Gödel intuitionismista ja matematiikan konstruktiivisista perusteista

Lectio praecursoria 2.11.2020

MARIA HÄMEEN-ANTTILA

Totuus matematiikassa on ajatonta, välttämätöntä, objektiivista ja taattua. Nämä ovat vähintäänkin ominaisuuksia, jotka matematiikkaan yleensä yhdistetään. Toisaalta moni meistä tuntee ainakin yhden matemaattisen paradoksin: Russellin kaikkien joukkojen joukko; pienin positiivinen kokonaisluku joka ei ole määriteltävissä alle 65 kirjaimella; Banach-Tarski-paradoksi, joka muuntaa yhden pallon kahdeksi palloksi, kumpikin kooltaan identtinen alkuperäisen pallon kanssa.

1900-luvun alkuun mennessä matematiikka oli kehittynyt moderniin muotoonsa, jossa erityisesti äärettömyyden käsite nousi keskeiseen asemaan. Siitä nousseet paradoksit saivat monen matemaatikon – tai ainakin osan matemaatikoista – ajattelemaan, ettemme voi jättää uskon varaan sitä, että matematiikkamme ei tule johtamaan viattomien paradoksien lisäksi todellisiin ristiriitoihin. Heidän mukaansa matematiikka olisi formalisoitava, oikeutettava tai kenties jopa uudelleenrakennettava tavalla, joka tuo varmuuden sen ristiriidattomuudesta.

David Hilbert uskoi, että koko matematiikka tulisi formalisoida ja redusoida sen reaaliseen ja episteemisesti vastuulliseen osaan, jota Hilbert kutsui *finitismiksi*. Finitismi ei anna tilaa hallitsemattomille äärettömyyksille, kuten reaaliluvut tai mitkä tahansa muut ylinumeroituvat joukot. Meille jää jäljelle aritmetiikka – tarkalleen ottaen aritmetiikan primitiivis-rekursiivinen *fragmentti* – jonka on riitettävä koko matematiikan ristiriidattomuuden todistamiseen.

Intuitionismi sen sijaan sukeltaa syvälle ihmiskokemuksen valtamereen – ei vain oikeuttaakseen matematiikkaa vaan uudelleenrakentaakseen sen. Suuntauksen isä on Luitzen Egbertus Jan Brouwer, joka tunnetaan tavallisesti vain nimikirjaimillaan, L.E.J. Hänen mukaansa matematiikka ei ole formaali tai looginen tiede vaan pohjimmiltaan mentaalinen rakennelma. Vaikka ihmisen episteeminen kapasiteetti rajoittaa tätä rakennelmaa, ei se ole luonteeltaan mekaaninen vaan vapaa ja luova. Äärettömyydet, kuten reaaliluvut, ovat osa Luovan Subjektin[1] luomusta. Emme voi ”nähdä” niitä täydellisellä tarkkuudella, mutta emme myöskään tarvitse täydellistä tarkkuutta luonnollisen luvun käsitteen *ymmärtämiseen,* ja siten meidän ei ole rajoitettava matematiikkaa aritmeettiseen ajatteluun. Brouwerin ymmärrys konstruktiivisen matematiikan alasta on täten laajempi kuin Hilbertin, mutta hänen ohjelmansa on radikaalimpi, koska se ei pyri vain matematiikan oikeutukseen reduktion avulla vaan matematiikan täyteen rekonstruktioon.

Kurt Gödel vaikutti sekä Hilbertin ohjelman että Brouwerin oppilaan Arend Heytingin kehittämän intuitionistisen logiikan kehitykseen. Gödelin aikaisin kiinnostuksenkohde olivat intuitionistisen logiikan puhtaan formaalit piirteet, mutta 1930-luvulla ja 1940-luvun alussa hän luennoi kolmesti matematiikan konstruktiivisista perusteista. Näitä kolmea luentoa, jotka julkaistiin postuumisti vuonna 1995, pidettiin aluksi yllättävinä ottaen huomioon, että Gödelin platonistinen näkökulma matematiikanfilosofiaan tunnettiin laajalti. Platonismia ja konstruktivismia pidetään tavallisesti toistensa vastakohtina.

