

# MATEMATIIKAN OLYMPIAVALMENNUS

## — PALJON MUUTAKIN KUIN VAIN KILPAILUA

**Anne-Maria Ernvall-Hytönen**

*Helsingin yliopisto*

**M**atematiikan olympiavalmennus on luultavasti laajin Suomessa toimiva matematiikan harrastustoimintaa tarjoava taho, sillä toimintakenttänä on koko maa ja toimintaa on tarjolla yläkouluikäisille ja lukiolaisille.

Matematiikan olympiavalmennusta järjestää Suomen matemaattisen yhdistyksen valmennusjaosto yhdessä Matemaattisten aineiden opettajien liiton kanssa. Toimintaa rahoittaa Opetushallitus. Toiminnan tavoitteena on tarjota matemaattista yleissivistystä, valmistautua kilpailuihin ja tarjota matemaattista ajanvietettä. Pidän itse myös hyvin tärkeänä sitä, että toimintamme kautta koululaiset saavat vertaistukea. Varsinkin pienemmissä kouluissa matematiikan harrastajat saattavat olla harrastuksensa kanssa kovin yksin. Valmennuksen kautta tapaa muita harrastajia ja pääsee keskustelemaan matematiikasta ja ratkaisemaan ongelmia yhdessä.

### TOIMINNAN YLEISKUVAUS

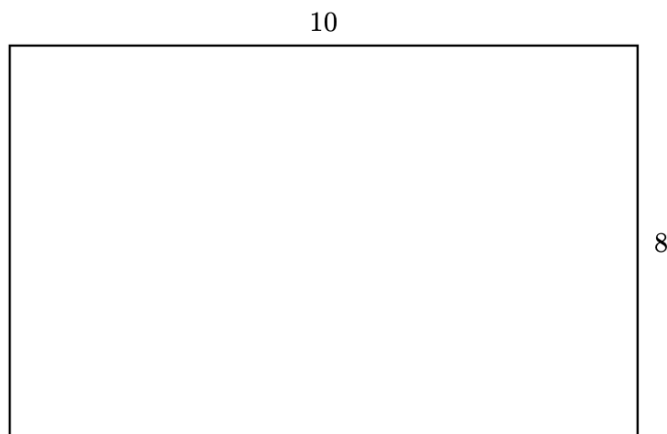
Matematiikan olympiavalmennus on yhdistelmä kotitehtäviä, leirejä, kilpailujen järjestämistä ja niihin osallistumista. Suomi osallistuu vuosittain kansainvälisiin matematiikkaolympialaisiin (IMO -- kaiken toiminnan huipentuma), Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaisiin (kovatasoinen kilpailu, kehitetty kannustamaan tyttöjä kilpailemaan), pohjoismaiseen matematiikkakilpailuun (mahdollisuus monille kokeilla vaikeiden tehtävien ratkaisemista, sillä jokaisesta maasta osallistuu 20 kilpailijaa, jotka ratkaisevat tehtävät omissa kouluissaan) ja Baltian tiehen (poikkeus matematiikkakilpailujen joukossa, sillä Baltian tie on joukkuekilpailu, jossa joukkue ratkoo yhdessä tehtäviä). Tämän lisäksi Suomi on usein osallistunut esimerkiksi Iranin geometriaolympialaisiin, joka on hyvä lisäkannuste usein heikoissa kantimissa olevan geometrian opiskeluun.

## SEITSEMÄSLUOKKALAISTEN KILPAILUT

Matematiikan olympiavalmennus järjestää 7.-luokkalaisten kilpailua Helsingin, Oulun, Turun ja Satakunnan alueella. Kilpailun tavoite on tarjota matalan kynnyksen mahdollisuus kokeilla matemaattista ongelmanratkaisua. Alkukilpailun tehtävät ovat monivalintoja. Jotta kilpailu tarjoaa onnistumisen iloa kaikille, ovat ensimmäiset tehtävät yleensä varsin helppoja, esimerkkinä vaikkapa tämän vuoden Helsingin ykköstehtävä:

## Tehtävä

Ohessa on kuva suorakulmiosta. Kuvaan on merkitty sivujen mitat.



