiseen. Yhteistoiminnan yksi keskeinen seuraus on kommunikaation lisääntyminen oppilaille. Tämä on tärkeää matematiikassa myös itseisarvona, mutta erityisesti matematiikan kielentämisen kannalta. Kommunikaation lisäämisellä on havaittu selkeä positiivinen yhteys oppimistuloksiin (Pampaka ym., 2012; Muis ym., 2016).

Tutkimukset osoittavat, että sosiaalisilla lähestymistavoilla ja kommunikaation lisäämisellä on päästy parempiin oppimistuloksiin kuin pelkällä oppikirjatyöskentelyllä ja laskuharjoituksilla. Oleellista tässä on oppilaan aktiivisuuden ja motivaation nousu, mikä tapahtuu yhteistoimintaan osallistumisen kautta. Lisäksi matematiikan kielentämisen merkitys ymmärtämisprosessissa on keskeinen. Kuten muidenkin lähestymistapojen kohdalla, on opettajan ohjaustoiminnoilla suuri merkitys toiminnan vai-

kuttavuuden ja oppimisen kannalta. Hyvin toteutettuna sosiaalisilla lähestymistavoilla on positiivinen vaikutus oppilaan ymmärtämiseen, motivaatioon ja asenteiden paranemiseen matematiikkaa kohtaan.

Lähestymistavoilla esiintyy tutkimusten mukaan epäsuoria ja suoria vaikutussuhteita oppimistuloksiin. *Epäsuorat vaikutussuhteet muodostuvat opetustekijän vaikuttaessa esimerkiksi oppilaan positiivisiin tunteisiin, motivaatioon ja oppimisprosessiin sitoutumiseen ja edelleen näiden kautta käsitteelliseen ymmärtämiseen sekä muihin oppimistuloksiin (kuten tiedot ja taidot).* Tutkimusten mukaan lähestymistapojen *yhdistäminen lisää opetuksen vaikuttavuutta oppimiseen.* Laajimmillaan eri lähestymistapojen ja välineiden käytön integroituminen näkyy tutkivan lähestymistavan kaltaisissa tapauksissa (esim. Jorgensen & Niesche, 2008). Lähestymistapojen toivottu vaikutus oppimiseen *edellyttää kuitenkin opettajan ohjaustoimia.* Lähestymistapojen lisäksi tärkeän oppimisympäristön osatekijän muodostaa sen affektiivinen ilmasto. Seuraavassa tarkastellaan mielekkäälle oppimiselle suotuisaa oppimisympäristöä erityisesti sen sosiaalisten ja affektiivisten tekijöiden näkökulmasta.

Oppimisympäristö

Erityisen tärkeä osatekijä mielekkään oppimisen kannalta on oppimisympäristön tunneilmasto. Ensinnäkin, opettajan valmius huomioida oppilaat yksilöinä näyttäytyy tässä keskeisenä tekijänä. Kun opettaja on huomionnut opetusjärjestelyissään oppilaiden yksilöllisiä eroja, on oppilaat saatu viihtymään luokassa paremmin, osallistumaan yhteiseen työskentelyyn ja toimimaan itseohjautuvasti (Daschmann, Goetz & Stupnisky, 2011; Venkat & Brown, 2009; Jorgensen & Niesche, 2008). Toiseksi, tunneilmaston muodostumisessa opettajan ja oppilaiden sekä oppilaiden väliset sosiaaliset suhteet ovat merkittävässä osassa. Esimerkiksi Kiuru ja muut (2015) tarkastelivat oppimisympäristön jäsenten keskinäisiä vuorovaikutussuhteita (opettaja–oppilas, oppilas–oppilas). Tutkimuksen mukaan lämminhenkisellä ja kannustavalla opettajalla oli myönteinen vaikutus oppilaiden välisiin suhteisiin. Vastaavasti oppilaiden positiivinen suhtautuminen toisiinsa johti myönteisempään suhtautumiseen opettajaan. Oppilaisiin myönteisesti suhtautuvalla opettajalla näyttäisi olevan ratkaiseva vaikutus suotuisan tunneilmaston muotoutumiseen ja sen kautta oppimistuloksiin.

Myös opettajan opetusmenetelmälliset ratkaisut luokassa vaikuttavat oppimisympäristön ilmaston muotoutumiseen, jolla on yhteys oppilaan motivoitumisen ja sitoutumisen kautta oppimistuloksiin (Azigve ym., 2016; Jorgensen & Niesche, 2008; Venkat & Brown, 2009). Esimerkiksi Jorgensen ja Niesche (2008) kuvaavat oppimisympäristöä tutkivana yhteisönä, jossa ”työskennellään kuin matemaatikot”. Kyseisessä tutkivassa lähestymistavassa ongelmanratkaisu ja yhteistoiminnallisuus toimivat toisiinsa kietoutuneina matematiikan syvällisen ymmärtämisen edistämisessä. Yhteistyön onnistuminen edellyttää kuitenkin avointa ja hyvää ilmapiiriä.

Edellä mainittujen tutkimusten mukaan *mielekkäälle oppimiselle suotuisan oppimisympäristön syntymiseen vaikuttaa keskeisesti sen tunneilmasto.* Affektiivisesti suotuisan oppimisympäristön muotoutumisessa näyttäisi opettajan suhtautumisella oppilaisiinsa yksilöinä ja opetukseen

osallistuvien jäsenten välisillä lämpimillä suhteilla olevan ratkaiseva merkitys. Oppimisympäristön tunneilmasto vuorostaan heijastuu edelleen oppilaan viihtymisen, avautumisen ja opetus-oppimisprosessiin osallistumisherkkyuden lisääntymisen kautta parempaan oppimiseen. Oppilaiden työskentelyn laatu riippuu kuitenkin suuressa määrin myös opettajan ohjaustoiminnasta ja oppilaiden välisestä vuorovaikutuksesta opetus-oppimisprosessin aikana. Tätä näkökulmaa analysoidaan lähemmin seuraavassa.