---

[1] Brouwerin käyttämä hollanninkielinen ilmaus on *scheppend*, ei *creatief*. Ensimmäisellä sanalla on konkreettisempi merkitys, joka viittaa rakentamiseen tai luomiseen. Suomessa ei ole täysin vastaavaa erottelua, mutta ruotsin sanat *skapande*/*kreativ* kantavat samankaltaisia konnotaatioita.

Gödelin varhaiset luennot ovat suhteellisen formaaleja, ja ne jättävät auki kysymyksiä Gödelin tarkoitusperistä ja motivaatiosta syventyä juuri konstruktivistisiin suuntauksiin. Ongelma ei kuitenkaan ole lähdemateriaalin puute. Gödelin *Nachlass* sisältää kymmeniä tuhansia sivuja muistiinpanoja, joten voisimme paremminkin sanoa ongelman olevan materiaalin valtava määrä! Suurempi haaste on se, että Gödel kirjoitti suurimman osan muistiinpanoistaan nk. Gabelsberger-pikakirjoituksella. Pikakirjoitusjärjestelmän oppiminen ei vastaa esimerkiksi kyrillisten aakkosten muuttamista latinalaisiksi aakkosiksi. Pikakirjoituksen, jonka muoto on foneettinen ja lyhennetty – puhumattakaan sadoista *Siegeleistä*, erikoismerkeistä, joilla kirjoitetaan yleisimmin esiintyvä sanoja – oppiminen muistuttaa paremmin japanin opiskelua. Sen lisäksi, että japanin oppija joutuu muistamaan pari tusinaa *hiraganaa*, on hänen osattava tuhansia *kanjeja* voidakseen lukea edes päivän lehden.

Tästä haasteesta huolimatta muutamat tutkijat ovat omistaneet satoja ja tuhansia tunteja Gödelin pikakirjoitusmuistiinpanojen transkribointiin ja tulkintaan. Kesällä 2017 päätin opetella lukemaan Gabelsberger-kirjoitusta voidakseni osallistua tähän hankkeeseen. Järjestelmän oppiminen vei aikaa, mutta vähitellen huomasin kykeneväni lukemaan Gödelin matemaattisia muistiinpanoja tyydyttävällä nopeudella ja tarkkuudella.

Väitöskirjassani tutkin kokoelmaa erilaisia materiaaleja 1930-luvun alusta 1940-luvun alkuun rakentaakseni selkeämmän kuvan ja rikkaamman narratiivin tuntemamme kolmen luennon ympärille. Kysymys, johon halusin vastata, oli: miten Gödelin aikaiset näkemykset intuitionismista ja konstruktiivisista perusteista kehittyivät vuosikymmenen aikana, ja mitkä olivat hänen syynsä tutkia tarkkaan juuri näitä kysymyksiä?

Erittelen Gödelin tutkimuksissa kolme tai kenties kolme ja puoli vaihetta. Gödelin aikaiset, filosofisempia luentoja edeltävät tulokset olivat puhtaan loogisia. Ne kehittyivät vuosien 1931-1932 aikana ja esitettiin Wienissä Hans Hahnin logiikan seminaarissa ja Karl Mengerin matemaattisessa kollokviossa. Gödelin lähestymistavalle tyypillistä on, että se rajautuu klassisen logiikan näkökulmaan. Esimerkiksi hänen nk. negatiivinen tulkintansa intuitionistiselle aritmetiikalle osoittaa, että klassisen ja intuitionistisen aritmetiikan välillä on käännös, joka säilyttää teoreemat – joskaan ei merkitystä, mutta tämän kysymyksen Gödel siirsi vielä hetkeksi sivuun.