Laske suorakulmion piiri.

Vaihtoehdot: a) 36 b) 56 c) 32 d) 40

Tehtäviä on yleensä alkukilpailussa noin 15 tai vähän vähemmän. Niitä on siis aika paljon. Koska kilpailuaika on noin 45--50 minuuttia, on aikapaine huomattava. Tästä huolimatta, koska oppilaiden taso vaihtelee valtavasti, ja koska ensimmäiset tehtävät ovat melko helppoja, on viimeisten tehtävien oltava oikeasti vaativia, jotta finaaliin pääsy ei ratkea sillä, tekeekö huolimattomuusvirheen vai ei. Yleistä tehtävien tasoa edustaa esimerkiksi seuraava tämän kevään Satakunnan alkukilpailutehtävä:

## Tehtävä

Lompakossa on vain 5 sentin ja 20 sentin kolikoita. Kumpiakin kolikoita on 20 kappaletta. Kuinka monella eri tavalla voidaan maksaa yhden euron ostos? (Maksutavat tulkitaan erilaisiksi, mikäli niissä käytetään eri määrä jomman kumman kaltaisia kolikoita. Siis esimerkiksi kaikki tavat, joissa käytetään tasan viisi 20 sentin kolikkoa, tulkitaan samaksi tavaksi.)

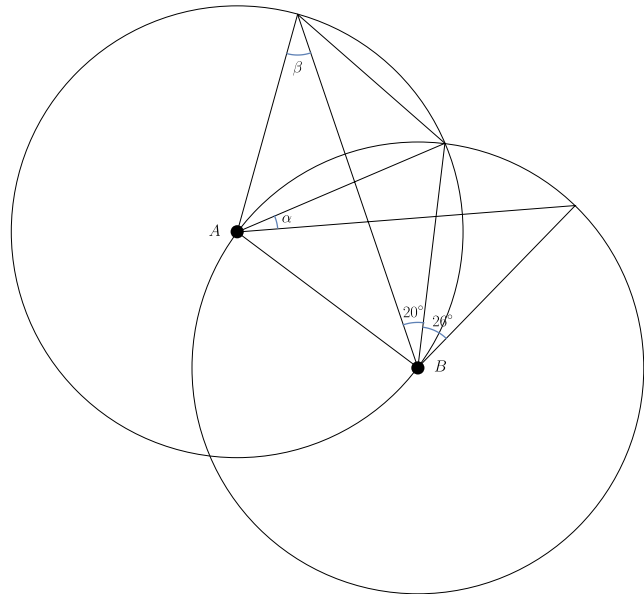
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

Finaali järjestetään paikallisessa korkeakoulussa. Alkukilpailutehtävinä monivalinnat ovat vaikuttaneet hyvältä valinnalta, mutta finaalissa suurin osa tehtävistä on avoimia tehtäviä, eli sellaisia, joihin tulee kirjoittaa paitsi vastaus, myös vastauksen perustelut, eli kokonainen ratkaisu.

Tänä keväänä Turun finaalissa oli esimerkiksi seuraava tehtävä:

**Tehtävä**

Oheisessa kuvassa on kaksi ympyrää, joiden kummankin säde on pisteet  $A$  ja  $B$  yhdistävä jana. Kuvaan on merkitty kaksi kulmaa, suurudeltaan  $20^\circ$  ja  $26^\circ$ . Määrä kulmien  $\alpha$  ja  $\beta$  suuruudet. Huomautus: Kuva on tarkoituksella hieman epätarkka, joten älä käytä astelevyä. Muista perustella laskusi vaiheet.



**KIRJEVALMENNUS**

Matematiikan olympiavalmennuksen perinteinen toimintamuoto on kirjevalmennus, eli käytännössä kotitehtävät, joiden tekemiseen on aikaa joitakin viikkoja, ja joiden ratkaisut palautetaan sähköpostitse.