Opetus-oppimisprosessi, sen ohjaaminen ja vuorovaikutus oppilaan kanssa

Seuraavaa tarkastelua varten opetus-oppimisprosessi on jaettu karkeasti päävaiheisiin ja sen mukaisesti tutkimuksittain alakategorioihin: orientaatiovaihe (n = 5), työskentelyvaihe (n = 7) ja arviointivaihe (n = 2). Opetus-oppimisprosessin aikaiseen vuorovaikutukseen ja prosessin ohjaamiseen kohdistuneita tutkimuksia tuli haussa mukaan useita. Suurin osa tutkimuksista ei tee eksplisiittisesti eroa, kohdistuuko vuorovaikutuksen tai ohjauksen tarkastelu tiettyyn vaiheeseen prosessissa. Näin on ollut erityisesti prosessin aloittavan orientaatiovaiheen ja sen päättävän arviointivaiheen kohdalla.

Orientaatiovaiheessa kyse on oppimisvalmiuksien luomisesta tulevaa toimintaa varten. Mielekkään oppimisen kannalta opettajan yksi päätehtävä on tarkastella oppilaiden kanssa tulevan toiminnan tavoitteita (Azigve ym., 2016; Daschmann, Goetz, & Stupnisky, 2011; Gresalfi ym., 2009). Esimerkiksi Gresalfin ym. (2009) tutkimuksessa havaittiin oppilaiden osallistuvan yhteiseen työskentelyyn herkemmin, kun oppilaat tietävät mitä heiltä odotetaan ja mihin ollaan pyrkimässä. Toinen tärkeä päätehtävä on uutta aihetta lähestyttäessä aktivoida oppilaan aiempi tieto, johon uusi opittava asia tulisi saada liitettyä (Singer, 2009; Fuchs ym., 2008b). Esimerkiksi Singerin (2009) tutkimuksen mukaan oppilaan dynaamisen infrastruktuurin eli perimmäisten mentaalisten operaatioiden aktivoiminen on edellytys oppilaiden matemaattisen ajattelun ja luovan ongelmanratkaisun kehittymisen kannalta.

Edellä mainittujen opettajan tehtävien lisäksi keskeistä on oppilaan alkumotivaation käsittely opetus-oppimisprosessin alussa ja sen ylläpitäminen prosessin aikana. Opetuksen tähdätessä matematiikan ymmärtämiseen osoittautuu oppilaiden sisäisen motivaation synnyttäminen pitkäjänteiseen semanttiseen työskentelyyn tärkeäksi. Sisäiseen motivaatioon viittaavissa tutkimuksissa on käytetty käsitettä oppimistavoite-orientaatio, joka tarkoittaa oppilaan pyrkimystä oppia ja ymmärtää opetuksessa esillä olevaa oppisisältöä. Opettajan orientoitessa oppilaita tähän suuntaan, on sen havaittu johtavan syvällisiin oppimisstrategioihin, laadukkaaseen käsitteelliseen ymmärtämiseen, kykyyn soveltaa tietoa uusiin tilanteisiin ja luovaan matemaattiseen ongelmanratkaisuun (Huy, 2014; Matos, Lens, Vansteenkiste & Mouratidis, 2017). Oppilaiden oppimisvalmiuksien kehittämiseen on pyritty myös luokkatyöskentelyn ulkopuolisen mentoimintimenettelyn kautta. Tällä menettelyllä on havaittu myönteinen vaikutus oppilaiden motivoitumiselle ja oppimiselle (Simões & Alarcão, 2014).

Opetus-oppimisprosessin työskentelyn aikaista ohjausta ja sen eri toteutusmuotoja sekä jäsenten välistä kommunikaatiota on tutkimuksissa

käsitelty runsaasti. Tutkimukset osoittavat, että ohjaustarve on suuri, erityisesti silloin kun pyrkimys on matematiikan käsitteelliseen ymmärtämiseen. Esimerkiksi Schwonken ym. (2011) tutkimuksessa todettiin, että oppilaan on mahdollista omaksua proseduraalista tietoa ongelmanratkaisussa ja helpommissa tehtävissä, vaikka käytetään vain vähäistä ohjausta. Sen sijaan oppilaalle käsitteellisen tiedon omaksuminen edellyttää, että opettaja antaa intensiivistä ohjausta. Ohjausta on esiintynyt orientoinnin, ohjaavan kyselyn, palautteen ja toimintaan tai tehtäviin sidottujen ohjaavien kysymysten muodossa. Kaikilla näillä on ollut positiivinen merkitys oppimiselle (Fuchs ym., 2013; Gresalfi ym., 2009; van der Kleij, Feskens, & Eggen, 2015; Souvignier & Kronenberger, 2007; Sun, Ye, & Hsieh, 2014). Matemaattisen ajattelun ja ymmärtämisen kehittämisen kannalta oleellista on, että ohjatessa pureudutaan oppilaan henkilökohtaiseen ajatteluprosessiin. Esimerkiksi van der Kleij, Feskens ja Eggen (2015) korostavat, että ei kiinnitettäisi huomiota vain oppilaan vastauksen oikeellisuuteen ja virheellisyyteen, vaan heille tulisi antaa selittävää palautetta. Opettajan tulisi siis edetä opetuskeskusteluissa (esim. kyselevä opetus) staattiselta oikein-väärin vastausten tasolta dynaamisen ajatteluprosessin tarkasteluun (esim. miten ajattelit ja miksi -kysymykset). Opettajan antaessa ohjaavaa palautetta tulisi kuitenkin varoa, että oppilas ei menetä mahdollisuutta omaan ajatteluun ja tiedon konstruoimiseen. Esimerkiksi Gresalfin ym. (2009) mukaan oppilaan huomion kohdistamisella oleelliseen on ohjatessa myönteinen merkitys silloin, kun se ohjaa muttei rajaa oppilaan omaa luovaa ajattelua ja toimintaa. Mielekäs oppiminen on oppilaan prosessi ja sitä ohjatessa on siis huolehdittava, että oppilaan omalle ajattelulle jää riittävästi tilaa.