Sekä Mengerin että Hahnin vaikutus on selkeästi näkyvissä Gödelin aikaisissa töissä. Hahn ei ollut vaikuttunut Brouwerin ja Heytingin ajatuksesta asettaa intuition ei-eksakti ja "subjektiivinen" käsite matematiikan keskiöön. Menger kritisoi Brouweria dogmaattisesta näkemyksestä, jonka mukaan juuri hänen konstruktiivinen matematiikkansa on todellista ja oikeaa. Mengerin mukaan on olemassa erilaisia enemmän tai vähemmän konstruktiivisia totuuskäsitteitä, jotka eksplisiittisiksi tekemällä voimme löytää enemmän tai vähemmän konstruktiivisia järjestelmiä, joita voimme vertailla ja soveltaa eri tarkoituksiin. Samassa hengessä Gödelin negatiivinen tulkinta osoittaa, että klassisilla käsitteillä on olemassa intuitionistinen tulkinta, olkoonkin, että se on hänen omien sanojensa mukaan "jokseenkin epätyypillinen" (*etwas abweichende*). Sanokaamme esimerkiksi, että olemme päätelleet eksistentiaalisen lauseen: $\exists x P(x)$ (P atomilause).Tällöin Gödelin tulkinnan nojalla voimme intuitionistisesti päätellä lauseen $\neg\forall x \neg P(x)$. Gödel tekee johtopäätöksen: "Näyttää siltä, että intuitionistisen kritiikin myötä emme menetä yhtään mitään [klassisesta logiikasta], vaan päinvastoin voimme ymmärtää tilanteen niin, että intuitionismissa päädytään ainoastaan tiettyihin [klassisten käsitteiden] uudelleentulkintoihin."[2]

Tätä loogista vaihetta seuraavat Gödelin luennot konstruktiivisista perusteista vuosina 1933, 1938 ja 1941. Joulukuun 1933 luennossa "The present situation in the foundations of mathematics" (Gödel 1933) Gödel julistaa, että sisällöllisesti tulkittuna klassinen matematiikka johtaa kaikenlaisiin paradokseihin ja

[2] "Daraus hervorgeht, dass durch die intuitionistische Kritik gar nichts vom klassischen Aussagenkalkül verloren geht, sondern man im Gegenteil die Sache so auffasst, dass im Intuitionismus nur gewisse Uminterpretationen stattfinden." Lainaus Gödelin muistiinpanoista Hahn-seminaaria varten (Hämeen-Anttila 2020, 52).

vaatii tämän vuoksi ristiriidattomuustodistuksen, jossa käytettävät metodit ovat niin konstruktiivisia kuin mahdollista. Epätäydellisyysteoreemat olivat osoittaneet, että Hilbertin alkuperäinen finitismi ei kykene edes aritmetiikan ristiriidattomuuden todistamiseen. Gödel pyrkii löytämään seuraavaksi parhaan vaihtoehdon: sellaisen finitismin laajennuksen, joka kykenee.

Kuten Menger myös Gödel uskoo konstruktiivisten järjestelmien *hierarkiaan*, jossa jokainen järjestelmä on seuraajaansa konstruktiviisempi. Hierarkian pohjana ja konstruktiivisten järjestelmien ideaalina hän pitää Hilbertin finitismiä. Finitismi täyttää Gödelin ehdot "tiukasti konstruktiiviselle" järjestelmälle: (i) kaikki peruselementit ovat konkreettisia tai reaalisia, (ii) kaikki predikaatit ovat ratkeavia ja kaikki funktiot laskettavia ja (iii) sekä eksistentiaaliset lauseet $\exists x A(x)$ että negatiiviset universaalilauseet $\neg\forall x A(x)$ saavat instanssin, $A(c)$ tai vastaavasti $\neg A(c)$ jollekin vakiotermille c.

Gödel tekee selväksi, että intuitionistinen aritmetiikka ei ole tiukasti konstruktiivinen järjestelmä. Tarkastellaan hetki sen eksistentiaalisia ja universaaleja lauseita. Intuitionistisesti eksistenssiväite $\exists x P(x)$ tulkitaan väitteeksi, että olemme löytäneet jonkin c siten, että $P(c)$ pätee. Negatoitu universaaliväite $\neg\forall x P(x)$ sen sijaan väittää, että on ristiriitaista, että $P(x)$ pätee mille tahansa x. Tämä on edellistä heikompi väite: tiedämme, että kaikki eivät voi olla P mutta emme välttämättä ole löytäneet instanssia c siten, että $\neg P(\mathrm{c})$. (Esimerkiksi luonnollisia lukuja on ääretön määrä: emme voi vain käydä niitä yksi kerrallaan läpi!)

