CANTOR, SAARNIO JA ABSOLUUTTINEN ÄÄRETTÖMYYS

Jari Palomäki

"Ääretön on filosofian, uskonnon ja matematiikan yhteinen käsite ja yhteinen ongelma."

Uuno Saarnio: *Mitä tiedämme äärettömästä?*, 1969, 1.

Kirjoittamassaan johdannossa Uuno Saarnion (1896–1977) *Das System und Darstellung der transfiniten Ordnungszahlen mit hilfe der Höheren Rechenoperationen* –teokseen vuonna 1958, saksalainen matemaatikko ja loogikko Heinrich Behmann (1891–1970) totesi Saarnion jatkavan Georg Cantorin (1845–1918) alulle panemaa joukko-opin tutkimusta Cantorin harjoittamassa perinteisessä muodossa.[1] Trigonometristen sarjojen yksikäsitteisyyden tutkimus johti Cantorin tarkastelemaan äärettömiä jonoja ja luokittelemaan näin muodostettuja joukkoja. Näin Cantor mahdollisti joukko-opin syntymisen. Cantor uskoi löytäneensä äärellisen ja Absoluuttisen äärettömän lisäksi myös kolmannen äärettömyyden kategorian, jota hän kutsui transfiniittiseksi. Näin Cantor onnistui tuomaan joukko-oppinsa avulla aktuaalisen äärettömyyden myös matemaattisen tutkimuksen piiriin. Cantorin alkuperäinen ajatus Absoluuttisesta äärettömästä, joka on inhimillisen ymmärryksen tuolla puolen, oli ensisijassa teologinen ja se esitti tärkeää osaa Cantorille koko hänen elämänsä ajan.[2]

Absoluuttista ääretöntä voidaan kuitenkin lähestyä ja tarkastella matematiikan avulla. Sen matemaattisen vastineen muodostivat kaikkien kardinaali- ja järjestyslukujen joukot, jotka kaikki-joukkoina kuitenkin muodostuivat paradokseiksi. Näin kaikki-joukko ei muodosta joukkoa eikä se siten ole joukko. Cantorin ja Saarnion suhtautumisessa kaikkien kardinaali- ja järjestyslukujen joukkoihin liittyviin paradokseihin löytyy yhtäläisyyksiä. Molemmat

[1] Cantorin tavoin Saarnionkin harjoittama joukko-opin tutkimus ei ollut aksiomaattista. Tällaista Cantorin harjoittamaa ei-aksiomaattista joukko-oppia John von Neumann (1903-1957) kutsui naiiviksi joukko-opiksi, Moore 1982, 260.

[2] Lyhyet kuvaukset Georg Cantorin elämästä ja persoonasta , ks. Cantor, 1932, 452-483, tai Dauben 1979, 271-299. Uuno Saarnion elämästä, filosofiasta ja matematiikasta, ks. Palomäki 2002.

tähdentävät paradoksien olevan ratkaistavissa niin, etteivät ne oikeastaan ole matematiikkaan kuuluvia ongelmia. Lisäksi he tarkastelevat näitä paradokseja lähinnä tietoteoreettisesta näkökulmasta. Toisaalta Cantorilla korostuu myös teologinen tulkinta, kun taas Saarnion tulkinta, joka perustuu erityisesti Immanuel Kantin (1724–1804) tietoteoriaan, on filosofinen.

Seuraavassa esitellään aluksi lyhyesti Georg Cantorin alulle paneman joukko-opin synty ja Cantorin siinä löytämät paradoksit, jotka koskivat kaikkien kardinaali- ja järjestyslukujen "joukkoa", jota Cantor kutsui Absoluuttiseksi äärettömäksi. Tämän jälkeen tarkastellaan Absoluuttista ääretöntä matemaattisesti nykyisissä joukko-opin esityksissä käytetyn reflektioperiaatteen valossa. Seuraavaksi esitetään Absoluuttisen äärettömän matemaattisesta tulkinnasta seuraavat joukko-opin paradoksit sekä niiden matemaattiset ratkaisut. Lopuksi esitetään Cantorin ja Saarnion tietoteoreettiset ratkaisut näihin paradokseihin.

GEORG CANTOR JA JOUKKO-OPIN SYNTY

Ennen Georg Cantorin tutkimuksia 1800-luvun lopulla, filosofiassa, luonnontieteissä ja matematiikassa ei hyväksytty aktuaalisen äärettömyyden käsitettä, vaan ainoastaan Aristoteleen tavoin ymmärretty potentiaalinen äärettömyys.[3] Ajattelijat ja tieteentekijät kuten Galileo Galilei (1564–1642), Baruch Spinoza 1632–1677), Isaac Newton (1642–1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), ja jopa Carl Friedrich Gauss (1777–1855) kielsivät aktuaalisen äärettömyyden olemassaolon. Yhtenä kiellon syistä oli, että aktuaalisen äärettömän käsitteen ajateltiin sisältävän ristiriidan, kuten esimerkiksi Galilein löytämä vaikeus verrata kahden eri äärettömän joukon – luonnollisten lukujen joukon $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$ja neliölukujen joukon $\mathbf{M} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\ n^2, \ldots\}$ – suuruutta keskenään. Neliölukujen joukko $\mathbf{M}$ on luonnollisten lukujen joukon $\mathbf{N}$ aito osajoukko, mutta silti jokaista joukon $\mathbf{M}$ neliölukua vastaa joukon $\mathbf{N}$ luonnollinen luku ja päinvastoin: $1 \leftrightarrow 1, 2 \leftrightarrow 4, 3 \leftrightarrow 9, 4 \leftrightarrow 16, \ldots\ n \leftrightarrow n^2\ \ldots.$ Galilein "paradoksi" on siinä, että joukon $\mathbf{N}$ aito osajoukko $\mathbf{M}$ on yhtä suuri kuin koko joukko. Tällöin Galilein protagonisti Salviati

[3] Merkittävänä poikkeuksena on mainittava Johannes Duns Scotus (1266–1308), joka kritisoi Tuomas Akvinolaisen äärettömän määritelmää virhepäätelmänä. Akvinolaisen määritelmän, *Summa Theologiae* I.7.1, mukaan olio on äärellinen (q), jos se on suhteessa rajoittavaan olioon (p), jolloinka olio on ääretön ($\sim q$), jos sillä ei ole suhdetta rajoittavaan olioon ($\sim p$). Päättely on siten muotoa: $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$ joka ei ole loogisesti pätevä. Scotuksen mukaan olio on äärellinen tai ääretön, koska sillä on joko sisäinen äärellisyyden aste tai ääretön täydellisyys, (Cross 1999, 40). Scotus päättelee Jumalan aktuaalisen äärettömyyden kahdessa vaiheessa seuraavasti: Abstrahoidaan ensin potentiaalisesti ääretön avaruudellinen ulottuvuus aktuaaliseksi kvantitatiiviseksi äärettömäksi. Tämä ääretön on kuitenkin epätäydellinen, koska se on tehty osista ja osat ovat kokonaisuutta pienemmät. Toisena vaiheena siirrytään aktuaalisesta kvantitatiivisesta äärettömästä aktuaaliseen kvalitatiiviseen äärettömään, missä jokainen osa on yhtä suuri kuin kokonaisuus – ja tämä aktuaalinen kvalitatiivinen ääretön on täydellinen eli Jumala, (*ibid.*, 40, 41). Kun Scotus oletti, että jos jokin on ääretön, niin se ei voi olla mitään muuta vähempää, (*ibid.*, 30), niin tämä olettamus ei kuitenkaan päde, sillä Cantor tutkimuksissaan osoitti eri suurten matemaattisten äärettömyyksien olemassaolon. Myöhäisen keskiajan irtautumisesta Aristoteleen perustuvasta ajattelusta, ks. Murdoch 2009.

toteaa, että on pakko päätellä, että neliölukuja on yhtä paljon kuin luonnollisia lukuja. Puhuessaan sitten eripituisten janojen pistejoukkojen vertailusta, hän toteaa niihin liittyvän "paradoksin" toteamalla, että molemmat ovat äärettömiä. Galilei päätteli, että ominaisuuksia “yhtä suuri”, “suurempi” ja “pienempi” ei voida soveltaa äärettömiin, vaan ainoastaan äärellisiin määriin. Näyttäisi siten lähinnä siltä, että Galilei päätyi olettamaan, että on olemassa vain yksi ääretön.[4]

