ARTIKKELIT

KONTRAKTIO JA SEN JOHDANNAISET

Raimo Voutilainen

Banachin kiintopistelauseen keskeisenä sisältönä on kontraktion käsite, ja kontraktion käyttö kiintopisteen etsinnässä. Tässä kirjoituksessa esitellään eräitä kontraktion johdannaisia ja niiden merkitystä kiintopisteteoriassa. Myös eräitä muita mielenkiintoisia viimeaikaisia kiintopistelauseita esitellään.

JOHDANTO

Kiintopisteteorian varhaiset kulmakivet ovat Brouwerin (1912) kiintopistelause euklidisille avaruuksille ja Banachin (1922) kiintopistelause täydellisille metrisille avaruuksille. Sen jälkeen esitettyjä kiintopistelauseita on esitellyt mm. Voutilainen (2023). Uudemmassa kiintopiste-kirjallisuudessa Banachin esittämää kontraktion käsitettä on yleistetty siten, että kiintopisteen olemassaolo ja sen etsintäalgoritmi on pystytty muotoilemaan mahdollisimman yleisellä tasolla. Tämän kirjoituksen tarkoituksena on esitellä eräitä tällaisia lauseita ja muutamia muitakin viime aikoina todistettuja kiintopistelauseita. Niissä käytetään runsaasti mm. funktionaalianalyysin käsitteistöä. Aluksi käsitellään kontraktiota ja eräitä sen ominaisuuksia. Kirjoituksen pääsisältönä ovat lauseet 2-8. Ennen kutakin lausetta esitellään sen tarvitsemia määritelmiä. Lauseet ovat peräisin julkaisuista Wang ja Zhou (2011), Kurnam ja Katchang (2012), Ungchittrakool ja Jarernsuk (2012), Kim (2011), Suantai ym. (2016) ja Shukla ja Panicker (2022).

Aloitetaan määrittelemällä metrinen avaruus:

Määritelmä 1. Metrinen avaruus on pari (X, d) missä X on joukko ja d reaaliarvoinen kuvaus (ns. metriikka eli etäisyysfunktio), joka kaikilla joukon X alkioillax, y ja z toteuttaa ehdot

1. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$,
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,x) = 0$,
4. $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

Metristä avaruutta $(X, d))$ kutsutaan usein vain metriseksi avaruudeksi X, jos käytössä oleva metriikka on asiayhteydestä selvä.

Vektoriavaruus on tunnetusti metrinen avaruus. Saadaan tärkeä uusi käsite, *Banachin avaruus*:

Määritelmä 2. Banachin avaruus on vektoriavaruus, jossa jokainen Cauchyn jono suppenee. (Cauchyn jono on tavallisen suppenevan jonon yleistys.) Metristä avaruutta, jonka jokainen Cauchyn jono suppenee, sanotaan *täydelliseksi.*

Määritelmä 3. Olkoon V vektoriavaruus, jonka skalaarikunta on F (reaaliluvut R tai kompleksiluvut C). Sisätulo on kuvaus $(\cdot,\cdot)$: $V \times V \to F$, joka toteuttaa aksioomat:

1. $(f, g) = (g, f)^*$ kaikilla $f, g \in V$ (konjugaattisymmetrisyys; symboli * on komplek sikonjugaatti),
2. $(af, g) = a(f, g)$ kaikilla $a \in F$, $f, g \in V$ja $(f, g + h) = (f, g) + (f, h)$ kaikilla $f, g, h \in V$ (seskvilineaarisuus).
3. $(f, f) \geq 0$ kaikilla $f \in V$ (ei-negatiivisuus)
4. $(f, f) = 0 \Rightarrow f = 0$ (ei-degeneratiivisuus).

Vektoriavaruus varustettuna sisätulolla on *sisätuloavaruus*.

Määritelmä 4. Hilbertin avaruus on täydellinen sisätuloavaruus. Hilbertin avaruus on siis vektoriavaruus, jossa jokainen Cauchyn jono suppenee sisätulon indusoimalla metriikalla mitaten.

Tässä kirjoituksessa tarkastellaan erilaisia tapoja lieventää kontraktion ehtoja siten, että kiintopisteen olemassaolo ja sen kanssa sukua olevat olemassaolokysymykset pysyvät voimassa ja ao. tehtäville voidaan laatia ratkaisualgoritmit. Ensin annetaan kontraktion määritelmä yksinkertaisen reaalifunktion tapauksessa ja sitten yleisesti.

Määritelmä 5. Funktio $f : R \to R$ on kontraktio, jos riippumatta luvuista $x, y \in R$ on olemassa $0 \leq q < 1$ siten, että

$$|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|.$$

Yleisemmällä tasolla kontraktio määritellään kahden metrisen avaruuden välisenä funktiona. Tällöin yo. määritelmässä korvataan vain erotusten itseisarvot metriikoilla: (https://fi.wikipedia.org/wiki/Kontraktio) funktio $f : X \to Z$ on kontraktio, jos riippumatta pisteistä $x, y \in X$ on olemassa $0 \leq q < 1$ siten, että $dZ(f(x), f(y)) \leq qdX(x, y)$ missä dZ ja dX ovat avaruuksien Z ja Xmetriikat, vastaavasti. Kontraktiosta käytetään joskus nimitystä "kutistus".

KONTRAKTIO JA DERIVAATTA

Jakamalla määritelmän 5 ensimmäinen epäyhtälö $|x - y|$:llä saadaan vasemmalle puolelle f:n erotusosamäärä. Helposti voidaan todistaa

Lause 1. Olkoon $f : I \to R$ derivoituva, missä $I \subset R$ on väli. Tällöin f on kontraktio jos ja vain jos

$$\sup_{x \in I} |f'(x)| < 1.$$

Määritelmä 6. Olkoon C Hilbertin avaruuden$H$ suljettu konveksi osajoukko, ja olkoon $S : C \to H$ kuvaus. Jos C:ssä on alkio x siten, että $x = S(x)$, x on S:n *kiintopiste*. S:n kiintopisteiden joukkoa merkitään $F(S)$:llä.

