Konforminen Sobolev-kohomologiateoria ja sen sovelluksia

Ilmari Kangasniemi

Kvasisäännöllisten ja muiden avaruutta rajoitetusti vääristelevien kuvausten tutkimuksessa on jo pitkään yhdistelty analyysin ja topologian työkaluja. Yhtenä ilmentymänä tästä olen viime aikoina päätynyt soveltamaan konformista Sobolev-de Rham -kohomologiaa alan tutkimukseen. Konformisen kohomologian perusideat on tunnettu jo Donaldsonin ja Sullivanin kvasikonformisista 4-monistoista kirjoittamassa artikkelissa [3], mutta konformikohomologian suora käyttö on silti ollut rajallisempaa ennen teorian viimeaikaisia sovelluksia. Esittelen tässä kirjoitelmassa lyhyesti, mistä konformisessa kohomologiassa oikein on kyse ja mitä sen avulla on lähivuosina saavutettu.

De Rhamin lause

Algebrallinen topologia pyrkii erottelemaan topologisia avaruuksia algebran keinoin. Tässä ideana on esimerkiksi yhdistää jokaiseen topologiseen avaruuteen X ryhmä $G(X)$, ja jokaiseen jatkuvaan kuvaukseen $f\colon X \to Y$ homomorfismi $f_*\colon G(X) \to G(Y)$ siten, että konstruktio säilyttää funktioiden yhdistämisen ja identtiset kuvaukset. Konstruktiosta seuraa, että homeomorfismi $h\colon X \to Y$ indusoi isomorfismin $h_*\colon G(X) \to G(Y)$. Jos siis jotenkin saadaan pääteltyä, että $G(X)$ ja $G(Y)$ eivät ole isomorfiset, saadaan osoitettua, että X ja Y eivät ole keskenään homeomorfiset.

Yksi tunnetuimpia esimerkkejä tämänlaisesta konstruktiosta ovat *singulaariset homologia- ja kohomologiaryhmät* $H_k(X;\mathbb{K})$ ja $H^k(X;\mathbb{K})$, missä k on ei-negatiivinen kokonaisluku ja $\mathbb{K}$ on kerroinrengas, kuten esimerkiksi $\mathbb{Z}$ tai $\mathbb{R}$. Nämä ryhmät ovat $\mathbb{K}$-moduleja, jotka tietyssä mielessä laskevat k-ulotteisia reikiä annetussa avaruudessa X. Eritoten tapauksessa $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ryhmät $H_k(X;\mathbb{R})$ ja $H^k(X;\mathbb{R})$ ovat vektoriavaruuksia, joiden dimensio vastaa avaruuden X k-ulotteisten reikien määrää. Esimerkiksi jos $X = \mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \ldots, x_l\}$, missä pisteet x_i ovat erillisiä, niin $H_{n-1}(X;\mathbb{Z}) \cong H^{n-1}(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^l$ ja $H_{n-1}(X;\mathbb{R}) \cong H^{n-1}(X;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^l$.

Jokaiseen jatkuvaan kuvaukseen $f\colon X \to Y$ voidaan liittää homologiaryhmien välinen kuvaus $f_*\colon H_k(X;\mathbb{K}) \to H_k(Y;\mathbb{K})$. Kohomologian tapauksessa sen sijaan saadaan vastakkaissuuntainen kuvaus $f^*\colon H^k(Y;\mathbb{K}) \to H^k(X;\mathbb{K})$. Indusoitujen kuvausten ominaisuuksista seuraa, että jos avaruuksien X ja Y homologia- tai kohomologiaryhmät eivät ole keskenään isomorfisia, niin tällöin X ja Y eivät ole homeomorfiset. Kohomologia-avaruuksilla voidaan lisäksi määritellä nk. *kuppitulo* $\cup$, joka tekee $H^*(X;\mathbb{K})$:sta renkaan.

