JOUKKOJEN JA FUNKTIOIDEN ERITYISPISTEISTÄ

Raimo Voutilainen

JOUKOT

Jos joukolla ei ole algebrallista tai topologista rakennetta, sille on hieman vaikea kuvitella erityispisteitä. *Algebrallinen struktuuri* tuo mukanaan laskutoimituksen tai parikin laskutoimitusta, ja niiden avulla voidaan määritellä joukon laskutoimituksen suhteen neutraalialkio, jota voidaan hyvin kutsua erityispisteeksi. Tunnetusti *nolla* on yhteenlaskun neutraaliako ja *ykkönen* kertolaskuin neutraalialkio, kunhan 0/1 kuuluvat annettuun joukkoon. Yhteenlasku on määritelty mm. puoliryhmässä, ryhmässä ja Abelin ryhmässä laskutoimituksen ominaisuuksien lisääntyessä tässä järjestyksessä, ja toisena laskutoimituksena mukaan tulee kertolasku mm. renkaissa ja kunnissa, ja sen ominaisuudet lisääntyvät edellisestä jälkimmäiseen siirryttäessä. Nolla on oikeastaan myös kertolaskun erityispiste, vaikka ei olekaan neutraalialkio. Nollahan ”mitätöi” eli nollaa toisen kerrottavan, on se mikä hyvänsä.

Topologinen struktuuri johtaa lukuisiin joukon erityispisteisiin. Ne perustuvat avoimen joukon käsitteeseen, joka on topologian peruskäsite. Erityispisteitä ovat mm. joukon sisäpiste, ulkopiste, reunapiste, kasautumispiste, kosketuspiste ja erakkopiste. Piste on joukon (tarkemmin sanottuna topologisen avaruuden osajoukon) *sisäpiste*, jos sillä on avoin ympäristö, joka kokonaisuudessaan sisältyy joukkoon. Piste on taas joukon *ulkopiste*, jos sillä on avoin ympäristö, joka kokonaisuudessaan sisältyy joukon komplementtiin. Piste on joukon *reunapiste*, jos se ei ole sen sisä- eikä ulkopiste. Joukon *kasautumispisteellä* tarkoitetaan sellaista pistettä, jonka jokaisessa ympäristössä on jokin toinen joukon piste. Topologisen avaruuden X osajoukon A *kosketuspisteellä* tarkoitetaan sellaista pistettä $x \in X$, että kaikki pisteen x ympäristöt sisältävät ainakin yhden A:han kuuluvan pisteen. Pisteen x ei ole välttämätöntä kuulua A:han. Jokainen kasautumispiste on samalla kosketuspiste, mutta joukolla saattaa olla myös *erakkopisteitä*, jotka kuuluvat joukkoon ja ovat myös sen kosketuspisteitä, mutta eivät kasautumispisteitä. Tämän osoittaminen on helppo harjoitustehtävä lukijalle.

Sumeiden joukkojen teoriassa joukkoon täydellisesti kuuluvien pisteiden (kuulumisaste 1) ja täysin kuulumattomien pisteiden (kuulumisaste 0) voidaan katsoa olevan ko. joukon erityispisteitä.

FUNKTIOT

Seuraavassa käsitellään funktioiden erityispisteitä, joita voidaan määritellä todella lukuisasti. Otamme esille seuraavat: Ääriarvopisteet, käännepisteet, jatkuvuuspisteet, derivoituvuuspisteet, singulaaripisteet, analyyttiset pisteet, kiintopisteet ja tasapainopisteet.