Oppilaiden osallistumiseen ja kommunikoinnin laatuun on tutkimuksissa kiinnitetty enenevässä määrin huomiota (O'Connor, Michaels, Chapin & Harbaugh, 2017; van der Kleij, Feskens & Eggen, 2015; Pampaka ym., 2012; Vista, 2016; Wood & Kalinec, 2012). Esimerkiksi Woodin ja Kalinecin (2012) tutkimuksessa havaittiin, että matematiikka-puheen sisällöllä on suurempi vaikutus oppimistuloksiin kuin puheen määrällä. Näin kommunikaatiossa huomio tulisi kiinnittää matemaattisten käsitteiden semanttiseen puoleen tai tehtävien ratkaisujen takana olevaan matemaattiseen ajatteluun (van der Kleij, Feskens & Eggen, 2015; Wood & Kalinec, 2012). Varsin yleisesti pidetään toivottavana oppilaiden osallistumista luokan yhteiseen toimintaan ja kommunikointiin. Tämä ei kuitenkaan ole aina mitenkään suoraviivaisesti toteutettavissa. Tähän viittaa O'Connorin ja muiden (2017) luokkakeskusteluun osallistuvien oppilaiden käyttäytymiseen kohdistunut tutkimus, jossa hiljaisten oppilaiden osallistumisen asteella ei havaittu yhteyttä oppimistuloksiin. Näyttäisi siis siltä, että opetuksessa olisi hedelmällisempää antaa hiljaiselle oppilaalle aikaa ja tilaa tulla omilla ehdoillaan mukaan keskusteluun.

Arviointia on käsitelty usein yhdessä muiden opetustekijöiden kanssa, kuten erilaisten opetusta koskevien periaatteiden yhteydessä (esim. Azigve ym., 2016; Fuchs ym., 2008b). Esimerkiksi Fuchsin ja muiden (2008b) tutkimus kohdistui opetusjärjestelyjä ja opetustavoitteita koskeviin periaatteisiin ja näiden yhteyksiin oppimistuloksiin. Yksi näistä periaatteista koski oppilaan kehityksen jatkuvaa arviointia, jolla todettiin olevan positiivinen vaikutus oppimiseen. Oleellista on, mihin arvioinnissa kiinnitetään huomiota. Esimerkiksi Fuchs ja muut (2008a) perustavat

ajatuksensa Vygotskin lähikehityksen vyöhykkeen ideaan. Tutkimuksen mukaan arviointi ja sen mukainen ohjaus edistävät oppimista paremmin, kun huomio kiinnittyy oppilaan potentiaaliin oppia eikä vallitsevaan kykyyn suorittaa tietty tehtävä.

Edellä tarkasteltiin tutkimuksia, jotka valottavat erityisesti opetus-oppimisprosessin aikaista opettajan ja oppilaan välistä vuorovaikutusta. Tutkimuksissa nousee esiin *osallistumisen, vuorovaikutuksen ja kommunikation laadun merkitys*. Ohjauksessa huomio kohdistuu tällöin erityisesti oppilaan matemaattisen ajattelun ja ymmärtämisen sekä motivaation ja oppimisprosessiin sitoutumisen tukemiseen. Tutkimukset osoittavat, että *opettajan tehtävä oppilaan oppimisprosessin ohjaajana on merkittävä* ja näyttäytyä edellytyksenä laadukkaalle oppimiselle.

Pohdinta

Tutkimuksemme teoreettisena lähtökohtana oli Koskisen (2016) esittämä *mielekkään oppimisen ja matematiikan opetuksen kokonaisuusmalli*. Tuo tutkimus kohdentui mielekkään oppimisen käsitteelliseen viitekehykseen, ei niinkään empiiriseen tutkimukseen. Sen sijaan tässä tutkimuksessa olemme nojautuneet uusimpiin empiirisiin tutkimuksiin vuosilta 2007–2017, joissa on analysoitu matematiikan kouluopetusta ja sen yhteyttä oppimiseen.

1. Synteesimme päärakenteina nostimme Koskisen (2016) mallia mukailleen esiin *opetuksen intentiot, opetuksen lähestymistavat, oppimisympäristön, opetus-oppimisprosessin ja sen ohjauksen, ja näiden yhteydet oppimistuloksiin*. Tutkimustulostemme valossa näyttäisi siltä, että edellä kuvattujen prosessin päätappien käsitteleminen huolimattomasti tai jonkin niihin liittyvän näkökulman ohittaminen heikentäisi mielekkään oppimisen toteutumista. Aineistossamme mukana olleissa *tutkimuksissa* (n = 50) *ei ole tutkittu tätä prosessia empiirisesti kokonaisuutena*. Sen sijaan mallin joihinkin osakokonaisuuksiin ja niiden vaikutuksiin oppimistuloksiin on kohdistettu huomiota.