Klassinen *de Rhamin lause* kertoo, että jos avaruus X on sileä monisto M, niin kohomologiaryhmät $H^k(M;\mathbb{R})$ voidaan myös itse asiassa konstruoida täysin analyysin avulla. Tätä varten olkoon $C^\infty(\wedge^k T^*M)$ sileiden k-differentiaalimuotojen avaruus M:llä. Tällöin differentiaalimuotojen ulkoderivaatta antaa kuvausjonon

$$\{0\} \to C^\infty(\wedge^0 T^*M) \xrightarrow{d} C^\infty(\wedge^1 T^*M) \xrightarrow{d} \dots,$$

missä $d \circ d = 0$. Moniston M k:nnes *de Rhamin kohomologia* on tällöin tekijävektoriavaruus

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) = \ker(d_k)/\operatorname{im}(d_{k-1}),$$

missä d_i:llä merkitään sileiden i-muotojen ulkoderivaattaa. Lisäksi kohomologian kuppitulo saadaan itse asiassa muotojen ulkotulosta kaavalla $[\omega_1] \cup [\omega_2] = [\omega_1 \wedge \omega_2]$, ja jos $f\colon M \to N$ on sileä kuvaus, niin kuvaus $f^*\colon H^k(N;\mathbb{R}) \to H^k(M;\mathbb{R})$ saadaan suoraan differentiaalimuotojen pullback-kuvauksesta kaavalla $f^*[\omega] = [f^*\omega]$.

De Rhamin lauseen mukaan $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ ja $H^k(M;\mathbb{R})$ ovat siten luonnollisella tavalla isomorfiset sekä vektoriavaruuksina että renkaina. Näin ollen analyysin avulla konstruoitu $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ oikeasti laskeekin avaruuden topologista ominaisuutta.

Siirtyminen Sobolev-teoriaan

De Rhamin kohomologia soveltuu erinomaisesti sileiden kuvauksien topologisten ominaisuuksien tutkimiseen. Mutta entä jos kuvaus f ei olekaan sileä?

Osoittautuu, että vastaavanlaisen teorian pystyy konstruoimaan myös Sobolev-säännöllisille differentiaalimuodoille. Nimittäin jos ω on lokaalisti integroituva mitallinen k-muoto n-monistolla M, niin sen *heikko ulkoderivaatta* $d\omega$ voidaan määritellä vaatimalla, että

$$\int_M d\omega \wedge \eta = (-1)^{k+1} \int_M \omega \wedge d\eta$$

kaikilla kompaktikantajaisilla sileillä $(n-k-1)$-testimuodoilla η.

Heikon ulkoderivaatan avulla saadaan aikaiseksi muodoille Sobolev-avaruus: määrittelemme, että $\omega \in W^{d,p,q}(\wedge^k T^*M)$ (tai $\omega \in W^{d,p,q}_{\mathrm{loc}}(\wedge^k T^*M)$), jos funktio $|\omega|$ on (lokaalisti) L^p-integroituva, ja ω:lla on heikko ulkoderivaatta $d\omega$ jolle $|d\omega|$ on (lokaalisti) L^q-integroituva. Heikoille ulkoderivaatoille pätee aina $dd\omega = 0$, ja siten voimme muodostaa samanlaisen ketjukompleksin kuin sileässä tapauksessa:

$$\{0\} \to W^{d,p_0,p_1}_{\mathrm{loc}}(\wedge^0 T^*M) \xrightarrow{d} W^{d,p_1,p_2}_{\mathrm{loc}}(\wedge^1 T^*M) \xrightarrow{d} \dots,$$

missä eksponentit p_k ovat jotain reaalilukuja väliltä $[1,\infty]$.

Osoittautuu, että Sobolev-versio tästä de Rhamin kompleksista tuottaa tiettyjen ehtojen toteutuessa täysin identtiset kohomologia-avaruudet kuin sileä versio. Tämän taustalla on sama koneisto joka todistaa alkuperäisen de Rhamin lauseen: nimittäin lyhteet ja lyhdekohomologia, joiden yksityiskohtiin emme suuremmin ehdi paneutua tässä kirjoitelmassa. Koneisto vaatii muutamia ehtoja avaruuksiltamme, joista yksi on se, että jonomme avaruudet ovat oleellisesti lokaalisti määriteltyjä. Globaalien avaruuksien $W^{d,p_k,p_{k+1}}(\wedge^k T^*M)$ käyttäminen näet johtaa täysin erilaiseen teoriaan, jossa kohomologia-avaruuksien laskeminen on huomattavasti hankalampaa, jos M on epäkompakti.