Yhden muuttujan funktioiden *ääriarvopisteitä* (maksimit ja minimit) ja *käännepisteitä* käsitellään lukion matematiikan kurssissa. Oleellinen kysymys minimin tai maksimin haussa on se, onko löydetty piste lokaali vai globaali ääriarvokohta vai ei kumpaakaan. Ensimmäisen derivaatan nollaantuminen ja toisen derivaatan merkkitarkastelu tulevat avuksi, jos funktio on ko. pisteessä ylipäänsä derivoituva eli differentioituva. Toinen derivaatta paljastaa tällöin myös käännepisteen olemassaolon. Ääriarvotehtävä monimutkaistuu, jos funktio ei ole jossakin pisteessä *jatkuva* tai *derivoituva*. Yhden muuttujan skalaarifunktion tapauksessa ääriarvojen haku perustuu paljolti derivaatan nollakohtien hakuun. Funktio voi tunnetusti olla jossakin pisteessä jatkuva, mutta ei derivoituva. Käyvän alueen reunat ym. erityispisteet tutkitaan erikseen. Ääriarvojen hakuun on myös numeerisia menetelmiä, kuten Newtonin menetelmä. Newtonin algoritmi suppenee (mahdollisesti lokaaliin) ääriarvopisteeseen yleensä hyvin nopeasti.

Pistettä, jossa funktio ei ole rajoitettu eli jossa funktio saavuttaa mielivaltaisen suuren tai pienen arvon, kutsutaan usein funktion *singulaaripisteeksi*. Kompleksimuuttujan funktion tapauksessa piste on myös erityispiste, kun funktio on siinä derivoituva, ts. kompleksinen derivaatta on olemassa ko. pisteessä.

Useamman muuttujan funktioiden ääriarvojen haku kuuluu yliopiston matematiikan opintoihin. Skalaarifunktion tapauksessa funktion derivaatan yleistyksenä toimii vektoriarvoinen *gradientti*, joka koostuu funktion osittaisderivaatoista. Gradientin yhtyessä nollavektoriin on löydetty ehdokas ääriarvoksi siististi käyttäytyvän funktion tapauksessa. Käyvän alueen reunat ym. erityispisteet tutkitaan tässäkin tapauksessa erikseen. Toisen derivaatan yleistyksenä on *Hessen matriisi*. jonka ominaisuuksista voidaan tehdä päätelmiä mahdollisen ääriarvon luonteesta. Useamman muuttujan vektoriarvoisen funktion tarkastelu mutkistuu edelleen. Ääriarvotehtävä on tällöin monitavoite-optimointitehtävä. Gradientin yleistyksenä toimii nyt *Jacobin matriisi*, joka koostuu funktion kaikkien osakomponenttien kaikista osittaisderivaatoista. Jacobin matriisia käytetään ääriarvojen haun lisäksi monissa muissa numeerisen matematiikan sovelluksissa kuten esim. yhtälöryhmien ratkaisemisessa. Useinkaan sellaista pistettä (vektoria) ei löydy, joka olisi haettu ääriarvokohta kaikkien optimoitavan funktion komponenttien osalta. Tällöin joudutaan tyytymään kompromissiin.

Olkoon f kuvaus joukolta A joukolle A. Piste $x \in A$ on funktion f *kiintopiste*, jos $f(x) = x$. Kiintopiste ei ole aina yksikäsitteinen, vaan kiintopisteitä voi olla jopa ääretön määrä. Toisaalta kiintopisteitä ei yleisessä tapauksessa tarvitse olla lainkaan. Kiintopistelauseet kertovat kiintopisteen tai -pisteiden olemassaolosta tiettyjen ehtojen vallitessa. Kiintopiste määritellään usein Euklidista avaruutta yleisemmissä avaruuksissa kuten Banachin avaruudessa tai Hilbertin avaruudessa, joskus jopa yleisessä topologisessa avaruudessa, jossa ei ole määritelty etäisyyttä (Raj ja Piramatchi, 2020).

Olkoon edelleen H reaalinen Hilbertin avaruus ja olkoon C epätyhjä, suljettu ja konveksi H:n osajoukko. Olkoon B kuvaus $C \times C \rightarrow R$, missä R on reaalilukujen joukko. Tasapainoprobleemassa kuvaukselle $B : C \times C \rightarrow R$ on löydettävä joukon C piste x, jolle toteutuu $B(x, y) \geq 0 \ \forall \ y \in C$. Jos tällainen x löytyy, sitä kutsutaan B:n *tasapainopisteeksi*.