2. Analyysimme osoittaa, että tarkoituksenmukaisesti käytettynä kontekstuaalisilla, konkreettisilla ja sosiaalisilla lähestymistavoilla on myönteinen vaikutus oppilaan ymmärtämiseen, motivaatioon ja tunteisiin. Lisäksi on useissa tutkimuksissa havaittu, että *lähestymistapojen yhdistäminen* parantaa entisestään niiden vaikuttavuutta oppimiseen. Vaikka hyvään oppimiseen päästään monella eri tavalla, ei ole täysin selvää, miten eri lähestymistapojen integroiminen tulisi suorittaa. Näyttäisi kuitenkin siltä, että *järjestyksellä on väliä*. Aihetta ei kuitenkaan ole aiemmin käsitelty, ei myöskään Koskisen (2016) tutkimuksessa. Esimerkiksi konkreettisten lähestymistapojen tarkastelun kohdalla kävi ilmi, että puhtaat välineet (esim. palikat) toimivat tehokkaammin kuin realistiset välineet (esim. kakkupalat) matemaattisen idean havainnollistajina ja oppilaan huomion kohdentajina ymmärtämisen kannalta oleelliseen (Carbonneau, Marley & Selig, 2013). Kontekstuaalinen lähestymistapa viittaa kuitenkin siihen, että uutta aihetta lähestyttäessä opetuksen olisi hyvä lähteä liikkeelle oppilaalle tutusta ja merkityksellisestä reaali maailmasta. Tästä voidaan päätellä, että opetus kannattaisi vaiheistaa näitä yhdisteltäessä siten, että ensin käsitellään opittavana olevan matemaattisen sisällön reaali maailmayhteys, jonka

jälkeen lähestytään formaalia matemaattista ideaa puhtailla konkreettisilla välineillä ja edetään tästä matematiikan kielentämiseen.

3. Lähestymistapojen toivottu vaikutus näyttäisi olevan riippuvainen myös muista opetuksellisista tekijöistä. Erityisesti *opettajan rooli ja ohjauksen merkitys* opetus-oppimisprosessin aikana nousee tutkimuksissa esiin (esim. Berthold & Renkl, 2009). Työskentely voi helposti jäädä puuhastelun tasolle tai huomio kiinnittyä epäoleennaisiin seikkoihin ilman opettajan ohjausta. Eri lähestymistavat ja välineet eivät sellaisenaan edistä riittävästi matematiikan mielekästä oppimista, vaan vasta opettajan taito valita sopivat välineet, valmius käyttää niitä tarkoituksenmukaisesti ja oppilaan toiminnan ohjaaminen näyttäisivät johtavan parempiin oppimistuloksiin. Ohjauksen merkitys on osoitettu useissa yhteyksissä, kuten yhteistoiminnallisissa työtavoissa (Souvignier & Kronenberger, 2007) ja tietotekniikkaa hyödyntävissä toimintamalleissa (Sun, Ye & Hsieh, 2014). Opettajan ohjaustoiminnassa huomattavaa kuitenkin on, että se ei saa rajata tai leikata pois oppilaan omaa luovaa ajattelua, vaan sen tulee ainoastaan tukea oppilaan henkilökohtaista toimintaa.

4. Lisäksi tutkimuksessamme huomioitiin nyt aiempaa Koskisen (2016) tutkimusta tarkemmin lähestymistapojen ja oppimisympäristön eri tekijöiden epäsuorat vaikutukset oppimistuloksiin. Oppilaan *välittävillä mentaaleilla prosesseilla* (kuten avautuminen, motivoituminen ja sitoutuminen) oli merkittävä rooli opetusprosessin etenemisen ja oppimistulosten laadun kannalta. Esimerkiksi eri lähestymistavoilla, kuten reaali maailma-konteksteilla ja tietoteknisillä sovelluksilla, on voitu vaikuttaa oppilaiden motivaatioon ja oppimisprosessiin sitoutumiseen ja sitä kautta sopivalla ohjauksella myös pyrkimykseen ymmärtää matematiikan oppisisältöjä (Christie, Beames & Higgins, 2016; Mavridis, Katmada & Tsiatsos, 2017). Sosiaalisten vuorovaikutustekijöiden säätelyn ja suotuisan tunnelmaston kautta on vuorostaan saatu aikaan opetukseen osallistuneiden jäsenten välistä hyväksyntää ja avautumista yhteiseen työskentelyyn (Daschmann, Goetz & Stupnisky, 2011; Kiuru ym., 2015). Erityisesti positiivinen tunnelmasto näyttäytyy oppimisympäristössä merkittävänä tekijänä, joka synnyttää ja ylläpitää oppilaan motivaatiota ja sitoutumista oppimisprosessiin. Tämä vuorostaan on edellytys oppilaan pitkäjänteiselle semanttiselle työskentelylle hänen pyrkimyksissään ymmärtää matematiikkaa.