Toinen kriittinen ehto sille, että saataisiin samat kohomologia-avaruudet kuin sileässä tapauksessa, palautuu lopulta siihen, että eksponenteille p_k pätee differentiaalimuotoversio *Sobolev-Poincarén epäyhtälöstä*:

$$\|\omega - \omega_D\|_{L^{p_k}(D)} \leq C_{p_k,p_{k+1},D} \|d\omega\|_{L^{p_{k+1}}(D)},$$

missä D on riittävän sileä rajoitettu $\mathbb{R}^n$:n alue, $\omega \in W^{d,p_k,p_{k+1}}(\wedge^k D)$ ja $\omega_D \in dW^{d,p_k,p_k}(\wedge^{k-1} D)$ on ω:sta riippuva muoto. Tämä epäyhtälö pätee eksponenteille $p_k, p_{k+1} \in (1,\infty)$, jos ne toteuttavat ehdon $p_k^{-1} + n^{-1} \geq p_{k+1}^{-1}$. Rajaeksponenteilla $p_k = \infty$ ja $p_{k+1} = 1$ kuitenkin vaaditaan hieman vahvempi ehto $p_k^{-1} + n^{-1} > p_{k+1}^{-1}$. Yksityiskohtainen käsittely muotojen Sobolev-Poincarén epäyhtälöstä löytyy mm. artikkelista [5].

Konforminen kohomologia ja kvasisäännölliset kuvaukset

Jos M, N ovat reunattomia suunnistettuja Riemannin n-monistoja, niin jatkuva Sobolev-kuvaus $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(M,N)$ on *kvasisäännöllinen*, jos se toteuttaa epäyhtälön

$$|Df|^n \leq K J_f$$

melkein kaikkialla, missä $K \in [1,\infty)$ on vakio. Ehto on yleistys holomorfisuudesta ja johtaa teoriaan, jossa on vastineita useille kompleksianalyysin lauseille. Differentiaalimuotojen kannalta kriittisin kvasisäännöllisten kuvausten ominaisuus on, että jos $f\colon M \to N$ on kvasisäännöllinen ja $\omega \in L^{n/k}_{\mathrm{loc}}(\wedge^k N)$, niin $f^*\omega \in L^{n/k}_{\mathrm{loc}}(\wedge^k M)$. Lisäksi jos $\omega \in W^{d,n/k,n/(k+1)}_{\mathrm{loc}}(\wedge^k T^*N)$, niin $f^*d\omega = df^*\omega$. Siten luonnollisimmin kvasisäännöllisiin kuvauksiin sopiva Sobolev-de Rham -kohomologiateoria käyttää eksponentteja $p_k = n/k$.

Nämä eksponentit $p_k = n/k$ toteuttavat juuri ja juuri edellämainitun Sobolev-Poincarén epäyhtälön kun $k \in \{1,\ldots,n-2\}$. Rajaeksponenteilla $p_0 = \infty$ ja $p_n = 1$ epäyhtälö ei kuitenkaan aivan toimi. Tätä ongelmaa voi kuitenkin halutessaan ryhtyä korjaamaan hyödyntämällä kvasisäännöllisten kuvausten korkeampaa integroituvuutta: jos f on kvasisäännöllinen, niin itse asiassa $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(M,N)$ jollekin $p > n$. Tämän avulla on mahdollista laajentaa tai supistaa joitakin L^p-integroituvuusehtoja kompleksissa hieman, ja silti pysyä luokassa joka säilyy kvasisäännöllisten kuvausten pull-backissa. Esimerkkejä tällaisista muokkauksista löytyy artikkeleista [3] ja [9]. Artikkelin [3] muokkaukset säilyttävät myös sen ominaisuuden, että kohomologian kuppitulo $\cup$ saadaan laskettua muotojen ulkotulolla $\wedge$. Toisaalta artikkelin [9] muokkaukset säilyttävät $W^{d,n/k,n/(k+1)}_{\mathrm{loc}}$-avaruudet muuttumattomina mahdollisimman suuressa osassa kompleksia.

Näitä muokattuja Sobolev-de Rham -kohomologiateorioita voidaan kollektiivisesti kutsua *konformisiksi kohomologiateorioiksi*, ja niiden yhteispeli kvasisäännöllisten kuvausten kanssa on suunnilleen yhtä sujuvaa kuin alkuperäisen de Rhamin kohomologian yhteispeli sileiden kuvausten kanssa.