Valmennus kutsuu mukaan toimintaansa seitsemäsluokkalaisten kilpailun, MAOL:n peruskoulun matematiikkakilpailut ja MAOL:n lukion matematiikkakilpailujen kaikkien sarjojen perusteella. Oppilaiden tasoerot ovat siis valtavat. Tästä syystä onkin olemassa erikseen paitsi peruskoululaisille suunnattuja kirjeitä, myös esimerkiksi lukiolaisten kirjeissä kaksi eri tehtäväsarjaa -- helpompi ja vaikeampi.

Peruskoululaisten ensimmäisessä tehtäväsarjassa on esimerkiksi seuraava tehtävä:

**Tehtävä**

Sievennä

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{99}\right) \left(1 - \frac{1}{100}\right).$$

Kaiken kaikkiaan kirjevalmennustehtävät ovat vaativia. Osa tehtäväsarjoista johdattelee konkreettisesti teoriaan, esimerkiksi todistamiseen matematiikassa. Varsinkin lukiossa tehtäväsarjat eivät yleensä rakennu yksittäisen teeman ympärille, vaan niissä on vaihtelevia tehtäviä, mahdollisesti vihjeillä, tai mahdollisesti muuttaman tehtävän muodostamilla kokonaisuuksilla, mutta tilanne on enemmän vastaava kuin aidossa kilpailussa: edessä on tehtäviä, joista ei kerrota miten niitä pitäisi lähestyä. Toisinaan tämä on turhauttavaa, sillä joskus tehtävät eivät vain lähde aukeamaan. Toisaalta tämä kuvaa melko hyvin sitä tilannetta, joka kilpailuissa tulee vastaan, tosin sillä erolla, että valmennustehtävien ratkaisemiseen on paljon aikaa, tietoa saa hakea, valmennuksen oppimateriaaleja voi hyödyntää ja kaverilta voi kysyä. Väittäisin, että valmennus opettaa matematiikan lisäksi myös tiettyä peräänantamattomuutta ja sinnikkyyttä sekä auttaa sietämään epävarmuutta. Monelle valmennuksen piiriin päätyvälle koululaiselle koulumatematiikka on helppoa, eikä juurikaan tarjoa haasteita. Tällöin matematiikasta voi jäädä virheellinen kuva: kaikkia ratkeaa itsestään. Oikeasti matematiikan oppiminen vaatii työtä ja sitä, että yrittää, vaikka ei nopeasti edistyisikään. Tämän oppiminen ennen korkeakoulua on minusta hyödyllistä.

Lukion sarjoista on löytynyt esimerkiksi seuraavat tehtävät:

#### Tehtävä helpommassa sarjassa

Pisteet  $A$  ja  $B$  ovat paraabelilla  $y = 2x^2 + 4x - 2$ . Janan  $AB$  keskipiste on origo. Selvitä janan pituus.

#### Tehtävä vaikeammassa sarjassa

Etsi kaikki funktiot  $f$  rationaaliluvuilta reaaliluvuille, joille pätee

$$f(x + y) = f(x)f(y) - f(xy) + 1$$

kaikilla rationaaliluvuilla  $x$  ja  $y$ .

## VALMENNUSLEIRIT

Valmennusleirit voidaan jakaa karkeasti kahteen ryhmään: viikonloppuvalmennukset sekä pidemmät valmennukset. Viikonloppuvalmennuksia on kuusi vuodessa. Pidempiä valmennuksia on vuosittain yksi toukokuussa (tällöin valitaan olympiajoukkue) sekä monina kesinä. Kaikki valmennukset ovat avoimia tapahtumia, eli kuka tahansa voi osallistua. Tyypillisessä viikonloppuvalmennuksessa koululaiset on jaettu kahteen ryhmään. Toisessa käydään läpi kilpailumatematiikan perusteita ja toisessa keskitytään edistyneempiin aiheisiin. Pidemmällä valmennuksella on usein selkeä tavoite tai kohde-ryhmä, kuten joukkuevalinta kilpailuun tai esimerkiksi yläkoululaisille suunnattu leiri. Leireillä on opetusta, ongelmanratkaisua, usein kokeita ja jonkin verran vapaa-aikaa. Leirien tavoite onkin paitsi opettaa ja tarjota mukava ympäristö yhdessä tehtävien ratkaisemiseen ja matematiikasta keskustelemiseen. Tällöin koululaiset tutustuvat toisiin ihmisiin, jotka myös harrastavat matematiikkaa, mikä on erityisen tärkeää niille, joilla ei muuten ole matematiikasta kiinnostuneita kavereita. Nämä valmennuksissa solmitut ystävyydet usein kantavat valmennuksen ulkopuolelle.