Olemme pyrkineet tässä tutkimussynteesissä riittävään kattavuuteen siten, että siinä tulee esiin opetuksen aspekti ja toisaalta myös oppilaan toiminnan ja oppimisen näkökulma. Tutkimuksessa käytettävien hakusanojen käytön kannalta ideaali haku on kuitenkin ongelmallinen. Jos opetuksen ja oppimistuotoksen laadullisen näkökulman lisäksi halutaan *ymmärtää oppilaan psykologista perspektiiviä* (kuten esim. osallistuminen, sitoutuminen, emootiot, intentiot ja motivaatio), haun tekijä joutuu vaikean ongelman eteen. Jos nimittäin edellisen näkökulman mukainen haku tehdään, se yhdistettynä kahteen muuhun hakusanaan (opetus ja oppiminen) antaa helposti suhteellisen pienen lähteistön. Tämä aiheutuu siitä, että ei ole olemassa sellaista riittävän generaalien tason hakusanaa, joka olisi riittävästi käytössä (tai edes sellaista lyhyttä hakusanojen ”luetteloa”, jonka tutkijat voisivat helposti hyväksyä). Voimme tietenkin tekstissä tuoda näkökulmaa tarkastella, kuten olemme tehneetkin puhumalla oppilaan psykologisista prosesseista. Jos ja kun käyttämiemme

lähteiden tutkimus on tutkimusasetelmallisesti modernia, ongelma ei sittenkään ole niin huomattava kuin aluksi voisi kuvitella. Käytännössä useissa opetuksen perspektiivistä tehdyissä tutkimuksissa oppilaan asema ja variaatio on otettu huomioon. Haluamme kuitenkin kiinnittää tähän edelleen huomiota, ja kenties löydämmekin tulevaisuudessa sellaisen hakusanan, joka toimii vastaavan näkökulman kontrollina tutkimuksissa. Mainitun tekijän sisällyttäminen tutkimussynteesiin on joka tapauksessa tärkeää, sillä vuorovaikutukset etenevät monella tavalla muun muassa oppilaan kautta, olipa kyseessä sitten toiminta, kognitio tai emotionaalinen näkökulma. Ilman oppilaan näkökulmaa opetuksen efektiivisyyttä ei voi kunnolla tulkita ja ymmärtää.

Oppilaan perspektiivin mukaan ottamisen lisäksi haluamme työskennellä sellaisen tutkimuksellisen perspektiivin kanssa, joka koskee *opettajan tietämistä*. Se on muodostunut varsin merkittäväksi tutkimusalueeksi tällä vuosikymmenellä. Esimerkiksi 'teacher knowledge' yhdistettynä hakusanoihin 'math*' ja 'teaching' tuottaa Ebsco-tietokannassa vuosina 2010–2018 (tätä kirjoitettaessa) 524 tutkimusviitettä vertaisarvioituissa lehdissä. ”Raaka-aineiston” frekvenssi on siten suurempi kuin tässä synteesissä, jossa tutkittiin kuitenkin melko laaja-alaista kokonaisuutta matematiikan opetuksesta ja oppimisesta. Uskomme, että tämä aiheutuu learning outcomes -hakusanan ”vaativuudesta”. Jos tehdään haku, jossa tuo oppimistuotoksen näkökulma yhdistetään hakusanoihin 'teacher knowledge' ja 'math*', haku tuottaa samalla aikajänteellä vain 13 viitettä. Päättelemme mukaan mallin rakentamisessa ja edelleen kehittämisessä (ja laajentamisessa) on siis edettävä asteittain, vaihe vaiheelta. Tämä tarkoittaa käytännössä sitä, että meidän on synteesin rakentajina pyrittävä tutkimaan sitä, millainen on opettajan tietämisen luonne ja millaisia yhteyksiä sillä on opettamisen toteutumiseen (ja sitä lähellä oleviin muihin prosesseja kuvaaviin tekijöihin). Tutkimuksen volyyymi on tässä fokuksessa melkoisen suuri, ja se on kasvanut nimenomaan viime vuosina. Jo tehtyjen (vaikkakin aika harvojen) meta-analyyysien ja muiden kapeampien tutkimussynteesien perusteella on saatu aika luotettavia ja johdonmukaisesti käyttäytyviä tutkimustuloksia. Opettajakognitiota tutkimalla voimme saada ymmärrystä ja selitystä sille, miksi opetus muotoutuu sellaiseksi kuin muotoutuu. Periaatteessa on kyse myös mekanismin ”purkamisesta”: tässä mielessä sekä oppijakognitiot, emotiot ynnä muut että opettajan vastaavat tekijät ovat keskeisessä asemassa. Aineiston haun kannalta opettajakognition ja -tietämyksen ja opetuksen suhde on kuitenkin huomattavasti selkeämpi tutkimustehtävä kuin tämän tutkimussynteesin.

Lähteet

Varsinaiseen tutkimusaineistoon sisältyvät artikkelit on merkitty tekijän nimen eteen tähdellä (*).

Allsopp, D. & Haley, K. (2015). A synthesis of research on teacher education, mathematics, and students with learning disabilities. *Learning Disabilities - A Contemporary Journal*, 13(2), 177–206.

*Al-Washmi, R., Blanchfield, P. & Hopkins, G. (2015). The efficacy of digital games to teach mathematics. Teoksessa *Proceedings of the 8th Annual International Conference on Computer Games, Multimedia & Allied Technology 2015*, 148–154. https://doi.org/10.5176/2251-1679_CGAT15.40