Erittelemme nyt tämän kohomologian sovelluskohteita kvasisäännöllisten ja muiden samankaltaisten kuvausten tutkimuksessa.

Kvasisäännöllinen elliptisyys

Jos kvasisäännöllinen kuvaus $f\colon M \to N$ on *ankara* (engl. "proper"), eli jos $f^{-1}K$ on kompakti jokaiselle kompaktille $K \subset N$, niin pull-backille $f^*\colon L^{n/k}_{\mathrm{loc}}(\wedge^k N) \to L^{n/k}_{\mathrm{loc}}(\wedge^k M)$ voidaan määritellä toispuoleinen käänteiskuvaus $f_*\colon L^{n/k}_{\mathrm{loc}}(\wedge^k M) \to L^{n/k}_{\mathrm{loc}}(\wedge^k N)$ siten, että $f_* d = df_*$ ja $f_* f^* = \mathrm{id}$. Tällöin erityisesti $f^*\colon H^*(N;\mathbb{R}) \to H^*(M;\mathbb{R})$ on injektiivinen. Huomattavaa on, että jos M and N ovat suljettuja monistoja (eli kompakteja reunattomia monistoja), niin f on automaattisesti ankara. Teoria antaa siten välittömän rajoitteen suljettujen monistojen välisille kvasisäännöllisille kuvauksille: sellainen kuvaus $f\colon M \to N$ voi olla olemassa vain, jos $H^*(N;\mathbb{R})$ on isomorfismia vaille $H^*(M;\mathbb{R})$:n aliavaruus.

Teorian soveltaminen tulee kuitenkin huomattavasti hankalammiksi kun M on epäkompakti, sillä tällöin kuvauksesta f^* ei pysty suoraan sanomaan mitään samankaltaista kuin suljettujen monistojen tapauksessa ilmenevä injektiivisyys. Tässä kontekstissa eniten tutkittu kysymys on, että mille yhtenäisille kompakteille suunnistetuille monistoille N on olemassa vakiosta poikkeava kvasisäännöllinen kuvaus $f\colon \mathbb{R}^n \to N$. Tällöin N:n sanotaan olevan *kvasisäännöllisesti elliptinen.*

Merkittäviä kohomologisia rajoitteita kvasisäännöllisesti elliptisille monistoille ovat osoittaneen ensin Bonk ja Heinonen [2], ja sittemmin Prywes [11]. Prywesin vihdoin saavuttama tulos on, että jos N on kvasisäännöllisesti elliptinen, niin kohomologia-avaruus $H^*(N;\mathbb{R})$ on $H^*(\mathbb{T}^n;\mathbb{R})$:n vektorialiavaruus, missä $\mathbb{T}^n$ on n-torus. Näissä tuloksissa ei ole suoraan käytetty Sobolev-kohomologiateorioita, mutta Sobolev-kohomologian perusideat ovat silti huomattavassa roolissa todistuksissa.

Tasaisesti kvasisäännölliset kuvaukset

Sobolev-kohomologian hyödyt tulevat selvemmin ilmi tutkittaessa tasaisesti kvasisäännöllisiä kuvauksia. Kvasisäännöllinen itsekuvaus $f\colon M \to M$ on *tasaisesti kvasisäännöllinen*, jos sen jokainen iteraatti $f \circ f \circ \cdots \circ f$ on K-kvasisäännöllinen samalla K:n arvolla. Tämä on huomattavasti tavallista kvasisäännöllisyyttä vahvempaa, sillä tavallista kvasisäännöllistä kuvausta iteroidessa parhaan mahdollisen K:n arvo yleensä kasvaa.

Jos M on suljettu suunnistettu yhtenäinen Riemannin n-monisto, niin sanomme sen olevan *tasaisesti kvasisäännöllisesti elliptinen*, jos löytyy vakiosta poikkeava epäinjektiivinen tasaisesti kvasisäännöllinen $f\colon M \to M$. Tämä ominaisuus on läheisesti kytköksissä kvasisäännölliseen elliptisyyteen: jokainen tasaisesti kvasisäännöllisesti elliptinen monisto on kvasisäännöllisesti elliptinen.