Gödel ei liiemmin piittaa tästä erosta. Kuten Hilbert ja Hermann Weyl – sanottakoon tässä vaiheessa, että Gödel ei itse lukenut Brouweria ennen 40-lukua – Gödel päätyy yksinkertaisesti samaistamaan eksistenssiväitteet ja negatoidut universaaliväitteet. Tämä käy järkeen bivalenssin periaatteen hyväksyvässä klassisessa logiikassa, jossa jokainen väite joko on tai ei ole tosi, mutta ei episteemisesti suuntautuneessa intuitionistisessa logiikassa.

Miksi sitten syyttäisimme appelsiineja siitä, etteivät ne ole omenoita? Gödel uskoo, että tässä tapauksessa *voimme* verrata kahta logiikkaa keskenään, nimittäin käyttäen negatiivista tulkintaa. Tulkinta osoittaa erityisesti, että jokaiseen klassiseen eksistenssiväitteeseen voidaan liittää intuitionistinen negatoitu universaaliväite siten, että ensimmäinen on teoreema jos ja vain jos toinenkin on. Tämä ei kuitenkaan itsessään voi olla argumentti intuitionistisen logiikan konstruktiivisuutta vastaan. Klassisesta näkökulmasta nämä kaksi väitettä sanovat saman asian, mutta intuitionistisesta näkökulmasta, kuten juuri selitin, niillä on eri merkitys. Gödel kohtaa tämän vasta-argumentin ilmoittamalla, että meillä on malli (*man hat ein Modell*), ja se riittää. Palaan tähän huomautukseen aivan kohta.

Toinen kriittinen argumentti intuitionismia vastaan keskittyy intuitionistisen todistuksen tai rakennelman (holl. *gebouw*) käsitteeseen. Gödelin mukaan tämä käsite on epätarkka. Se ei ole konkreettinen tai itsestäänselvä – tämä on yksi merkitys ”epätarkalle” – muttei myöskään riippuvainen mistään formaalista järjestelmästä.

Gödel palaa samaan aiheeseen vuonna 1938 Wienissä Edgar Zilselin järjestämässä kokoontumisessa. ”Zilsel-luennossa” (Gödel 1938) Gödel toistaa tiukan konstruktiivisuuden ehdot ja intuitionismin kritiikin. Tällä kertaa hän esittää myös positiivisen teesin: Hilbertin finitismi on laajennettavissa tiukan konstruktiivisella tavalla. Tämä laajennus perustuisi funktionaalehin – funktioihin, joiden määrittely- ja arvojoukko voivat koostua funktioista – ja sen avulla ainakin aritmetiikan ristiriidattomuuden todistamisen pitäisi olla mahdollista. Gödel ei kuitenkaan anna enempää yksityiskohtia siitä, miten funktionaalijärjestelmän pitäisi rakentua.

Funktionaalijärjestelmän kokonainen esitys löytyy vuonna 1941 Yalessa pidetystä luennosta ”In what sense is intuitionistic logic constructive?” (Gödel 1941). Jo otsikko vihjaa muutokseen Gödelin lähestymistavassa ja käännökseen poispäin Hilbertin ohjelmasta, joka oli mainitsemani toisen vaiheen keskeinen konteksti. Gödel puhuu edelleen ”tiukan konstruktivismin” ehdoista, mutta konkreettisuuden tai reaalisuuden kriteeri – tyypillinen finitistinen piirre – on nyt pudotettu niiden joukosta. Funktionaaleille perustuva tiukan konstruktiivinen järjestelmä ei myöskään ole ensisijaisesti luotu ristiriidattomuustodistusta varten. Sen tarkoitus sen sijaan on vastata otsikon kysymykseen: se on intuitionistisen aritmetiikan tulkinta ja samalla sen konstruktiivisuuden todistus.