- *Amador, J. M. (2016). Teachers' considerations of students' thinking during mathematics lesson design. *School Science & Mathematics*, 116(5), 239–252. <https://doi.org/10.1111/ssm.12175>
- *Azigwe, J. B., Kyriakides, L., Panayiotou, A. & Creemers, B. P. M. (2016). The impact of effective teaching characteristics in promoting student achievement in Ghana. *International Journal of Educational Development*, 51, 51–61. <https://doi.org/10.1016/j.ijedudev.2016.07.004>
- *Berthold, K. & Renkl, A. (2009). Instructional aids to support a conceptual understanding of multiple representations. *Journal of Educational Psychology*, 101(1), 70–87. <https://doi.org/10.1037/a0013247>
- Bolyard, J. & Moyer-Packenham, P. (2008). A Review of the Literature on Mathematics and Science Teacher Quality. *Peabody Journal of Education*, 83(4), 509–535. <https://doi.org/10.1080/01619560802414890>
- *Cai, J., Wang, N., Moyer, J. C., Wang, C. & Nie, B. (2011). Longitudinal investigation of the curricular effect: An analysis of student learning outcomes from the LieCal Project in the United States. *International Journal of Educational Research*, 50(2), 117–136. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.06.006>
- *Carbonneau, K. J., Marley, S. C. & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 380–400. <https://doi.org/10.1037/a0031084>
- *Christie, B., Beames, S. & Higgins, P. (2016). Context, culture and critical thinking: Scottish secondary school teachers' and pupils' experiences of outdoor learning. *British Educational Research Journal*, 42(3), 417–437. <https://doi.org/10.1002/berj.3213>
- Cooper, H. & Koenka, A. C. (2012). The overview of reviews: Unique challenges and opportunities when research syntheses are the principal elements of new integrative scholarship. *American Psychologist*, 67(6), 446–462. <https://doi.org/10.1037/a0027119>
- *Csapó, B. (2007). Research into learning to learn through the assessment of quality and organization of learning outcomes. *Curriculum Journal*, 18(2), 195–210. <https://doi.org/10.1080/09585170701446044>
- *Daschmann, E. C., Goetz, T. & Stupnisky, R. H. (2011). Testing the predictors of boredom at school: Development and validation of the precursors to boredom scales. *British Journal of Educational Psychology*, 81(3), 421–440. <https://doi.org/10.1348/000709910X526038>
- *Davis, J. D. (2014). Reasoning-and-proving within Ireland's reform-oriented national syllabi. *Mathematics Enthusiast*, 11(3), 665–705.
- Dennis, M., Sharp, E., Chovanes, J., Thomas, A., Burns, R., Custer, B. & Park, J. (2016). A meta-analysis of empirical research on teaching students with mathematics learning difficulties. *Learning Disabilities Research & Practice*, 31(3), 156–168. <https://doi.org/10.1111/ldrp.12107>
- *Ferrucci, B. J., McDougall, J. & Carter, J. (2009). Getting a BEAD on it. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(5), 268–273.
- Finlayson, K. W. & Dixon, A. (2008). Qualitative meta-synthesis: a guide for the novice. *Nurse Researcher*, 15(2), 59–71. <https://doi.org/10.7748/nr2008.01.15.2.59.c6330>
- *Fuchs, L. S., Compton, D. L., Fuchs, D., Hamlett, C. L., DeSelms, J., Seethaler, P. M., Wilson, J., Craddock, C. F., Bryant, J. D., Luther, K., Geary, D. C., Schatschneider, C. & Changas, P. (2013). Effects of first-grade number knowledge tutoring with contrasting forms of practice. *Journal of Educational Psychology*, 105(1), 58–77. <https://doi.org/10.1037/a0030127>
- *Fuchs, L. S., Compton, D. L., Fuchs, D., Hollenbeck, K. N., Craddock, C. F. & Hamlett, C. L. (2008a). Dynamic assessment of algebraic learning in predicting third graders' development of mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 100(4), 829–850. <https://doi.org/10.1037/a0012657>
- *Fuchs, L. S., Fuchs, D., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Cirino, P. T. & Fletcher, J. M. (2008b). Intensive intervention for students with mathematics disabilities: seven principles of effective practice. *Learning Disability Quarterly*, 31(2), 79–92. <https://doi.org/10.2307/20528819>
- Glass, G. V., McGaw, B. & Smith, M. L. (1981). *Meta-analysis in social research*. Beverly Hills, CA: Sage.