Konformisen kohomologian soveltaminen tasaisesti kvasisäännöllisen elliptisyyden tutkimiseen alkoi yhteisprojektissani Pankan kanssa [9], ja jalostui edelleen kahdessa myöhemmässä julkaisussa [7, 6]. Teorian kulminaationa löytyi ensimmäinen rajoite, joka osoittaa tasaisesti kvasisäännöllisen elliptisyyden olevan aidosti kvasisäännöllistä elliptisyyttä voimakkaampi ominaisuus. Rajoite, joka ratkaisi tämän, on seuraava [6]:

Lause 1. *Olkoon M suljettu yhtenäinen suunnistettu Riemannin n-monisto. Jos M on kvasisäännöllisesti elliptinen, niin $H^*(M, \mathbb{R})$ on algebraisomorfismia vaille $\mathbb{R}^n$:n ulkoalgebran $\wedge^* \mathbb{R}^n$ alialgebra. Lisäksi tämä alialgebra on suljettu $\mathbb{R}^n$:n standardin Cliffordin tulon suhteen.*

Viimeinen Cliffordin tuloon liittyvä ominaisuus osoittautuu suureksi erontekijäksi kvasisäännöllisen ja tasaisesti kvasisäännöllisen elliptisyyden välillä. Nimittäin Rickman [12] on osoittanut, että monisto $M = (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)\#(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$ on kvasisäännöllisesti elliptinen. Clifford-tuloon perustuva rajoite taas osoittaa, että M ei voi olla tasaisesti kvasisäännöllisesti elliptinen.

Tulokset perustuvat vahvasti siihen, että tutkitaan itsekuvauksen $f^* \colon H^k(M; \mathbb{R}) \to H^k(M; \mathbb{R})$ ominaisarvoja. Kohomologiaan indusoitu kuvaus f^* näet osoittautuu kompleksisesti diagonalisoituvaksi, ja siten kohomologia-avaruudelle löytyy kompleksinen kanta kuvauksen f^* ominaisvektoreita. Toinen avain todistukseen on tutkia muotoja, joilla on minimaalinen $L^{n/k}$-normi kohomologialuokassa; nämä muodot ovat p-harmonisia arvolla $p = n/k$. Eritoten jos minimointi tehdään oikean f-invariantin (mitallisen) metriikan g_f suhteen, niin f^* itse asiassa kuvaa minimoivat muodot toisille minimoiville muodoille. Seuraa, että jokainen kompleksinen konformikohomologian ominaisvektoriluokka $c \in H^k(M; \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$ tuottaa kompleksikertoimisen muodon $\omega \in L^{n/k}(\wedge^k T^* M \otimes \mathbb{C})$, jolle $f^* \omega = \lambda \omega$. Tulokset seuraavat näiden muotojen säännöllisyysominaisuuksien tutkimisesta.

Todistus itse asiassa johtaa lopulta tilanteeseen, jossa tasaisesti kvasisäännöllisesti elliptisellä monistolla metriikan g_f suhteen (n/k)-harmoniset k-muodot muodostavat algebran. Tämä on hyvin yllättävä ja rajoittavalta vaikuttava ominaisuus: muotojen (n/k)-harmoninen yhtälö on epälineaarinen kun $k \neq 2$, mutta tasaisesti kvasisäännöllinen kuvaus silti pakottaa ratkaisut säilymään yhteenlaskussa. Tämä myös paljastaa yhteyden Kotschickin [10] määrittelemiin *geometrisesti formaaleihin monistoihin*, jotka ovat monistoja, joilla on metriikka g, jonka suhteen harmoniset muodot muodostavat algebran. Koska todistetut kohomologiset rajoitteet seuraavat itse asiassa täysin näistä (n/k)-harmonisten muotojen säilymisominaisuuksista, ollaan siis päädytty jonkinlaiseen konformivastineeseen geometrisesti formaalien monistojen teorialle.

Äärellisen väännön kuvaukset

Alkuvuodesta valmistuneessa yhteisprojektissa Onnisen kanssa on myös löytynyt sovellus konformiselle kohomologialle äärellisen väännön kuvausten teoriassa [8]. *Äärellisen väännön kuvaus* $f \colon M \to N$ on kvasisäännöllisen kuvauksen yleistys, joka toteuttaa muutoin saman ehdon $|Df|^n \leq K J_f$ melkein kaikkialla, mutta tällä kertaa $K \colon M \to [1, \infty)$ on mitallinen kuvaus. Äärellisen väännön kuvauksien teoria on hyvin samankaltainen kuin kvasisäännöllisten kuvausten, mutta tulokset vaativat jonkin minimioletuksen K:n integroituvuudesta, kuten esim. $K^p \in L^1_{\mathrm{loc}}(M)$ tai $\exp(pK) \in L^1_{\mathrm{loc}}(M)$ jollakin tietyllä $p \in (0, \infty)$.