ERÄITÄ ERITYISPISTEIDEN SOVELLUKSIA

Aluksi käsittelemillämme joukkojen algebrallisilla ja topologisilla erityispisteillä ei ole suoria sovelluksia. Ne ovat sen sijaan täysin fundamentaalisia elementtejä matematiikassa.

Funktioiden erityispisteistä ääriarvojen haulla on lukemattomia sovelluksia eri toimialoilla, kuten arvata saattaa. Lineaarisella optimoinnilla on runsaasti sovelluksia mm. tuotannon suunnittelun alalla, ja viimeisen parinkymmenen vuoden aikana epälineaarisen optimoinnin tutkimus on lisääntynyt ja sovelluskohteet laajentuneet.

Käytännössä ääriarvojen haussa voidaan harvoin edetä laskemalla funktion derivaattoja tai osittaisderivaattoja, ja funktion arvojakaan ei välttämättä tunneta kaikissa pisteissä. Tällöin on käytettävä numeerisia menetelmiä. Niitä on sovellettu moniin tieteellisiin ja teknisiin ongelmiin. Esimerkkejä ovat silta- ja lentokonerakenteet (laskennallinen fysiikka ja laskennallinen nesteiden dynamiikka), sääennustukset, ilmastomallit, molekyylianalyysi ja molekyylien suunnittelu (laskennallinen kemia) ja öljyesiintymien etsintä. Itse asiassa supertietokoneita käytetään jatkuvasti numeerisen analyysin sovelluksiin.

Tämän seurauksena tehokkuudella on suuri merkitys, ja teoreettisesti täsmällisen menetelmän voi joskus korvata nopeampi heuristinen menetelmä. Hyvänä esimerkki on kauppamatkustajan probleema, jonka todistettavasti oikean ratkaisun etsiminen on lähes varmasti mahdotonta kohtuullista kokoa suuremmilla lähtötiedoilla. Kauppamatkustajan probleema onkin kuuluisa esimerkki ongelmista, joita kutsutaan NP-täydellisiksi. Näiden ongelmien polynomisen ratkaisun olemassaolo on yleisessä tapauksessa teoreettisesti avoinna mutta sen löytymistä pidetään äärettömän epätodennäköisenä (Voutilainen, 1981, 1982). Yleisesti numeerisessa analyysissä käytetään empiirisiä tuloksia uusien menetelmien ja ongelmien tutkimiseen, mutta tietenkin siinä myös sovelletaan matemaattisia aksioomia, lauseita ja todistuksia.

Kiintopisteprobleemassa on ensinnäkin selvitettävä, onko annetulla funktiolla kiintopiste tai kiintopisteitä, ja jos on, mikä tai mitkä ne ovat. Samoin määritellään tasapainoprobleema.

Kiintopisteprobleemoilla ja tasapainoprobleemoilla on eräänlainen dualistinen suhde, sillä ratkaisemalla tasapainoprobleeman ratkaisee usein samalla vastaavan kiintopisteprobleeman (Voutilainen, 2023a). Nash on käyttänyt legendaarisissa peliteoriaa käsittelevissä töissään (Nash 1950, 1951) todistuksissa Browerin ja Kakutanin kiintopistelauseita.

Kiintopisteteorialla on runsaasti mielenkiintoisia sovelluksia sekä vakuutusalalle että yleisemmin finanssialalle, ks. Voutilainen (2023b). Näitä ovat mm.

- riskiteoreettiset arviot ja riskimallinnus
- vakuutusmarkkinoiden dynamiikka
- talletusvakuutus
- säästövakuutuksen hinnoittelu
- vakuutuksen säätöteoreettiset aspektit
- hoivavakuutus

- vahinkovakuutuksen hinnoittelu
- optimointikysymykset kotitaloudessa
- jälleenvakuutuspeli
- finanssisysteemit
- dynaamiset systeemit
- pankkiverkostot
- sovellukset rahoituksen teorioihin

Kiintopistelauseet ovat tärkeitä sekä matematiikan teorian että sovellusten kannalta. Kiintopistealgoritmit, jotka perustuvat kiintopisteen etsinnälle, ovat tärkeitä numeerisessa matematiikassa ja mm. optimoinnissa. Kiintopistealgoritmeja voidaan käyttää mm. epälineaarisen optimoinnin gradienttimenetelmän tukena, kuten Jung (2017) on osoittanut.