- *Gresalfi, M., Martin, T., Hand, V. & Greeno, J. (2009). Constructing competence: an analysis of student participation in the activity systems of mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 70(1), 49–70. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9141-5>
- *Guo, J.-P., Yang, L.-Y. & Ding, Y. (2014). Effects of example variability and prior knowledge in how students learn to solve equations. *European Journal of Psychology of Education*, 29(1), 21–42. <https://doi.org/10.1007/s10212-013-0185-2>
- Harden, A. & Thomas, J. (2005). Methodological issues in combining diverse study types in systematic reviews. *International Journal of Social Research Methodology*, 8(3), 257–271. <https://doi.org/10.1080/13645570500155078>
- Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. Teoksessa D. A. Grouws (toim.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (ss. 65–97). New York: MacMillan Publishing Company.
- Hiebert, J. & Wearne, D. (1992). Links between teaching and learning place value with understanding in first grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(2), 98–122. <https://doi.org/10.2307/749496>
- *Howard, S. & Crotty, Y. (2017). The potential of an interactive game-based software to motivate high-achieving maths students at primary school level. *Electronic Journal of Mathematics & Technology*, 11(2), 112–127.
- *Huy P. P. (2014). An Integrated Framework Involving Enactive Learning Experiences, Mastery Goals, and Academic Engagement-Disengagement. *Europe's Journal of Psychology*, 10(1), 41–66. <https://doi.org/10.5964/ejop.v10i1.680>
- *Jorgensen, R. & Niesche, R. (2008). Equity, mathematics and classroom practice: Developing rich mathematical experiences for disadvantaged students. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 13(4), 21–27.
- Jussila, J., Montonen, K. & Nurmi, K. E. (1993). Systemaattinen analyysi kasvatustieteiden tutkimusmenetelmänä. Teoksessa T. Gröhn & J. Jussila (toim.), *Laadullisia lähestymistapoja koulutuksen tutkimuksessa* (ss. 157–208). Helsinki: Yliopistopaino.
- *Kainose Mhlolo, M. & Schafer, M. (2013). Consistencies far beyond chance: an analysis of learner preconceptions of reflective symmetry. *South African Journal of Education*, 33(2), 1–17. <https://doi.org/10.15700/saje.v33n2a686>
- *Kapur, M. (2014). Productive failure in learning math. *Cognitive Science*, 38(5), 1008–1022. <https://doi.org/10.1111/cogs.12107>
- *Ke, F. (2008). Computer games application within alternative classroom goal structures: cognitive, metacognitive, and affective evaluation. *Educational Technology Research and Development*, 56, 539–556. <https://doi.org/10.1007/s11423-008-9086-5>
- Kieran, C. (1994). Doing and seeing things differently: A 25-year retrospective of mathematics education research on learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 583–607. <https://doi.org/10.2307/749574>
- *Kiuru, N., Aunola, K., Lerkkanen, M.-K., Pakarinen, E., Poskiparta, E., Ahonen, T., Poikkeus, A.-M. & Nurmi, J.-E. (2015). Positive teacher and peer relations combine to predict primary school students' academic skill development. *Developmental Psychology*, 51(4), 434–446. <https://doi.org/10.1037/a0038911>
- *van der Kleij, F. M., Feskens, R. C. W. & Eggen, T. J. H. M. (2015). Effects of feedback in a computer-based learning environment on students' learning outcomes. *Review of Educational Research*, 85(4), 475–511. <https://doi.org/10.3102/0034654314564881>
- *Kong, S. C. (2008). The development of a cognitive tool for teaching and learning fractions in the mathematics classroom: A design-based study. *Computers & Education*, 51(2), 886–899. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2007.09.007>
- Koskinen, R. (2016). *Mielekäs oppiminen matematiikan opetuksen lähtökohtana. Systemaattinen analyysi Journal for Research in Mathematics Education aikakauslehtien artikkelien pohjalta.* (Väitöskirja). Helsingin yliopisto. <http://urn.fi/URN:ISBN:978-951-51-1136-4>
- Lee, J. (2009). Universals and specifics of math self-concept, math self-efficacy, and math anxiety across 41 PISA 2003 participating countries. *Learning and Individual Differences*, 19(3), 355–365. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2008.10.009>

- *Marshall, J. H., Ung, C., Nessay, P., Ung, N. H., Savoeun, V., Tinon, S. & Veasna, M. (2009). Student Achievement and Education Policy in a Period of Rapid Expansion: Assessment Data Evidence From Cambodia. *International Review of Education*, 55, 393–413. <https://doi.org/10.1007/s11159-009-9133-4>
- *Matos, L., Lens, W., Vansteenkiste, M. & Mouratidis, A. (2017). Optimal motivation in Peruvian high schools: Should learners pursue and teachers promote mastery goals, performance-approach goals or both? *Learning & Individual Differences*, 55, 87–96. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.02.003>
- *Mavridis, A., Katmada, A. & Tsiatsos, T. (2017). Impact of online flexible games on students' attitude towards mathematics. *Educational Technology Research and Development*, 65, 1451–1470. <https://doi.org/10.1007/s11423-017-9522-5>
- Metsämuuronen, J. (toim.) (2013). *Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkitäisarviointi vuosina 2005–2012*. Koulutuksen seurantaraportit 2013:4. Helsinki: Opetushallitus.
- Middleton, J. A. & Spanias, P. A. (1999). Motivation for Achievement in Mathematics: Findings, Generalizations, and Criticisms of the Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(1), 65–88. <https://doi.org/10.2307/749630>
- *Modiba, M. (2011). Even the 'Best' Teachers May Need Adequate Subject Knowledge: An Illustrative Mathematics Case Study. *Research in Education*, 85(1), 1–16. <https://doi.org/10.7227/RIE.85.1>
- *Muis, K. R., Psaradellis, C., Chevrier, M., Di Leo, I. & Lajoie, S. P. (2016). Learning by preparing to teach: Fostering self-regulatory processes and achievement during complex mathematics problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 108(4), 474–492. <https://doi.org/10.1037/edu0000071>
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. Reston, VA: Author.
- *Ni, Y. & Cai, J. (2011). Searching for evidence of curricular effect on the teaching and learning of mathematics: Lessons learned from the two projects. *International Journal of Educational Research*, 50(2), 137–143. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.06.007>
- *Ni, Y., Li, Q., Li, X. & Zhang, Z.-H. (2011). Influence of curriculum reform: An analysis of student mathematics achievement in Mainland China. *International Journal of Educational Research*, 50(2), 100–116. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.06.005>
- *Núñez Castellar, E., Van Looy, J., Szmalec, A. & de Marez, L. (2014). Improving arithmetic skills through gameplay: Assessment of the effectiveness of an educational game in terms of cognitive and affective learning outcomes. *Information Sciences*, 264, 19–31. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.09.030>
- *O'Connor, C., Michaels, S., Chapin, S. & Harbaugh, A. G. (2017). The silent and the vocal: Participation and learning in whole-class discussion. *Learning and Instruction*, 48, 5–13. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2016.11.003>
- *Olteanu, C. & Holmqvist, M. (2012). Differences in success in solving second-degree equations due to differences in classroom instruction. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, 43(5), 575–587. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2011.622807>
- *Pampaka, M., Williams, J., Hutcheson, G., Wake, G., Black, L., Davis, P. & Hernandez-Martinez, P. (2012). The association between mathematics pedagogy and learners' dispositions for university study. *British Educational Research Journal*, 38(3), 473–496. <https://doi.org/10.1080/01411926.2011.555518>
- Polanin, J.R., Maynard, B.R. & Dell, N.A. (2017). Overviews in education research: A systematic review and analysis. *Review of Educational Research*, 87(1), 172–203. <https://doi.org/10.3102/0034654316631117>
- Ralston, N., Benner, G., Tsai, S.-F., Riccomini, P. & Nelson, J. (2014). Mathematics Instruction for Students With Emotional and Behavioral Disorders: A Best-Evidence Synthesis. *Preventing School Failure*, 58(1), 1–16. <https://doi.org/10.1080/1045988X.2012.726287>