Sovelluksen mielenkiinto on kuitenkin siinä, että se avaa osan äärellisen väännön kuvausten teoriaa, jolle ei ole varsinaista kvasisäännöllisten kuvausten vastinetta. Keskitymme tuloksessa nk. monotonisiin äärellisen väännön kuvauksiin: jatkuva kuvaus $f\colon M \to N$ on *monotoninen*, jos $f^{-1}\{y\}$ on yhtenäinen kaikilla $y \in N$. Vakiosta poikkeava monotoninen kvasisäännöllinen kuvaus on aina homeomorfismi. Sama pätee monotonisille äärellisen väännön kuvauksille $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, jos $K^{n-1} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Tätä pienemmillä eksponenteilla kuitenkin herää seuraava kysymys: millaisia monotonisen äärellisen väännön kuvaukset pistealkukuvat $f^{-1}\{y\}$ voivat olla kun $K^p \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ jollakin $p < n-1$?

Alkupisteen tässä antaa Henclin ja Malýn tulos [4], jonka mukaan annetulla $q \in (0, n-1]$ saamme, että $f^{-1}\{y\}$:n Hausdorff q-mitta häviää, jos $K^{(n-q)/q} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Tämä ei kuitenkaan ole ainoa rajoitus. Nimittäin Bing [1] on konstruoinut $\mathbb{R}^3$:ssa monotonisen kuvauksen, jolla on lenkkejä muodostavia pistealkukuvia. Saimme Onnisen kanssa tarkistettua, että tällä kuvauksella on äärellisen väännön Lipschitz-edustaja, jolle $K^p \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ kun $p < 1/2$.

Henclin ja Malýn rajoitus yksinään sallisi huomattavasti korkeamman integroituvuuden tämän esimerkin K:lle. Sen sijaan konforminen kohomologia paljastaa, miksi esimerkki ei voi saavuttaa ehtoa $K^{1/2} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$. Tämä näet johtuu seuraavasta rajoitteesta [8]:

Lause 2. *Jos $f\colon \Omega \to \Omega'$ on ankara monotoninen surjektiivinen äärellisen väännön kuvaus $\mathbb{R}^n$:n yhtenäisten alueiden välillä, ja jos $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, niin jokaiselle $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ on olemassa sellainen rajaeksponentti $p = p(n,k) \in [0, n-1)$, että jos $K^p \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, niin $H^k(f^{-1}\mathbb{B}^n(x,r); \mathbb{R}) \cong H^k(\mathbb{B}^n(x,r); \mathbb{R})$ aina kun $\overline{\mathbb{B}^n(x,r)} \subset \Omega'$.*

Kun $k \in \{0, n-1, n\}$, niin $p = 0$ täysin topologisista syistä. Kun $n = 3$ ja $k = 1$, niin rajaeksponentti on $p = 1/2$, ja tämän rajaeksponentin tarkkuus seuraa Bingin esimerkin Lipschitz-versiosta. Yleisesti todistuksen antamat rajaeksponentit noudattavat lainalaisuutta, jonka näkee seuraavasta taulukosta. Dimensioissa $n > 3$ emme tiedä ovatko saadut rajaeksponentit tarkkoja vai eivät.

$n=2$	0	0	0							
$n=3$	0	$\frac{1}{2}$	0	0						
$n=4$	0	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{2}$	0	0					
$n=5$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0				
$n=6$	0	$\frac{4}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{3}$	0	0			
$n=7$	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	0	0		
$n=8$	0	$\frac{6}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{3}$	0	0	
$n=9$	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{3}$	0	0

Kuva 1: Lauseen 2 antamia rajaeksponentteja eri n:n ja k:n arvoilla.