Cantor oli ensimmäinen, joka väitti, että aktuaalinen äärettömyys voi olla matemaattisen tutkimuksen kohteena ja sanoo käsityksellään olevan yhtymäkohtia Nikolaus Cusanuksen filosofian kanssa.[5] Hän sanoi, että ihmisen järki (ratio) voi luoda käsitteelliset välineet sen sisäisen rakenteen tutkimiseen. Cantor uskoi, että syy siihen, ettei aktuaalista äärettömyyttä käytetty matematiikassa, filosofiassa ja teologiassa perustui yleiseen ja kaikkialle levinneeseen harhaluuloon, että äärellisiä ominaisuuksia ei voi omistaa äärettömälle ilman ristiriitoja. Vuoden 1883 artikkelissaan “Grundlagen einer allgemeinem Mannigfaltigkeitslehre” hän käsitteli Aristoteleen ja keskiajan skolastikkojen argumenttia, jonka mukaan jos ääretön sallitaan, niin se mitätöi äärellisen luvun.[6] Esimerkiksi, jos n ja m ovat nollaa suurempia äärellisiä lukuja, niin $n + m > n$ ja $n + m > m$. Sen sijaan, jos m on ääretön, niin olkoon n mikä tahansa äärellinen luku, niin $n + m = m$. Cantor kuitenkin totesi, että on väärin olettaa äärettömien lukujen noudattavan samoja laskulakeja kuin äärelliset luvut. Esimerkiksi, vaikka äärelliset luvut noudattavat kommutatiivilakia $m + n = n + m$, niin transfiniittisille järjestysluvuille se ei päde kuten $1 + \omega = \omega$, mutta $\omega + 1 \neq \omega$.[7]

Vuonna 1887 artikkelissaan “Mitteilung zur Lehre von Transfiniten” Cantor siteeraa Tuomas Akvinolaisen *Summa Theologiae* I, q. 7, a. 4. ja sanoo, että kyseissä kappaleessa esiintyvät kaksi merkittävintä vastaväitettä aktuaalista ääretöntä vastaan, mitä historian kuluessa on koskaan esitetty:

> 1) ... jokaisen moneuden on oltava *jossakin moneuden lajissa, mutta moneuden lajit ovat lukumäärien lajien mukaisia. Mutta mikään lukumäärän laji ei ole*

---

[4] Galilei 1914, 31, 32. Jo keskiajalla aktuaalisen äärettömyyden olemassaoloa vastaan esitettiin erisuurten äärettömyyksien paradoksia seuraavasti: Jos hyväksytään aktuaalinen äärettömyys, niin jotkut äärettömyydet ovat suurempia kuin jotkut toiset, jotka samalla ovat edellisten osia. Kuitenkin on “aksiomaattista”, että kaikki äärettömyydet ovat yhtä suuria. Näin ollen osa ei voi olla pienempi, vaan yhtä suuri kuin kokonaisuus, mikä on absurdia. Tämä käsitys oli yleinen 1200- ja 1300-luvulla ja muun muassa Bonaventura (1221–1274) sisällytti sen kirjoitukseensa, joka käsitteli ikuisen maailman mahdollisuutta, Murdoch 1982, 569, 570.

[5] Cantor 1932, 205. Cantor mainitsee Bernard Bolzanon (1781–1848) postuumisti vuonna 1851 julkaistun teoksen *Paradoxien des Unendlichen, ibid.*, 179. Teoksessaan Bolzano kehittelee joukko-oppia käyttäen muun muassa sanaa ” Menge” ja todistaa induktiolla äärettömän olemassaolon, Bolzano 1851, § 13.

[6] Cantor 1932, 173–175. Cantor analysoi Aristoteleen näkemyksiä äärettömästä ja viittaa erityisesti tämän *Metafysiikan* kirjan XI, lukuun 10, joka sisältää lyhennettynä *Fysiikan* kirjassa III esittämiä tarkasteluja äärettömästä.

[7] Cantor 1932, 177. Äärettömille joukoille ei myöskään päde se äärellisyydessä pätevä laki, jonka mukaan *totum parte majus* eli kokonaisuus on osaansa suurempi, Saarnio 1969, 71. Richard Dedekindin (1831–1916) mukaan ääretön joukko voidaan määritellä lauseella: “Joukko on ääretön, jos sillä on aito osajoukko, jonka alkiot voidaan rinnastaa yksi-yksisesti koko joukon kaikkien alkioiden kanssa,” *ibid.*, 73. Näin määriteltynä saadaan Dedekind-ääretön, joka selittää myös Galilein “paradoksin.” Ääretön voidaan määritellä myös toisin: “Ei-tyhjä joukko A on äärellinen, jos on olemassa positiivinen kokonaisluku n siten, että joukon A alkiot voidaan rinnastaa yksi-yksisesti joukon $\{1,2,3,\ldots,n\}$kanssa; muutoin A on ääretön,” ks. tarkemmin Moore 1982, 22-30.

> *ääretön*, sillä jokainen lukumäärä on moneus jota mittaa yksikkö. Siksi moneus ei voi olla aktuaalisesti ääretön, ei itsessään eikä aksidentaalisesti. 2) Samoin jokainen moneus asioissa on luotu ja kaikki luotu kuuluu *johonkin määrättyyn luojan tarkoitukseen, sillä mikään toimija ei toimi tarkoituksetta*. Siksi on välttämätöntä, että kaikki luotu sisältyy määrättyyn lukumäärään. Siksi on mahdotonta, että ääretön moneus voisi olla aktuaalisesti edes aksidentaalisesti. [8]

Akvinolaisen ensimmäinen kohta näyttää sanovan, että jokaisella joukolla on lukunsa, mutta kaikki luvut ovat äärellisiä. Toinen kohta puolestaan näyttää sanovan, että jokaisella joukolla on oltava määrätty merkitys tai tavoite, mutta jokainen määrätty tavoite on äärellinen. Kirjeessään teologi Konstantin Schlottmannille (1819–1887) 9.4.1887 Cantor sanoi pitävänsä Akvinolaisen esittämiä vastaväitteitä oikeutettuina, mutta vain sillä edellytyksellä, ettei hänen omaa teoriaansa aktuaalisesta äärettömästä, jota hän kutsui transfiniittiseksi, olisi kehitetty.[9]

Cantorin mukaan emme voi tulla toimeen ilman potentiaalista ääretöntä, jota hän kutsui epäaidoksi äärettömäksi (*uneigentlich-unendliches*) ja merkitsi lemniskaatalla ∞. Potentiaalinen ääretön kuitenkin välttämättä edellyttää jo tietyn arvo-alueen kokonaisuutena olemassa olevaksi. Näin ollen jokainen potentiaalisen äärettömän tarkka matemaattinen käyttö edellyttää aktuaalisen äärettömän, jota Cantor kutsui aidoksi äärettömäksi (*eigentlich-unendliches*).[10]

Kehittäessään transfiniittisten lukujen teoriaa Cantorin perusajatuksena oli, että käsitteet “ekvivalentit joukot”, “kardinaaliluku” ja “lueteltavuus” koskevat paitsi äärellisiä joukkoja myös äärettömiä joukkoja.[11] Kun ääretön ajatellaan olevan vastakohtana äärelliselle, Cantor käsittelikin äärettömiä joukkoja analogisesti äärellisten joukkojen kanssa. Näin syntyi Cantorin luoma teoria transfiniittisistä luvuista.