- *Reed, H. C., Drijvers, P. & Kirschner, P. A. (2010). Effects of attitudes and behaviours on learning mathematics with computer tools. *Computers & Education*, 55(1), 1–15. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2009.11.012>
- *Reid, J. & Carmichael, C. (2015). A taste of Asia with statistics and technology. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 20(1), 10–15.
- *Rittle-Johnson, B., Star, J. R. & Durkin, K. (2012). Developing procedural flexibility: Are novices prepared to learn from comparing procedures? *British Journal of Educational Psychology*, 82(3), 436–455. <https://doi.org/10.1111/j.2044-8279.2011.02037.x>
- *Schwonke, R., Renkl, A., Salden, R. & Alevin, V. (2011). Effects of different ratios of worked solution steps and problem solving opportunities on cognitive load and learning outcomes. *Computers in Human Behavior*, 27(1), 58–62. <https://doi.org/10.1016/j.chb.2010.03.037>
- *Simões, F. & Alarcão, M. (2014). The moderating influence of perceived competence in learning on mentored students' school performance. *Learning & Individual Differences*, 32, 212–218. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2014.03.009>
- Şimşek, N. & Boz, N. (2016). Analysis of pedagogical content knowledge studies in the context of mathematics education in Turkey: A meta-synthesis study. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 16(3), 799–826. <https://doi.org/10.12738/estp.2016.3.0382>
- *Singer, F. M. (2009). The dynamic infrastructure of mind – A hypothesis and some of its applications. *New Ideas in Psychology*, 27(1), 48–74. <https://doi.org/10.1016/j.newideapsych.2008.04.007>
- *Slavin, R. E., Lake, C. & Groff, C. (2009). Effective programs in middle and high school mathematics: A best-evidence synthesis. *Review of Educational Research*, 79(2), 839–911. <https://doi.org/10.3102/0034654308330968>
- *Souvignier, E. & Kronenberger, J. (2007). Cooperative learning in third graders' jigsaw groups for mathematics and science with and without questioning training. *British Journal of Educational Psychology*, 77(4), 755–771. <https://doi.org/10.1348/000709906X173297>
- *Sun, C.-T., Ye, S.-H. & Hsieh, H.-C. (2014). Effects of student characteristics and question design on Internet search results usage in a Taiwanese classroom. *Computers & Education*, 77, 134–144. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2014.04.020>
- Suri, H. & Clarke, D. (2009). Advancements in Research Synthesis Methods: From a Methodologically Inclusive Perspective. *Review of Educational Research*, 79(1), 395–430. <https://doi.org/10.3102/0034654308326349>
- Thunder, K. & Berry, R.Q. (2016). The Promise of Qualitative Metasynthesis for Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47(4), 318–337. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.47.4.0318>
- Varto, J. (1991). Mitä hermeneutiikka on? Teoksessa A. Haapala (toim.), *Kirjallisuuden tulkinta ja ymmärtäminen* (ss. 29–43). Helsinki: VAPK-kustannus.
- *Venkat, H. & Brown, M. (2009). Examining the implementation of the mathematics strand of the Key Stage 3 Strategy: what are the bases of evaluation? *British Educational Research Journal*, 35(1), 5–24. <https://doi.org/10.1080/01411920802041665>
- Vettenranta, J., Välijärvi, J., Ahonen, A., Hautamäki, J., Hiltunen, J., Leino, K., Lähteenen, S., Nissinen, K., Nissinen, V., Puhakka, E., Rautopuro, J., & Vainikainen M-P. (2016). *PISA 15 ensituloksia. Huipulla pudotuksesta huolimatta*. Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisu 2016:41. <http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-263-436-8>
- *Vista, A. (2013). The role of reading comprehension in maths achievement growth: Investigating the magnitude and mechanism of the mediating effect on maths achievement in Australian classrooms. *International Journal of Educational Research*, 62, 21–35. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2013.06.009>
- *Vitale, J. M., Black, J. B. & Swart, M. I. (2014). Applying grounded coordination challenges to concrete learning materials: A study of number line estimation. *Journal of Educational Psychology*, 106(2), 403–418. <https://doi.org/10.1037/a0034098>

- *Volk, M., Cotič, M., Zajc, M. & Istenic Starcic, A. (2017). Tablet-based cross-curricular maths vs. traditional maths classroom practice for higher-order learning outcomes. *Computers & Education*, 114, 1–23. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2017.06.004>
- Wolgemuth, J.R., Hicks, T. & Agosto, V. (2017). Unpacking Assumptions in Research Synthesis: A Critical Construct Synthesis Approach. *Educational Researcher*, 46(3), 131–139. <https://doi.org/10.3102/0013189X17703946>
- *Wood, M. B. & Kalinec, C. A. (2012). Student talk and opportunities for mathematical learning in small group interactions. *International Journal of Educational Research*, 51–52, 109–127. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.008>