## KANSAINVÄLISET KILPAILUT

Kansainvälisiin kilpailuihin pääseminen on monelle tärkeä tavoite. Kansainvälisissä kilpailuissa tehtävät ovat hyvin hankalia, sillä niillä tavoite on asettaa kaikkien osallistujamaiden parhaat jonkinlaiseen järjestykseen. Suomessa opetuksessa monesti painotetaan matemaattisen yleissivistyksen kartuttamista sillä ajatuksella, että tästä on hyötyä opinnoissa myöhemmin, vaikka opinnot eivät suuntautuisikaan juuri matematiikkaan. Lisäksi Suomen populaatio on paljon pienempi kuin monessa muussa maassa, jolloin ei ole edes ihan reilua odottaa samanlaista menestystä suomalaisilta koululaisilta kuin vaikkapa yhdysvaltalaisilta tai kiinalaisilta. Tämä ei silti tarkoita sitä etteikö hyviä saavutuksia ja mitaleita olisi esimerkiksi olympialaisista saatu.

Kansainvälisten kilpailujen tehtävät keskittyvät nimellisesti algebraan, geometriaan, kombinatoriikkaan ja lukuteoriaan. Geometria tarkoittaa tässä klassista geometriaa. Lukuteoria ja kombinatoriikka ovat sitä mitä niiden kuvittelisikin olevan. Algebra sen sijaan on yhteisnimitys aiheille, jotka sisältävät esimerkiksi polynomien teorian, lukujonot ja epäyhtälöt. Kilpailualgebra kuulostaa itse asiassa suomalaisen korviin enemmän analyysilta kuin algebralta, joskin tehtävät eivät käytännöllisesti koskaan ratkea derivoiden, eli normaalin kouluanalyysin voi unohtaa.

Kansainvälisistä kilpailuista on hankala valita hyviä tai kuvaavia esimerkkejä tehtävistä: käytännössä on aina yllätys mitä eteen tulee. Päätin siis valita kaksi tehtävää, joista ensimmäinen on yksi helpoimmista lähestyttävistä olympiatehtävistä ja jälkimmäinen oma suosikkini kaikkien kilpailutehtävien joukossa.

Tämä tehtävä on kaunis yhdistelmä arviointia ja lukuteoriaa:

### IMO 1975 tehtävä 4

Kun luku  $4444^{4444}$  kirjoitetaan desimaaliesityksenä, on sen numeroiden summa  $A$ . Olkoon luvun  $A$  desimaaliesityksen numeroiden summa  $B$ . Määritä luvun  $B$  desimaaliesityksen numeroiden summa.

Tämän tehtävän ratkaisemisessa auttaa, jos kilpailuepäyhtälöt on hyvin hallussa:

### IMO 1995 tehtävä 2

Olkoot  $a$ ,  $b$  ja  $c$  positiivisia reaalilukuja, joilla  $abc = 1$ . Osoita, että

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Kirjoittaja **Anne-Maria Ernvall-Hytönen** toimii apulaisprofessorina Helsingin yliopistolla. Hän on ollut valmennuksen toiminnassa mukana yli puolet elämästään, ensin kilpailijana, sitten valmentajana. Nykyään Anne-Maria on myös lukion matematiikkakilpailutyöryhmän puheenjohtaja.

## LISÄÄ TIETOA

Matematiikan olympiavalmennuksen kotisivut: <https://matematiikkakilpailut.fi/>

Kansainvälisten matematiikkaolympialaisten sivut: <https://www.imo-official.org/>

Euroopan tyttöjen matematiikkaolympialaisten kotisivut: <https://www.egmo.org/>