Äärettömistä joukoista yksinkertaisin ja pienin on luonnollisten lukujen joukko $\mathbf{N} = \{1,2,3,\ldots\}$, jonka kardinaliteettia Cantor merkitsi $\aleph_0$:lla.[12] Cantor ajatteli, että **N** on täydellisesti ja kokonaisena annettu eikä epätäydellisesti päättymättömänä lukujonona, jota hän merkitsi ∞:lla. Näin Cantor erotti selkeästi toisistaan potentiaalisen äärettömän ja aktuaalisesti äärettömän joukon. Potentiaalisen äärettömän joukon alkiot voidaan järjestää päättymättömäksi jonoksi,

---

[8] Cantor 1932, 403, 404. Lainaus ja kursivointi Cantorin: ”[1) ... quia omnem multitudinem oportet esse *in aliqua specie* multitudinis. *Species autem multitudinis sunt secundum species numerorum. Nulla autem species numeri est infinita*, quia quilibet numerus est multitudo mensurata per unum. Unde impossibile est esse multitudinem infinitam actu; sive per se, sive per accidens. 2) Item omnis multitudo in rerum natura existens est creata; et omne creatum *sub aliqua certa intentione* creantis comprehenditur, *non enim in vanum agens aliquod operatur*. Unde necesse est quod sub certo numero omnia creata comprehendantur. Impossibile est ergo esse multitudinem infinitam in actu, etiam per accidens.”

[9] Hallett 1984, 22.

[10] Hallett 1984, 25.

[11] Kaksi joukkoa A ja B ovat *ekvivalentit*, jos jokaista joukon A alkiota vastaa yksi-yksisesti joukon B alkio ja päinvastoin, jokaista joukon B alkiota vastaa yksi-yksisesti joukon A alkio. Jos joukot A ja B ovat ekvivalentit, sanotaan niiden olevan *yhtä mahtavat* (Mächtigkeit), toisin sanoen, niillä on sama *kardinaliteetti*. Siten joukon A *kardinaaliluku* on kaikkien joukon A kanssa ekvivalenttien joukkojen yhteinen ominaisuus ja sitä merkitään A. Joukko A on *numeroituva*, jos joukon A alkiot voidaan rinnastaa yksi-yksisesti joko kaikkien luonnollisten lukujen kanssa tai jonkin luonnollista lukua n pienempien luonnollisten lukujen kanssa.

[12] $\aleph$, (alef) on heprean aakkosten ensimmäinen kirjain, Cantor 1932, 293

josta puolestaan saadaan mielivaltaisen suuria äärellisiä osajoukkoja, muttei koskaan koko joukkoa, jolloin se tietyssä mielessä on aina äärellinen. Aktuaalisesti ääretön joukko puolestaan on täydellisesti annettu kokonaisuus. Näin ollen ∞ ei koskaan saavuta $\aleph_0$:aa.

Cantor osoitti, että luonnollisten lukujen joukon $\mathbf{N}$ ja rationaalilukujen joukon $\mathbf{Q}$ välillä vallitsee yksi-yksinen vastaavuus eli bijektio, mutta $\mathbf{N}$:n ja reaalilukujen joukon $\mathbf{R}$ välillä tällainen ei ole, ts. $|\mathbf{N}| = |\mathbf{Q}| = \aleph_0$, mutta $|\mathbf{R}| > \aleph_0$.[13] Hän oletti reaalilukujen joukon $\mathbf{R}$ kardinaaliteetin olevan $\aleph_0$:aa seuraavaksi suurempi kardinaliteetti ja merkitsi sitä $\aleph_1$:llä. Cantor kykeni osoittamaa myös, että $|\mathbf{R}| = 2^{\aleph_0}$, jolloin Cantorin oletuksen mukaan saadaan yhtälö: $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, jota kutsutaan Cantorin kontinuumihypoteesiksi. Lukuisista yrityksistään huolimatta Cantor ei kyennyt todistamaan hypoteesia oikeaksi – eikä myöskään vääräksi.[14]

Transfiniittisten kardinaalilukujen lisäksi on olemassa myös transfiniittisiä järjestyslukuja.[15] Äärellisillä joukoilla järjestysluvut ja kardinaaliluvut ovat yksi-yksisesti vastaavia toistensa kanssa. Sen sijaan äärettömyydessä saman kardinaaliluvun omaavilla tietyillä tavoilla järjestetyillä joukoilla voivat olla erilaiset transfiniittiset järjestysluvut. Luonnollisten lukujen tavanomaisella suuruusjärjestyksellä järjestettyä joukkoa Cantor merkitsi ω:lla, toisin sanoen, $\omega = 1,2,3,4,\ldots$. Jos nyt järjestetään ensin kaikki parittomat luvut ja niiden jälkeen kaikki parilliset luvut eli $1, 3, 5, 7, \ldots\ 2, 4, 6, 8, \ldots$, niin saadaan transfiniittinen järjestysluku $\omega + \omega = \omega 2$. Kaikkien parillisten luonnollisten lukujen joukon kardinaliteetti on $|\{2n\}| = \aleph_0$ ja kaikkien parittomien luonnol-

[13] $\mathbf{N}$ ja $\mathbf{Q}$ ovat numeroitavasti äärettömiä, kun taas $\mathbf{R}$ on ylinumeroituvasti ääretön.

[14] Monet ovat siitä lähtien pyrkineet todistamaan kontinuumihypoteesin, mutta toistaiseksi siinä epäonnistuneet. Vuonna 1939 Kurt Gödel (1906-1978) osoitti, että kontinuumihypoteesi voidaan lisätä aksiomaattiseen joukko-oppin ilman ristiriitaa, jolloin kontinuumihypoteesi olisi tosi ja sitä ei voisi kumota, kun taas vuonna 1963 Paul J. Cohen (1934-2007) osoitti, että kontinuumihypoteesin negaatio voidaan lisätä aksiomaattiseen joukko-oppiin ilman ristiriitaa, jolloin kontinuumihypoteesi voisi olla epätosi ja se voitaisiin kumota. Näin ollen kontinuumihypoteesi on joukko-opin aksiomeista riippumaton. Myös Saarnio on pyrkinyt todistamaan kontinuumihypoteesia, ks. Saarnio 1968, 1969, 458–485. Saarnion "konstruktiivinen" todistus ei perustu aksiomaattiseen joukko-oppiin, eikä se ole saanut myöskään tiedeyhteisön hyväksyntää. Toistaiseksi ei ole selvää, mitä oletuksia hänen todistukseensa tarkemmin sisältyy ja onko todistuksessa virhe ja jos, niin mikä ja missä. Systemaattinen tutkimus Saarnion todistuksesta on siis vielä tekemättä. Matemaatikkojen suhtautuminen kontinuumihypoteesiin ilmentää sen perustavaa filosofista luonnetta. Intuitionistit ovat ontologiselta kannaltaan konseptualisteja ja heidän mielestään kysymys on mieletön. Formalistit ovat ontologiselta kannaltaan nominalisteja ja heidän mielestään yhdessä systeemissä se on tosi ja toisessa epätosi riippuen valituista aksiomeista. Realistit ovat ontologiselta kannaltaan platonisteja ja heidän mielestään kontinuumihypoteesi on tosi tai epätosi aksiomeista ja tiedostammekin riippumatta. Viime aikana erityisesti matemaatikko William Hugh Woodin (1955–) on argumentoinut ensin sen puolesta, että kontinuumihypoteesi on mielekäs, mutta se olisi epätosi. Toisin sanoen, kontinuumin kardinaliteetti ei olisi $\aleph_1$, vaan se oli $\aleph_2$, ks. Woodin 2001. Sittemmin Woodin on muuttanut mieltään ja hän on alkanut argumentoimaan sen puolesta, että kontinuumihypoteesi voisikin olla tosi, ks. Rittberg 2015.

[15] Joukko on *järjestetty*, jos jonkin säännön tai relaation avulla voidaan sanoa mistä tahansa joukon kahdesta alkiosta, kumpi on toisen edellä ja kumpi jäljessä. Järjestetty joukko on *hyvinjärjestetty*, jos sillä ja sen jokaisella ei-tyhjällä osajoukolla on ensimmäinen alkio. Hyvinjärjestetyn joukon *järjestystyyppi* on puolestaan samanlaisten hyvinjärjestettyjen joukkojen yhteinen ominaisuus. *Järjestysluku on* hyvinjärjestetyn joukon järjestystyyppi. Järjestetyt joukot ovat *isomorfiset*, jos niiden alkiot vastaavat yksi-yksisesti toisiaan ja niiden järjestys on sama siten, että alkioiden välinen järjestys säilyy tässä vastaavuudessa.

listen lukujen joukon kardinaliteetti on $|\{2n+1\}| = \aleph_0$, jolloin helposti nähdään, että $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. Sen sijaan $\omega 2 \neq \omega$.[16]

Cantor osoitti myös, että on olemassa kasvava, yhä suurempien transfiniittisten kardinaalilukujen jono $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_3, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega-1}, \ldots, \aleph_\nu, \ldots$.[17] Vastaavasti, on olemassa kasvava, yhä suurempien transfiniittisten järjestyslukujen jono[18]

$1,2,3,\ldots,\omega,\omega+1,\ldots,$
$\omega 2, \omega 2+1,\ldots \omega \cdot \omega = \omega^2, \omega^2+1,\ldots,$
$\omega^3, \omega^3+1,\ldots,\omega^\omega,\omega^\omega+1,\ldots,$
$\omega_1,\omega_1+1,\ldots,\omega_\mu,\ldots$

Kaikki transfiniittiset kardinaaliluvut samoin kuin kaikki transfiniittiset järjestysluvut muodostavat Cantorin mukaan Absoluuttisen äärettömän, jonka tutkiminen ei enää kuulu matematiikkaan vaan teologiaan. Toisin sanoen, Cantorin mukaan Absoluuttinen ääretön on yhtä kuin Jumala.