Miksi meidän pitäisi ylipäätään epäillä intuitionistisen logiikan konstruktiivisuutta? Julkaisemattomat muistiinpanot Princetonissa vuoden 1941 kevätlukukaudella pidetystä luentosarjasta antavat tarkemman kuvan Gödelin argumentista. Ensinnäkin Gödel antaa uuden määritelmän konstruktiivisuudelle. Hänen mukaansa järjestelmä on konstruktiivinen, jos sillä on eksistenssiominaisuus: jokainen todistuva eksistenssilause $\exists x A(x)$ on instantitoitavissa. Mainitsemani negatiivinen tulkinta voidaan nähdä intuitionistisen aritmetiikan *ei-konstruktiivisena* tulkintana. Mutta voimmeko todistaa, ettei se ole *korrekti* tulkinta? Voimme osoittaa tämän viittaamalla intuitionismin tarkoitettuun tulkintaan esittämällä tämän tulkinnan ja osoittamalla, että se ei selvästikään ole sama tulkinta. Tämä tarkoituksenmukainen tulkinta, Gödel kuitenkin huomauttaa, viittaa ”todistuksen” tai ”rakennelman” epätarkkaan käsitteeseen, ja siten ei senkään konstruktiivisuus ole itsestäänselvää.

Funktionaalijärjestelmää, jota Gödel kutsuu nimellä Σ, käytetään uudelleentulkitsemaan intuitionistisen logiikan operaattorit käyttäen funktionaaleja. Koska Σ-järjestelmässä määritelmän mukaisesti ainoa tapa eksistenssiväitteen todistukseen on instanssin todistus, se on triviaalisti konstruktiivinen Gödelin oman määritelmän mukaan. Onko järjestelmä kuitenkaan ”tiukasti konstruktiivinen”, kuten Gödel väittää?

Keskeinen ongelma koskee funktionaalien laskettavuutta. Funktioiden ajatteleminen joukkoina järjestettyjä pareja, jotka koostuvat argumenteista ja arvoista, auttaa saamaan paremman kuvan ongelmasta. Funktiota f kutsutaan *laskettavaksi,* jos on olemassa äärellinen algoritmi, joka liittää jokaiseen argumenttiin x jonkin arvon y. Toisen kertaluvun funktionaali voisi näyttää esimerkiksi tältä: laittakaamme jokaisen arvon y paikalle uusi funktio f_1 eli joukko argumentteja ja arvoja. Voimme tämän jälkeen toistaa prosessin tämän uuden funktion arvoilla saadaksemme aikaan kolmannen kertaluvun funktionaalin ja niin edelleen. Gödelin tulkinta vaatii kaikki äärellisen kertaluvun funktionaalit.

On selkeää, että ensimmäisen kertaluvun (primitiivis-rekursiiviset) funktiot ovat laskettavia, mutta voimmeko sanoa samaa näistä sisäkkäisistä järjestettyjen parien joukoista?

$$f = \{\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle, \dots, \langle x_n, y_n\rangle, \dots\}$$
$$\updownarrow$$
$$f_1 = \{\langle x_{1,1}, y_{1,1}\rangle, \langle x_{1,2}, y_{1,2}\rangle, \dots, \langle x_{1,n}, y_{1,n}\rangle, \dots\}$$
$$\updownarrow$$
$$f_{1,1} = \{\langle x_{1,1,1}, y_{1,1,1}\rangle, \langle x_{1,1,2}, y_{1,1,2}\rangle, \dots, \langle x_{1,1,n}, y_{1,1,n}\rangle, \dots\}$$
$$\updownarrow$$
$$\vdots$$

Princeton-luennoissa Gödel huomauttaa, että on olemassa useita mahdollisia laskettavuustodistuksia. Varhaisin – ja ainoa – löytämäni todistus löytyy muistikirjasarjasta nimeltä *Resultate Grundlagen* päiväyksellä 1.1.1941. Gödel kuitenkin muutti mieltään pian tämän todistuksen jälkeen, koska Princeton-luennoissa hän kuvailee samankaltaista todistusta ja kutsuu sitä epätyydyttäväksi. Tätä huomiota seuraavassa yliviivatussa lauseessa Gödel kirjoittaa, että on mahdollista pitää funktionaaleja ilman todistusta primitiivisesti laskettavina. Viimeiseksi hän kirjoittaa, että laskettavuus on mahdollista todistaa konstruktiivisesti käyttämällä transfiniittisiä ordinaaleja ja että hän tulee palaamaan tähän todistukseen pian.