Tasapainomalleilla on myös runsaasti vakuutussovelluksia (ks. Voutilainen, 2022), mm. vakuutusmarkkinoiden tasapaino, jälleenvakuutus, asymmetrisen informaation asettamat haasteet vakuutusmarkkinoilla, epäsuotuisa vakuutettavien riskien valikoituminen, monopolistiset / kilpaillut vakuutusmarkkinat, talletusvakuutus, moraalikato, Internet, signalointi, mainekysymykset, lineaarinen tasapaino ja Nashin tasapaino. Taloudellisia tasapainomalleja käytetään toki muillakin kuin vakuutusmarkkinoilla. Tasapainoteoria on läheistä sukua ja oikeastaan osittain jopa päällekkäinen peliteorian kanssa. Peliteoria on myös velkaa kiintopisteteorialle (esim. Nash, 1950, 1951)

Seuraava teoreema on kiintopisteteorian ja samalla tasapainoteorian kulmakiviä:

Banachin kiintopistelause. (Banach, 1922.) Olkoon (X, d) epätyhjä täydellinen metrinen avaruus ja olkoon $f : X \to X$ avaruuden X kontraktio, toisin sanoen on olemassa reaaliluku $0 \leq q < 1$ siten, että $d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y)$ kaikilla $x, y \in X$. Tällöin kuvauksella f on täsmälleen yksi kiintopiste a. Lisäksi kyseinen kiintopiste voidaan löytää seuraavasti: Olkoon x_0 avaruuden X mielivaltainen piste. Määritellään lukujono $x_n = f(x_{n-1})$, $n = 1,2,3,\ldots$ Tämä jono suppenee kohti kiintopistettä a.

Huomattava osa kiintopisteteorian tutkimuksesta viime aikoihin saakka on ollut matematiikan tutkimukselle tyypilliseen tapaan selvittää, kuinka paljon ja miten Banachin kiintopistelauseen oletuksia voidaan lieventää niin että kiintopisteen olemassaolo ja etsintäalgoritmin validiteetti säilyvät. Kontraktion olemassaoloa lievempiä käsitteitä luettelee mm. Voutilainen (2023a), s. 96. Iteroivat menetelmät Banachin kiintopistelauseen mallin mukaan ovat suosittuja kiintopiste- ja tasapainoprobleemojen ratkaisussa.

Lähdeviittaukset

Banach, S. (1922), Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales, *Fundamenta Mathematicae* 1922.

Jung, A. (2017), A Fixed-Point of View on Gradient Methods for Big Data, *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics* 3(18), 11 pp., DOI: 10.3389/fams.2017.00018

Nash, J. (1950). Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36(1), 48-49.

Nash, J. (1951) 'Non-Cooperative Games' *The Annals of Mathematics* 54(2), 286-295

Raj, V. and Piramatchi, T. (2020) Best proximity point theorems in topological spaces, *Journal* *of Fixed Point Theory and Applications* 22(2), doi.org/10.1007/s11784-019-0747-2

Voutilainen, R. (1981) Kauppamatkustajan probleema, lisensiaattitutkimus, Helsingin yliopisto, matematiikan laitos.

Voutilainen. R. (1982) Lineaarisen optimoinnin ellipsoidialgoritmi – teoreettinen läpimurto ei pure kauppamatkustajan probleemaan, *Arkhimedes* 34, 88-96.

Voutilainen, R. (2022) Insurance Equilibria – literature Survey, *Journal of Insurance and Financial Management* 7(3), 65-85.

Voutilainen, R. (2023a) On The Search for Solutions for Equilibrium Problems and Fixed Point Problems, *Journal of Insurance and Financial Management* 7(4), 88-99.

Voutilainen, R. (2023b) Remarks on Fixed Point Approaches to Insurance and Finance, *Journal of Insurance and Financial Management* 7(5), 10-23.