Näin Georg Cantorin äärellisen ja äärettömien rationaaliset erottelut voidaan esittää seuraavasti:

1. Finiittiset eli äärelliset luvut: $1,2,3,\ldots,n$
2. Potentiaalinen ääretön: ∞
3. Transfiniittiset kardinaaliluvut: $\aleph$
4. Transfiniittiset järjestysluvut: ω
5. Absoluuttinen äärettömyys: Jumala

Tämän erilaisten äärettömyyksien erojen perusteella voidaan todeta, että Aristoteles erotti toisistaan (1.) äärellisen, (2.) potentiaalisen äärettömän, sekä aktuaalisen äärettömän, jonka olemassaolon hän kuitenkin kielsi. Cantor sen sijaan osoitti, että myös aktuaalinen ääretön on olemassa,[19] joka puolestaan jakaantui kahteen osaan, nimittäin kasvavaan aktuaaliseen äärettömyyteen eli transfiniittiseen (3. ja 4.), sekä enää kasvamattomaan Absoluuttiseen aktuaaliseen äärettömään (5.).[20]

ABSOLUUTTINEN ÄÄRETTÖMYYS

Platon (427–347 eKr.) ajatteli Absoluutin äärelliseksi, kun taas teologit ja metafyysikot Plotinoksesta (204–270) alkaen ovat olettaneet Absoluutin äärettömäksi. Mitä sana ”Absoluttinen” tarkoittaa, riippuu luonnollisesti kyseessä olevasta filosofista. Tässä yhteydessä Absoluutilla tarkoitetaan Absoluuttista ääretöntä, joka puolestaan tarkoittaa jotakin sanoin kuvaamatonta olemusta, Jumalaa,[21] hallitsevaa universaalia Mieltä tai – yksinkertaisesti – kaikkien

[16] $\omega 2 = \omega + \omega \neq \omega = 2\omega$ eli ω kaksi kertaa on yhtä kuin $\omega + \omega$, joka on eri suuri kuin ω, joka puolestaan on yhtä suuri kuin kaksi ω kertaa. Esimerkiksi, 1, 3, 5, 7, ... 2, 4, 6, 8, ... $= \omega 2 = \omega + \omega \neq$ 1, 2, 3, 4, ... $= \omega =$ 2+2+2+2+ ... $= 2\omega$.

[17] Cantor 1932, 296.

[18] Transfiniittisten järjestyslukujen kasvavan, yhä suurempien järjestyslukujen systemaattinen esitys on Saarnion *Das System und die Darstellung der Transfiniten Ordnungszahlen mit Hilfe der Höheren Rechenoperationen* vuodelta 1958. Pääosin sama suomeksi esitettynä, Saarnio 1969, 217–449, lukuun ottamatta viimeistä IV lukua, jossa esitetään myös ylinumeroituvien järjestyslukujen laskulait. Näin järjestyslukujen laskulakien systemaattisella esityksellä Saarnion jatkaa Cantorin alulle panemaa transfiniittisten järjestyslukujen laskulakien tutkimusta.

[19] Duns Scotusta kuitenkaan unohtamatta.

[20] Cantor 1932, 401, 405.

[21] Koska Absoluutilla ja Absoluuttisella äärettömällä tarkoitetaan tässä likimain samaa kuin Jumala eikä esimerkiksi Jumalan ominaisuutta, siksi kirjoitetaan sana: ”Absoluutti” isolla A-kirjaimella

mahdollisten ajatusten luokkaa.[22] Ilmaus "kaikkien mahdollisten ajatusten luokka" tekee mahdolliseksi tarkastella Absoluuttia matemaattisen käsitteistön avulla.

Yksi Georg Cantorin antama joukon kuvaus kuuluu: "Joukko on mikä tahansa monta, joka voidaan ajatella yhtenä."[23] Näin joukko voidaan ajatella mahdollisen ajatuksen muotona. Toisin sanoen, mitä voidaan ajatella, niin siitä voidaan muodostaa joukko – ja päinvastoin.[24] Joukko-opissa Absoluuttia vastaa kaikkien järjestyslukujen luokka, jota merkitään Ω:lla. Joukko-opissa sitä käsitellään reflektioperiaatteella, joka voidaan yleisemmin esittää seuraavasti:

Reflektioperiaate: Jos P on mikä tahansa yksinkertaisesti kuvattavissa oleva Absoluutin ominaisuus, niin silloin on oltava olemassa jokin Absoluuttia pienempi, jolla myös on ominaisuus P. [25]

Reflektioperiaatteen taustalla on seuraava ajatus: jos millään Absoluuttia pienemmällä oliolla ei olisi ominaisuutta P, niin silloin Absoluuttia voitaisiin kuvata sinä ainoana oliona, jolla yksin olisi ominaisuus P. Tämä olisi kuitenkin vastoin sitä periaatetta, että Absoluutti ylittäisi kaikki sen inhimilliset kuvaukset. Teologisin termein tätä voitaisiin kuvata Gregorios Nyssalaisen sanoin: "Ei ole väliä sillä, miten pitkälle mielemme pyrkiikään keskittyessään kohti Jumalaan, sillä se ei saavuta sitä, mitä Hän on, vaan sitä mitä on Hänen alapuolellaan."[26]

Absoluutti on käsittämätön ja sanoin kuvaamaton. Silti, Robert John Russellin (1946–) mukaan, voimme eräässä mielessä tietää Absoluu-

[22] Cantor 1932, 443: "Wie man sich leicht überzeugt, ist z. B. der „Inbegriff alles Denkbaren" eine solche Vielheit." Joukko-opissa tehdään erottelu joukon ja luokan välillä siten, että kaikki joukot ovat luokkia, mutta kaikki luokat eivät ole joukkoja. Luokat, jotka eivät ole joukkoja, ovat liian suuria muodostaakseen joukkoja. Näitä luokkia kutsutaan *aidoiksi luokiksi*. Tämä erottelu mahdollistaa liian suurten ja ristiriitaisten joukkojen muodostamisen sijaan käsitellä niitä aitoina luokkina. Esimerkiksi kaikkien järjestyslukujen aitoa luokkaa merkitään usein von Neumann-Bernays-Gödel –joukko-opissa, NBG, symbolilla $\mathbf{ON} = df\{x \,|\, x = \text{järjestysluku}\}$ ja kaikkien joukkojen joukkoa symbolilla $\mathbf{V} = df\{x \,|\, x = \text{joukko}\}$.

[23] Cantor 1932, 204. "Unter einer „Mannigfaltigkeit" oder „Menge" verstehe ich nämlich allgemein jedes Viele, welches sich als Eines denken läßt."