Sitä Gödel ei tee. Toinen, laajempi ja fragmentaarisempi muistiinpanojen sarja *Arbeitshefte* osoittaa kuitenkin, että vuoden 1941 keväällä hän oli lähes täydellisesti keskittynyt intuitionistiseen logiikkaan ja matematiikkaan. Useista yrityksistä huolimatta näyttää siltä, ettei Gödel kyennyt todistamaan laskettavuutta tavalla, johon hän voisi olla tyytyväinen. Muutaman vuoden sisällä matemaattiset muistiinpanot kuivuvat kokoon. Vuoden 1943 aikana Gödelin huomio oli jo täysin keskittynyt filosofiaan.

Tyypillistä Gödelin intuitionismia ja konstruktiivisia perusteita koskeville töille on pyrkimys kohti tarkkuutta: käsitteiden selventämistä matemaattisten tulosten löytämisen välineenä. Vaikka Gödelin muistiinpanoista ei juurikaan löydy tukea Gödelin oletetulle matemaattiselle platonismille, tämä kuvio on tuttu Platonin dialogeista. Päätyäksemme totuuteen on meidän ensin kuorittava pois kaikki harhaanjohtavat ja epätarkat elementit käsitteen ympäriltä päästäksemme selkeään ja täsmälliseen määritelmään – tai toisinaan, kuten laskettavuustodistuksen tapauksessa, *aporiaan*. Muistiinpanoissaan Gödel kirjoitti esimerkiksi Gentzenin ristiriidattomuustodistuksen olevan ihanteellinen, koska todistukseen päädytään keskeisten käsitteiden analyysilla. Vuoden 1941 luennoissa Gödel taas halusi selkeyttää intuitionistisen logiikan operaatioiden määritelmät todistaakseen niiden konstruktiivisuuden.

Gödelin viimeiset muistiinpanot intuitionismista vuosina 1941 ja 1942 näyttävät, että hän oli myös valmis luopumaan klassisesta näkökulmasta ja tarkastelemaan intuitionistista logiikkaa sen omilla ehdoilla järjestelmänä, joka on rikkaampi ja ilmaisuvoimaisempi kuin klassinen logiikka. Hän uskoi myös, että intuitionistiset metodit voisivat johtaa tuloksiin, joita klassinen logiikka ei kykene todistamaan (esimerkiksi valinta-aksiooman ja kontinuumihypoteesin riippumattomuustodistukset).

Vuosien 1931 ja 1942 välillä Gödel onnistui tarkastelemaan monia konstruktiivisen matematiikan ja sen perusteiden aspekteja Hilbertin ohjelmasta intensionaaliseen ja epäformaaliin intuitionistiseen matematiikkaan. Jo aikaisissa töissä ja muistiinpanoissa tunnistamme Gödelin myöhemmän pluralismin ja hänen kiinnostuksensa moniin eri tutkimussuuntiin ja teorioihin, joihin hän syventyi kokeellisella asenteella olettaen teorian todeksi johtaakseen siitä seurauksia. Hän tuntui uskovan, että jokaisella filosofisella näkemyksellä on jotain tarjottavaa, että suurin osa kysymyksistä on kysymisen arvoisia. Väitöskirjani tarkoitus oli tarkastella Gödelin tutkimuksia intuitionismin ja finitismin parissa. Toivon, että olen onnistunut piirtämään siinä tarkemman kuvan yksistä Gödelin monista kasvoista.

Helsingin yliopisto

Kirjallisuus

Gödel, Kurt (1933) ”The present situation in the foundations of mathematics”, painettu teoksessa Gödel 1995, 45–53.

Gödel, Kurt (1938) ”Vortrag bei Zilsel”, painettu teoksessa Gödel 1995, 86–113.

Gödel, Kurt (1941) ”In what sense is intuitionistic logic constructive?”, painettu teoksessa Gödel 1995, 189–200).

Gödel, Kurt (1995) *Collected Works. Vol. III. Unpublished Essays and Lectures*, toim., S. Feferman, J. W. Dawson, W. Goldfarb, C. Parsons, and R. M. Solovay. New York: Oxford University Press.

Hämeen-Anttila, Maria (2020) *Gödel on intuitionism and constructive foundations of mathematics*. Väitöskirja, luettavissa osoitteessa <http://urn.fi/URN:ISBN:978-951-51-5923-6>.