Miten tätä rajoitetta sitten voi soveltaa pistealkukuviin $f^{-1}\{y\}$? Esimerkiksi jos $f^{-1}\{y\}$ on sileästi upotettu $\mathbb{S}^1$, niin tällöin riittävän pienillä r joukolla $f^{-1}\mathbb{B}^n(y,r)$ täytyy olla epätriviaali 1-kohomologia, oleellisesti koska $\mathbb{S}^1$:llä on myös epätriviaali 1-kohomologia. Tämä on kuitenkin mahdotonta, jos $H^1(f^{-1}\mathbb{B}^n(x,r)) \cong H^1(\mathbb{B}^n(x,r))$. Näin ollen tulos rajoittaa sellaisten $f^{-1}\{y\}$:n topologioiden esiintymistä, joiden poikkeamat yksittäisestä pisteestä näkyvät myös $f^{-1}\{y\}$:n pienissä ympäristöissä.

Rajoitteen todistus myös tuo pari uutta vivahdetta konformikohomologian soveltamiseen. Ensinnäkin todistus perustuu siihen, että saadaan ensin kuvaus f_* tavalliselta de Rhamin kohomologialta konformiselle kohomologialle, ja sitten kuvaus f^* konformiselta kohomologialta $W^{d,1,1}_{\mathrm{loc}}$-avaruuksien kohomologialle. Rajaeksponentit ovet pienimmät mahdolliset arvot, joilla nämä kuvaukset toimivat, ja kuvausten f_* ja f^* toimiminen on itse asiassa hyvin riippuvaista siitä, että käytämme välissä juuri konformista kohomologiaa.

Toinen erikoisuus on, että sama todistus tehdään sekä tavallisella kohomologialla, että *kompaktikantajaisella kohomologialla*. Nimittäin käyttämällä kompaktikantajaisia muotoja de Rham-tyyppisissä komplekseissa, saadaan kohomologia-avaruudet $H^k_c(M;\mathbb{R})$, jotka yhtenäisillä suunnistetuilla M ovat itse asiassa isomorfiset avaruuksien $H^{n-k}(M;\mathbb{R})$ kanssa. Todistus kompaktikantajaisella kohomologialla antaa paremman rajan pienillä k, kun taas todistus tavallisella kohomologialla antaa paremman rajan suurilla k. Taulukkoon kerätyt rajaeksponentit ovat siten saatu valitsemalla näistä kahdesta rajasta parempi, mikä selittää taulukon nollasta poikkeavien lukujen keskeissymmetrian.

Viitteet

[1] R. H. Bing. Decompositions of E^3. Kokoelmassa *Topology of 3-manifolds and related topics*, editoinut M. K. Fort. Prentice-Hall, 1962.

[2] M. Bonk ja J. Heinonen. Quasiregular mappings and cohomology. *Acta Math.*, 186(2):219–238, 2001.

[3] S. Donaldson ja D. Sullivan. Quasiconformal 4-manifolds. *Acta Math.*, 163(1):181–252, 1989.

[4] S. Hencl ja J. Malý. Mappings of finite distortion: Hausdorff measure of zero sets. *Math. Ann.*, 324:451–464, 2002.

[5] T. Iwaniec ja A. Lutoborski. Integral estimates for null Lagrangians. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 125(1):25–79, 1993.

[6] I. Kangasniemi. Conformally formal manifolds and the uniformly quasiregular non-ellipticity of $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)\#(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$. *Adv. Math.*, 393, 2021.

[7] I. Kangasniemi. Sharp cohomological bound for uniformly quasiregularly elliptic manifolds. *Amer. J. Math*, 143(4):1079–1113, 2021.

[8] I. Kangasniemi ja J. Onninen. Fibers of monotone maps of finite distortion. *J. Geom. Anal.*, 2022. Verkkojulk. ennen painoa, https://doi.org/10.1007/s12220-022-01038-3.

[9] I. Kangasniemi ja P. Pankka. Uniform cohomological expansion of uniformly quasiregular mappings. *Proc. London Math. Soc.*, 118:701–728, 2019.

[10] D. Kotschick. On products of harmonic forms. *Duke Math. J.*, 107(3):521–531, 2001.

[11] E. Prywes. A bound on the cohomology of quasiregularly elliptic manifolds. *Ann. of Math.*, 189(3):863–883, 2019.

[12] S. Rickman. Simply connected quasiregularly elliptic 4-manifolds. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 31:97–110, 2006.