[24] Rucker, 1982, 41. Tätä Cantorin joukon kuvausta voi kutsua tietoteoreettiseksi näkemykseksi matematiikan joukkokäsitteestä. Myös Saarnio lähestyy joukko-oppia tietoteoreettisesti sanomalla joukon käsitteestä, että "[s]e on ihmishengen kyky, jolla ihminen käsittää tietyt, toisistaan erilliset oliot yhdeksi kokonaisuudeksi, näiden olioiden *joukoksi*," Saarnio 1969, 42. Kuvaavaa Saarnion tietoteoreettiselle lähestymistavalle on niin ikään matemaattista joukko-oppia sisältävän ja äärettömiä joukkoja käsittelevän teoksen nimi: *Mitä tiedämme äärettömästä?*

[25] Toisin sanoen, olkoon järjestysluvun ominaisuus P mikä tahansa, jos Ω:lla on ominaisuus P, niin on olemassa ainakin yksi järjestysluku $\delta < \Omega$, jolla on ominaisuus P. Joukko-opissa reflektioperiaate tarkoittaa, että jokainen ominaisuus, joka on kaikkien joukkojen aidolla luokalla, on ainakin yhdellä siihen kuuluvalla joukolla. Reflektioperiaatteesta ja Gödelin toisesta epätäydellisyyslauseesta seuraa, että Zermelo-Fraenkel-joukko-oppi, ZF, ei ole äärellisesti aksiomatisoituva: Jokaisella äärellisellä määrällä ZF:n teoreemoja on olemassa malli reflektioperiaatteen mukaan, mutta ZF:n mallin olemassaolo ei ole todistuva, Jech 2003, 168.

[26] Wolter 1947, 9: "No matter how far our mind may have progressed in the contemplation of God, it does not attain to what He is, but to what is beneath Him." Ks. myös Mühlenberg 1966, 159. Georg Cantor puolestaan sanoo, että Absoluutti voidaan ainoastaan tunnustaa (*anerkannt*), muttei koskaan käsittää (*erkannt*), eikä se myöskään likimääräisesti tule käsittäväksi. Cantor 1932, 205: "Das Absolute kann nur anerkannt, aber nie erkannt, auch nicht annähernd erkannt werden."

tin ominaisuuksista jotakin.[27] Nähdäksemme, ettei tässä ole ristiriitaa, oletetaan, että Absoluutti on käsitettävissä kuten transfiniittiset järjestysluvut. Tällöin olisi olemassa jokin ominaisuus P, joka yksinomaan olisi Absoluutilla ja jonka avulla voisimme käsittää yksinomaan Absoluutin. Nyt, saadaksemme Absoluutin käsittämättömäksi, *sovimme* yksinkertaisesti seuraavasti: jokainen ominaisuus P, joka olisi ainoastaan Absoluutilla, on sekä Absoluutilla että jollakin transfiniittisellä järjestysluvulla. Eli toisin sanoen, ei olisi olemassa ominaisuutta P, joka olisi ainoastaan Absoluutilla. Tämä tarkoittaisi, että voisimme sanoa Absoluutin olevan sekä käsitettävissä että käsittämätön. Tämä vuoksi emme voisi koskaan täysin erottaa Absoluuttia transfiniittisistä järjestysluvuista olettaen, että emme voi koskaan kuvata Absoluuttia, jolla ainoastaan olisi ominaisuus P ja jota se ei jakaisi jonkin transfiniittisen järjestysluvun kanssa. Tosin sanoen, ei olisi olemassa ominaisuutta P, joka erottaa Absoluutin jokaisesta transfiniittisesta järjestysluvusta.[28]

Absoluutti olisi kuitenkin käsittämätön, sillä vaikka transfiniittiset järjestysluvut lähestyvät loputtomasti Absoluuttia, ne eivät sitä koskaan saavuta. Absoluutti sijaitsee absoluuttisesti saavuttamattomana kaiken käsityksemme "tuolla puolen". Tätä argumenttia on usein kutsuttu Cantorin reflektioperiaatteeksi, joka johti Cantorin tekemään kolmijakoisen erottelun koskien ääretöntä:

> Aktuaalinen äärettömyys nousee esiin *kolmessa* yhteydessä: *ensiksi* kun se todellistuu kaikkein täydellisimmässä muodossa, kokonaan riippumattomana ylimaailmallisena olentona, *in Deo*, jota kutsun *Absoluuttiseksi äärettömäksi* tai yksinkertaisesti *Absoluutiksi*; *toiseksi* kun se esiintyy kontingentissa, luodussa maailmassa; *kolmanneksi* kun mieli käsittää sen *in abstracto* matemaattisena määränä, lukuna tai järjestystyyppinä. Tahdon tehdä selvän eron *Absoluutin* ja kutsumani *transfiniittisen* välillä, se on, *kaksi* jälkimmäistä lajia aktuaalista ääretöntä, jotka ovat selvästi rajattuja, kykeneviä edelleen kasvamaan ja siten sukua *äärelliselle*.[29]

Jos Absoluuttisen äärettömyyden ominaisuudet ovat myös transfiniittisillä järjestysluvuilla ja ilmenevät niissä, niin Russellin mukaan Absoluuttinen äärettömyys on eräässä mielessä tiedettävissä ja käsitettävissä. Absoluutti paljastuu transfiniittisissä järjestysluvuissa ja silti se tällä samalla paljastuksella jää kätketyksi, sanomattomaksi, käsittämättömäksi.[30] Transfiniittiset järjestysluvut muodostavat loputtoman verhon Absoluuttisen äärettömän ympärille. Tämä verho on kaikki, mitä koskaan voimme siitä tietää.

---

[27] Russell 2008, 66

[28] Russell 2008, 66.

[29] Cantor 1932, 378: "Es wurde das A.-U. nach *drei* Beziehungen unterschieden: *erstens* sofern es in der höchsten Vollkommenheit, im völlig unabhängigen, außerweltlichen Sein, *in Deo*, realisiert ist, wo ich es *Absolutunendliches* oder kurzweg *Absolutes* nenne; *zweitens* sofern es in der abhängigen, kreatürlichen Welt vertreten ist; *drittens* sofern es als mathematische Größe, Zahl, oder Ordnungstypus vom Denken *in abstracto* aufgefaßt werden kann. In den *beiden* letzten Beziehungen, wo es offenbar als beschränktes, weiterer Vermehrung fähiges und *insofern den Endlichen verwandtes* A.-U. sich darstellt, nenne ich es T*ransfinitum* und setze es dem *Absoluten* strengstens entgegen."

[30] Russell 2008, 71.

Aito tieto Absoluuttisesta äärettömästä on ikuisesti paljastettu verholla, joka sen kätkee.[31]

Russell esittää edellä esitetyn johtopäätöksensä myös teologisin termein seuraavasti: “Mitä Jumala on valinnut paljastaa meille, katafaattisesti – Jumalan olemassaolosta Luojana, Jumalan hyvyydestä, rakkaudesta ja kauneudesta – on verho, jonka takana Jumalan todellisuus on loputtomasti kätketty tarkalleen kuten se on loputtomasti ilmoitettu.”[32]

JOUKKO-OPIN ANTINOMIAT - JA NIIDEN RATKAISUT: CANTOR JA SAARNIO

Cantor löysi luomastaan joukko-opista kaksi toisiinsa liittyvää paradoksia, mutta hän ei ollut niistä mitenkään huolissaan, koska uskoi ratkaisseensa ne. Toinen niistä koski kaikkien kardinaalilukujen systeemiä, jota Cantor kutsui Absoluuttiseksi äärettömäksi tai systeemiksi ת . Toisin sanoen systeemi ת muodostuu kaikista äärettömistä kardinaaliluvuista $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\ldots, \aleph_\nu, \ldots$.[33] Cantor osoitti, että oletus kaikkien kardinaalilukujen muodostaman joukon olemassaolosta johtaa ristiriitaan seuraavasti:

Oletetaan, että ת on kaikkien joukkojen joukko. Cantorin teoreeman mukaan jokaisen joukon A kaikkien osajoukkojen joukon eli potenssijoukon $\mathscr{P}(A)$ kardinaaliteetti on tätä joukkoa suurempi, toisin sanoen, $|\mathscr{P}(A)| > |A|$.[34] Tästä seuraa, että $|\mathscr{P}($ת$)| > |$ת$|$. Toisaalta, koska potenssijoukon $\mathscr{P}($ת$)$ kaikki alkiot ovat joukkoja, niin niiden täytyy sisältyä kaikkien joukkojen joukkoon ת, jolloin $|$ת$| > |\mathscr{P}($ת$)|$. Näin on luotu ristiriita jota kutsutaan Cantorin paradoksiksi.

Kaikkien kardinaalilukujen muodostaman systeemin ת synnyttämän ristiriidan Cantor ratkaisi sanomalla, että ת on Absoluuttinen ääretön, joka ei voi olla kvantitatiivisen päättelyn ja rationaalisen toiminnan kohteena. Sitä ei voi ymmärtää loogisella analyysillä, vaan ainoastaan intuitiivisen näkemyksen avulla. Lisäksi, sitä ei voi käsittää, sillä se voidaan ainoastaan hyväksyä ilman rationaalista päättelyä ja loogista analyysiä. Loogisella analyysillä tarkoitetaan tässä sitä, että ת:ta ei voi käsittää joukkona. Sen sijaan Cantor kutsui sitä ”inkonsisten-

---

31 Russell 2008, 71. Analogisesti tätä ajatusta voisi kuvata esimerkiksi autopeitteellä peitettyä autoa, jota itseään ei siis näy, mutta autopeitteen muoto paljastaa peitetyn auton olevan mitä ilmeisimmin Volkswagen Kupla.

32 Russell 2008, 72: “What God has chosen to disclose to us, the kataphatic – God’s existence as Creator, God’s goodness, love, and beauty – is a veil behind which the reality of God is endlessly hidden precisely as it is endlessly revealed.”

33 ת, (taw), on heprean aakkosten viimeinen kirjain, Cantor 1932, 445–447.

34 Cantor 1932, 279–280. Cantorin teoreeman ajatuksena on, ettei ole olemassa surjektiota joukosta A joukon A potenssijoukolle. *Todistus*: Ensiksi, helposti voi huomata, että on olemassa injektio ϕ joukosta A sen potenssijoukolle $\mathscr{P}(A)$. Jos $x \in A$ niin $\phi(x) = \{x\} \in \mathscr{P}(A)$. Toiseksi, oletetaan, että olisi surjektio $\varphi : A \to \mathscr{P}(A)$, jolloin niillä olisi sama kardinaliteetti. Olkoon $B_\varphi = \{x \in A \,|\, x \notin \varphi(x)\}$. Jos$B_\varphi = \varphi(y)$, niin $y \in B_\varphi \leftrightarrow y \notin \varphi(y) \leftrightarrow y \notin B_\varphi$, mikä on ristiriita. Siten B_φ on joukon A osajoukko, joka ei kuulu kuvauksen ϕ arvojoukkoon ja näin ollen ei ole olemassa surjektiota joukosta A joukon A potenssijoukkoon $\mathscr{P}(A)$.

tiksi, absoluuttisen äärettömäksi moninaisuudeksi."[35] Tämä ת, Cantor sanoi, on Jumala, kaiken maailmassa olemassa olevan luova alkusyy. Cantor esitti nyt aristotelis-skolastisen tunnuslauseen: "Ei ole aktuaalista ääretöntä,"[36] sijaan oman tunnuslauseensa: "Kaikki oliot, joko äärelliset tai äärettömät, ovat *määrättyjä* ja Jumalaa lukuunottamatta ne voidaan määrittää järjen avulla."[37]

Itse asiassa Cantor esitti tässä yhteydessä kaksi teoreemaa:

> *Teoreema A*: Kaikkien järjestyslukujen systeemi Ω on inkonsistentti ja absoluuttisesti ääretön moninaisuus.[38]
>
> *Teoreema B*: Kaikkien $\aleph$-lukujen systeemi ת muodostaa suuruusjärjestyksessä systeemin Ω ja on siten inkonsistentti ja absoluuttisesti ääretön moninaisuus.[39]

Tässä kohden on huomattava, että kardinaaliluvut voidaan määritellä järjestyslukujen avulla seuraavasti: Jos joukko A voidaan hyvinjärjestää, niin silloin hyvinjärjestetty joukko $(A, <)$ on isomorfinen jonkin järjestysluvun α kanssa. Tällöin on olemassa pienin järjestysluku α, joka on joukon A kardinaaliluku $|A|$.[40]

Teoreema A tunnetaan Burali-Forti –paradoksina,[41] jonka Saarnio esittää lyhyesti seuraavasti: Ajatellaan, että kaikki äärelliset ja äärettömät – toisin sanoen finiittiset ja transfiniittiset – järjestysluvut on järjestetty suuruusjärjestykseen. Tämä järjestys on hyvinjärjestys. Koska *kaikkien* järjestyslukujen jono on hyvinjärjestetty jono, niin täytyy olla olemassa järjestysluku, joko on tämän hyvinjärjestetyn jonon järjestystyyppi. Olkoon tämä järjestysluku φ. Järjestysluku φ olisi siis suurempi kuin jokainen järjestysluku, koska olettamuksen mukaan jokainen järjestysluku kuuluu *kaikkien* järjestyslukujen suuruusjärjestyksessä olevaan jonoon. Luku φ olisi siis järjestysluku, joka ei voi kuulua kaikkien järjestyslukujen joukkoon, jolloin se ei voi olla finiittinen järjestysluku eikä transfiniittinen järjestysluku.[42]

---

[35] Cantor 1932, 445: "[E]ine inkonsistente, eine absolute unendliche Vielheit."

[36] Cantor 1932, 174, 205: "*Infinitum actu non datur*."

[37] Cantor 1932, 176: "Omnia seu finita seu infinita definita sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt."

[38] Cantor 1932, 445.

[39] Cantor 1932, 446.

[40] Tämä edellyttää valinta-aksiooman, joka on ekvivalentti lauseen: "jokainen joukko voidaan hyvinjärjestää." kanssa.

[41] Cesare Burali-Forti (1861-1931) oli ensimmäinen matematiikko, joka julkaisi transfiniiittiseen joukko-oppiin kätkeytyvän paradoksin artikkelissaan "Una questionione sui numeri transfiniti" vuonna 1897. Hän huomasi, että kaikkien ordinaalilukujen Ω hyvinjärjestetyllä jonolla on oltava vastaava ordinaaliluku δ, joka on suurempi kuin kaikkien Ω:n edustama joukko. Koska Ω:n oli tarkoitus sisältää kaikki ordinaaliluvut, se ei voinut jättää δ pois, ja siten $\delta < \delta$, mikä on mahdotonta. Ratkaisuna tähän Burali-Forti ehdotti ordinaalilukujen vertailukelpoisuuden hylkäämistä; eli jos annetaan kaksi ordinaalilukua α ja β, niin ei aina ole totta, että vähintään yksi suhteista $\alpha < \beta$ $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$ pätee, *ibid*. Toisin sanoen, Burali-Forti ehdotti luopumista yhdestä valinta-aksiooman muodoista.

[42] Saarnio 1969, 450. Oletetaan, että ääretöntä ei olisi olemassa ja olisi olemassa vain äärellisiä järjestyslukuja. Tällöin kaikkien äärellisten järjestyslukujen järjestysluku k olisi jokaista äärellistä järjestyslukua suurempi. Koska ääretöntä ei olisi olemassa, niin k olisi äärellinen järjestysluku, joka tulisi olla myös itseään suurempi, mikä on ristiriita, Saarnio 1969, 451,452.

Teoreeman B Saarnio puolestaan esittää lyhyesti seuraavasti: Muodostetaan kaikkien finiittisten ja transfiniittisten kardinaalilukujen joukko. Tässä joukossa ei ole suurinta lukua, vaan jokainen luku on eräitä muita lukuja pienempi. Tällä joukolla ei siis voi olla suurinta lukua. *Kaikkien* kardinaalilukujen summa olisi näillä ehdoilla jokaista kardinaalilukua suurempi.[43] Jos tämä summa olisi itse eräs transfiniittinen kardinaaliluku, niin sen täytyisi olla itseään suurempi, mikä on ristiriita.[44]

CANTORIN JA SAARNION TIETOTEOREETTISET RATKAISUT

Teoreemojen A ja B muodostamat paradoksit eivät huolestuttaneet Georg Cantoria, koska hänen käsityksensä joukosta oli tietoteoreettinen: "Joukko on mikä tahansa monta, joka voidaan ajatella yhdeksi," josta ristiriitaa ei seuraa.[45] Richard Dedekindille (1831–1916) lähettämässään kirjeessään 28.7.1899 Cantor kirjoitti, että järjestyslukujen systeemi Ω on Absoluuttisen ääretön tai ristiriitainen moninaisuus (*absolut unendliche* oder *inkonsistente Vielheit*), jota ei voida ajatella kokonaisuutena ilman ristiriitaisuuksia. Jos jotakin moninaisuuden muodostamaa kokonaisuutta voidaan ajatella ilman ristiriitaa, rajattuna kokonaisuutena, eli "yhtenä" ja ne voidaan koota yhteen "yhdeksi olioksi", niin Cantor kutsuu sitä ristiriidattomaksi moninaisuudeksi (*konsistente Vielheit*) tai "joukoksi" (*Menge*).[46] Näin Cantorin tietoteoreettisesta kriteeristä sen määrittämiseksi, muodostavatko jotkut moninaisuudet yhden vai eivät, seuraa, että esimerkiksi Burali-Forti paradoksi on ratkaistavissa: suurinta järjestyslukua ei ole olemassa.[47]

Saarnion tulkinta molempiin ristiriitoihin on niin ikään tietoteoreettinen. Samoin kuin Cantor, Saarnio katsoo kyseisten ristiriitojen olevan loogisia paradokseja, jotka voidaan ratkaista. Toisaalta, Saarnio mukaan ne muodostavat kuitenkin tietoteoreettisen antinomian, samalla tavalla kuin Immanuel Kantin *Kritik der reinen Vernunft*-teoksessa esittämä ensimmäinen,

[43] Tämän lauseen taustalla on teoreema, jonka Saarnio esittää ilman todistusta, Saarnio 1969, 161. Teoreema: Jos K on transfiniittisten kardinaalilukujen joukko, jossa ei ole suurinta alkiota, niin on olemassa kardinaaliluku, joka on kaikkien joukon K alkioiden summa ja jokaista joukon K alkiota suurempi. Toisin sanoen, ei ole olemassa suurinta kardinaalilukua. Todistuksen tälle teoreemalle voi löytää esimerkiksi Saarnionkin lähteenään käyttämästä teoksesta Kampke 1950, 35, Teoreema 4.

[44] Saarnio 1969, 453. Kaikkien finiittisten kardinaalilukujen summa ei niin ikään voi olla finiittinen kardinaaliluku, *ibid.*, 1969, 453

[45] Ks. Menzel, 1984.

[46] Cantor 1932, 443.

[47] Ensimmäisen aksiomaattisen esityksen joukko-opista esitti Ernst Zermelo (1871–1953) artikkelissaan "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I," Zermelo 1908, 261-281. Tässä artikkelissa Zermelo esittää Erotteluaksiooman (*Axiom der Aussonderung*): Milloin propositionaalinen funktio $P(x)$ on määritelty kaikille joukon M alkioille ,niin joukolla M on osajoukko M_P, joka sisältää tarkalleen ne joukon M alkiot, joille $P(x)$ on tosi. Tämän aksiooman tarkoituksena oli rajoittaa joukkojen muodostusta niin, ettei paradoksaalisia joukkoja, kuten kaikkien joukkojen joukkoa, voi muodostaa

kosmologinen antinomia,[48] joka pysyy periaatteessa ihmisälylle ratkaisemattomana. Näin ollen Saarnion tekee eron ristiriidan, paradoksin ja antinomian välillä. Ristiriidassa (*"contra"* + *"dictus"*) kaksi väitettä eivät voi olla molemmat samanaikaisesti tosia, eivätkä samanaikaisesti epätosia. Loogisissa paradokseissa (*"para"* + *"doxa"*) puolestaan kaksi väitettä näyttävät ensin olevan ristiriidassa toistensa kanssa, mutta jatkotutkimuksissa ristiriita voidaan kuitenkin ratkaista. Koska teoreemat A ja B ovat Saarnion mukaan loogisia paradokseja, ne voidaan hänen mukaansa ratkaista Bertrand Russellin (1872–1970) tyyppiteorian avulla.[49] Sen sijaan tietoteoreettisissa antinomioissa (*"anti"* + *"nomos"*) kaksi väitettä ovat ja jäävät ristiriitaisiksi, eivätkä mitkään jatkotutkimukset voi sitä järkiperäisesti tai loogisesti ratkaista. Tällöin antinomioissa joko molempia väitteitä pidetään totena tai molempia väitteitä pidetään epätosina. Esimerkiksi Kantin esittämistä neljästä antinomiasta kaksi ensimmäistä, niin sanotut "matemaattiset" antinomiat, Kant katsoi molempien vastakkaisten väitteiden olevan epätosia, kun taas kolmannessa ja neljännessä, niin sanotut "dynaamiset" antinomiat, hän katsoi molempien vastakkaisten väitteiden olevan tosia.[50]

Kysyttäessä, voidaanko muodostaa kaikkien kardinaalilukujen tai vastaavasti kaikkien järjestyslukujen joukko, joudumme Saarnion mukaan *kaiken* äärellisen ja äärettömän tietoteoreettiselle rajalle. Käytämme kaikki–kategoriaa siinä, missä totaliteetin sijalla on *idea* tämän sanan siinä merkityksessä, jonka Immanuel Kant sen sille antoi.[51] Tämä idea, "kaikki kardinaali- ja järjestysluvut", on meille välttämätön. Juuri tämän transsendentaalisen idean avulla ja vain sen avulla olemme kykeneviä sanomaan, että tätä ideaa ei vastaa mikään joukko. Tämä idea muodostaa Saarnion mukaan eräällä tavalla negaation disjunktiosta: "äärellinen tai ääretön", jolloin siis saadaan: "ei äärellinen eikä ääretön."[52]

Kaikkien kardinaali- ja järjestyslukujen idea perustuu *kaikki*–kategoriaan, toisin kuin joukon käsite, jolloin se sisältää tietyn antinomian.[53] Saarnion mukaan emme voi sanoa, että tämä idea olisi "mieletön" tavallisen loogisen ristiriidan mielessä ja jonka voisimme hylätä, vaan

[48] Kosmologinen antinomia: Teesi A: Maailmalla on alku ajassa, ja se on avaruudeltaan rajallinen, ja Teesi B: Maailmalla ei ole alkua eikä rajoja avaruudessa, vaan se on sekä ajallisesti että avaruudellisesti ääretön, Kant 1781/1787, A 426-433 / B 454-461, ja jotka Kantin mukaan ovat molemmat epätosia, *ibid*. A 522-527 / B 550-555.

[49] Saarnio 1969, 454, 455.

[50] Kant 1781/1787, A 528-532 / B 556-560.

[51] Teoreemat *A* ja *B* tulisi Saarnion mukaan siten tulkita tietoteoreettisesti samoin kuin Kant ratkaisee ensimmäisen kosmologisen antinomiansa seuraavasti: Kantin mukaan ymmärrys voidaan käsittää kyvyksi tehdä arvostelmia, Kant 1781/1787, A 69 / B 94. Kun arvostelmasta abstrahoidaan kaikki sisältö ja huomio kiinnittyy pelkästään ymmärryksen muotoon, niin arvostelmien kvantiteetissa ajattelu sisältää kolme momenttia: universaalinen, partikulaarinen ja singulaarinen, *ibid*., A 70 / B 95. Kvantiteetti puolestaan muodostuu kolmesta puhtaasta synteettisestä käsitteestä, jotka sisältyvät ymmärrykseen *a priori*: ykseys, moneus ja kaikkeus, *ibid*., A 80 / B 106. Nyt kosmologinen antinomia seuraa, kun maailmaa ajatellaan rajoitetuksi kokonaisuudeksi, *kaikkeudeksi*, *ibid*., A 522-527 / B 550-555.

[52] Saarnio 1969, 161, 162.

[53] Saarnio 1969, 162. Tosin tässä kohden Saarnio kirjoittaa selvästi virheellisesti:"Idea ei perustu *kaikki*-kategoriaan, kuten joukon käsite, vaan se sisältää, kuten kaikki transsendentaaliset ideat tietyn antinomian."

tämä idea on meille välttämätön ja *a priori* antroposentriselle järjelle annettu transsendentaalinen idea. Vaikeus on tietoteoreettinen, joka ei koske itse asiaa, kuten kardinaali- tai järjestyslukujen matemaattista käsitettä, vaan ihmisen käsityskykyä (*Verstandesvermögen*) periaatteellisesti. Ihmisellä ei Saarnion mukaan ole muuta keinoa kuin käyttää Kantin kvantiteetin kategorian kaikkia kolmea momenttia, nimittäin *kaikkeus*, *moneus* ja *ykseys*.[54]

Näin Saarnion mukaan on todettava, että on olemassa "asioita" (*res*), jotka oikeastaan kuuluvat luvun käsitteen alaan ja jotka samalla eivät kuulu luvun käsitteen alaan; siis antinomia. On siis olemassa "asioita", jotka koskettavat voimakkaasti antroposentrisen tietokyvyn tietoteoreettista äärimmäistä rajaa ja jotka antavat meidän aavistaa jotakin transsendentaalisista tekijöistä. Samalla ne aina muistuttavat tietokykymme rajoista.[55]

LOPUKSI

Georg Cantorin alulle paneman joukko-opin synty ja Cantorin siinä löytämät paradoksit, jotka koskivat kaikkien kardinaali- ja järjestyslukujen "joukkoa", jota Cantor kutsui Absoluuttiseksi äärettömäksi, saa tietoteoreettisen ratkaisunsa sekä Cantorilta itseltään että Uuno Saarniolta. Cantorin tietoteoreettinen ratkaisu seuraa hänen joukon määritelmästään: "Joukko on mikä tahansa monta, joka voidaan ajatella yhdeksi," josta ristiriitaa ei seuraa; toisin sanoen, ei ole olemassa suurinta kardinaalilukua eikä myöskään järjestyslukua. Lisäksi, Cantorin mukaan Absoluuttinen ääretön on rinnastettavissa Jumalaan, eikä sen tutkiminen näin kuulu varsinaisesti enää matematiikan alaan.

Saarnion ratkaisu puolestaan pohjautuu Immanuel Kantin tietoteoriaan, jolloin kaikkien kardinaali- ja järjestyslukujen ideat perustuvat kaikki–kategoriaan, toisin kuin joukon käsite. Nämä ideat puolestaan ovat käsitteellisinä ideoina meille välttämättömiä ja a priori antroposentriselle järjelle annettuja transsendentaalisia ideoita, joita ei vastaa mikään joukko. Transsendentaalisina ideoina ne sisältävät tietyn antinomian, jotka ovat toisaalta ontologisia ja toisaalta tietoteoreettisia tosiasioita, joiden perusteella ihminen päättelee transsendentin olemassaolon.[56] [57]

---

[54] Saarnio 1969, 276.

[55] Saarnio 1969, 162. *Mitä tiedämme äärettömästä?* –teoksen Burali-Fortin antinomia koskevan luvun motoksi Saarnio on valinnut opettajansa Eino Kailan (1890–1958) sanoman: "Immanuel Kantin noumenonin käsitteen merkitys on siinä, että se aina muistuttaa meitä, että tietomme on rajoitettu," *ibid.*, 450. On huomattava, kun Saarnio puhuu "antroposentrisestä puhtaan järjen ideasta" on kyseessä selvästi kantilainen tietoteoreettinen käsitys transsendentista. Kun Saarnio kirjoittaa äärettömän olemassaolosta, on kyseessä platonilainen ontologinen käsitys transsendentista.

[56] On huomattava, kun Saarnio kirjoittaa "antroposentrisestä puhtaan järjen ideasta," on kyseessä selvästi kantilainen tietoteoreettinen käsitys transsendentista. Kun Saarnio kirjoittaa "äärettömän olemassaolosta," on kyseessä platonilainen ontologinen käsitys transsendentista.

[57] Omistan tämän artikkelin matematiikan emeritusprofessori Magnus Steinbyn (1941-1921) muistolle. Olen kiitollinen häneltä saamistani rakentavista kommenteista, kannustuksesta ja ystävyydestä

Lähdeluettelo:

Akvinolainen, T., ca. 1273: *Summa Theologiae*. London: Eyre & Spottiswoode; New York: McGraw-Hill for Blackfriars. 1964.

Bolzano, B., 1851: *Paradoxien des Unendlichen*. Leipzig: Reclam.

Burali-Forti, C., 1897: "Una questione sui numeri transfiniti." *Rendiconte del Circolo mathematic di Palermo 11*, 154–164. Englanninkielinen käännös J. van Heijenoort: A question on transfinite numbers, teoksessa *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1870–1931*. Toim. J. van Heijenoort. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967, 104–111.

Cantor, G., 1932: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Toim. E. Zermelo. Berlin: Springer; uusinta painos vuonna 1962. Hildesheim: Olms.

Cross, R., 1999: *Duns Scotus*. New York, Oxford: Oxford University Press.

Dauben, J. W., 1979: *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of Infinity.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Galilei, G., 1914: *Dialogues Concerning Two New Sciences*. Kääntäneet italiasta ja latinasta englanniksi Henry Crew ja Alfonso de Salvio. Johdanto Antonio Favaro. Ensimmäinen julkaisu 1638. Ensimmäinen käännös englanniksi Macmillan, *1914*. New York: Dover.

Hallett, M., 1984: *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*. Oxford: Clarendon Press.

Jech, T., 2003: *Set Theory: The Third Millenium Edition, Revised and Expanded*. Berlin et al.: Springer.

Kampke, E., 1950: *Theory of Sets*. New York: Dover.

Kant, I., 1781/1787: *Puhtaan järjen kritiikki*. Suom. M. Nikkarla ja K. Ranta. Työryhmän johtaja O. Koistinen. Helsinki: Gaudeamus, 2013.

Menzel, C., 1984: *"Cantor and the Burali-Forti Paradox."* The Monist **67** (1):92-107.

Moore, G. H., 1982: *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, & Influence*. New York: Springer-Verlag.

Murdorch, J. E., 1982: *"Infinity and continuity."* The Cambridge History of Later Medieval Philosophy. Toim. N. Kretzmann, A. Kenny ja J. Pinnborg. Cambridge etc.: Cambridge University Press, 564–591.
Murdorch, J. E., 2009: "Beyond Aristotle: Indivisibles and Infinite Divisibility in the Later Middle Ages. "*Atomism in Late Medieval Philosophy and Theology*. Leiden, Boston: Brill, 15–38.
Mühlenberg, E., 1961: *Die Unendlichkeit Gottes bei Gregor von Nyssa: Gregors Kritik am Gottesbegriff der klassischen Metaphysik*. Forschungen zur Kirchen- und Dogmengeschichte Band 16. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
Palomäki, J., 2002a: "Uuno Saarnio – omintakeinen filosofi." *Tieteessä tapahtuu* **6**, 15–20.

Palomäki, J., 2002b: "Ääretön transsendentti Jumala". *Teologinen Aikakauskirja* **4**, 354-360.

Rittbeg, C. J., 2015: "How Woodin changed his mind: new thoughts on the Continuum Hypothesis."Archive for History of Exact Sciences **69**, No. 2., 125-151.

Rucker, R., 1982: *Infinity and the Mind: The Science and Philosophy of the Infinite*. Boston, Basel, Stuttgart: Birkhäuser.

Russell, R. J., 2008: *Cosmology: From Alpha to Omega*. Minneapolis: Fortress Press.

Saarnio, U., 1958: *Das System und Darstellung der transfiniten Ordnungszahlen mit hilfe der Höheren Rechenoperationen*. Mit Einführung von Prof. Dr. Heinrich Behmann. Helsinki: Gesellschaft für Logik und Ihre Anwendungen.

Saarnio, U., 1968: "Eine konstruktive Darstellung für die Richtigkeit der Kontinuumshypothese," *Mathematische Annalen* **178**, 335–353.

Saarnio, U., 1969: *Mitä tiedämme äärettömästä?* Porvoo: WSOY.
Wolter, A. B., 1947: "Duns Scotus on the Nature of Man's Knowledge of God," *Review of Metaphysics* 1, 3–36.

Woodin, W. H., 2001: "The Continuum Hypothesis, Part I & II," *Notices of the American Mathematical Society, Vol.* **48**, 567–576, 681–690.

Zermelo, E., 1908: "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I." *Mathematische Annalen 65*, 261-281. Englanninkielinen käännös Stefan Mauer-Mengelberg: Investigations in the foundations of set theory I, teoksessa *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1870–1931*. Toim. J. van Heijenoort. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967, 200–215.