Kiintopiste ei ole aina yksikäsitteinen, vaan kiintopisteitä voi olla jopa ääretön määrä. Toisaalta kiintopisteitä ei yleisessä tapauksessa tarvitse olla lainkaan. Kiintopistelauseet kertovat kiintopisteprobleeman ratkaisusta eli kysymyksestä kiintopisteen tai -pisteiden olemassaolosta tiettyjen ehtojen vallitessa. Kiintopiste määritellään usein euklidista avaruutta yleisemmissä avaruuksissa kuten Banachin avaruudessa tai Hilbertin avaruudessa, joskus jopa yleisessä topologisessa avaruudessa, jossa ei ole määritelty etäisyyttä (Raj ja Piramatchi, 2020).

Määritelmä 7. Olkoon Φ funktio $C \times C \to R$. Tasapainoprobleemassa Φ:lle on löydettävä piste $x \in C$ siten, että $\Phi(x, y) \geq 0$ kaikilla$y \in C$. Sellaisten ratkaisujen joukkoa merkitään $EP(\Phi)$:llä.

KONVERGENSSILAUSEITA

Kiintopisteteorian peruslause, jonka muunnoksia on viimeisten sadan vuoden aikana rakenneltu, on seuraava:

Lause 2. Banachin kiintopistelause. (Banach, 1922.) Olkoon (X, d) epätyhjä täydellinen metrinen avaruus ja olkoon $f : X \to X$ avaruuden X kontraktio. Tällöin kuvauksella $f$on täsmälleen yksi kiintopiste a. Lisäksi kyseinen kiintopiste voidaan löytää seuraavasti: Olkoon x_0 avaruuden X mielivaltainen piste. Määritellään lukujono $x_n = f(x_{n-1})$, $n = 1,2,3,\ldots$ Tämä jono suppenee kohti kiintopistettä a.

Voidaksemme formuloida kirjallisuudesta löytyviä kontraktiokuvauksen yleistäviä lauseita meidän on annettava joukko uusia määritelmiä:

Määritelmä 8. Olkoon$C$ Hilbertin avaruuden H suljettu konveksi osajoukko. Kuvausta S kutsutaan *laajentumattomaksi* (”nonexpansive”), jos $\|S(x) - S(y)\| \leq \|x - y\|$kaikilla $x, y \in C$.

Kuvausta S kutsutaan *asymptoottisesti laajentumattomaksi* (”asymptotically nonexpansive”), jos on olemassa jono $\{k_n\} \subset [1,\infty)$ jossa $k_n \to 1$ siten, että $\|S^n(x) - S^n(y)\| \leq \|x - y\|$ kaikilla $x, y \in C$ ja $n \geq 1$.

Kuvausta S kutsutaan *κ-tiukaksi pseudokontraktioksi* (“κ-strict pseudo-contraction”) jos on olemassa vakio κ siten, että $0 \leq \kappa < 1$ ja

$$\|S(x) - S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \kappa\|(x - y) - S(x) - S(y)\|^2$$

kaikilla $x, y \in C$.

Kuvausta S kutsutaan *asymptoottisesti κ-tiukaksi pseudokontraktioksi*, jos on olemassa vakio κ siten, että$0 \leq \kappa < 1$ ja jono $\{v_n\} \subset [0,\infty)$ siten, että $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ ja

$$\|S^n(x) - S^n(y)\|^2 \leq (1 + v_n)\|x - y\|^2 + \kappa\|(x - y) - S^n(x) - S^n(y)\|^2$$

kaikilla $x, y \in C$ ja $n \geq 1$.

Huomautus. Jatkossa P on *(metrinen) projektio*. Ks. esim. Metric projection ja Chebyshev set.

Lause 2. Olkoon C Hilbert-avaruuden H epätyhjä suljettu osajoukko, olkoon T asymptoottisesti κ-tiukka pseudokontraktio siten, että $\{v_n\} \subset (0,\infty)$, $v_n \to 0$ kun $n \to \infty$ ja $F(T) \neq \emptyset$. Olkoot $\{x_n\}$ ja $\{u_n\}$ jonoja, jotka määrittelevät alkuarvo $x_1 = x \in H$ ja yhtälöt

$$\begin{aligned}
z_n &= \theta_n x_n + (1 - \theta_n)P_C(x_n),\\
w_n &= \sigma_n x_n + (1 - \sigma_n)(\beta_n I + (1 - \beta_n)T^n)(z_n),\\
C_n &= \{v \in C : \|w_n - v\| \leq \|x_n - v\|\},\\
D_n &= \cap_{j=1}^n C_j,\\
x_{n+1} &= P_{D_n}(x), \text{ kaikilla } n \geq 1,
\end{aligned}$$

missä $\{\theta_n\} \subset (0,1)$, $\{\sigma_n\} \subset [0,a]$, missä $0 < a < 1$, ja $\{\beta_n\} \subset [k, k']$, missä $k < k' < 1$.

Tällöin $\{x_n\}$ suppenee vahvasti kohti pistettä $P_{F(T)}(x)$.

Todistus. Ks. Wang ym. (2011). Kyseesä on artikkelin päälauseen toinen korollaari.

Huomautus. Wang ym. todistavat kolme Hilbertin avaruuden konvergenssilausetta.

Määritelmä 9. kuvauksen $C \to C$ perhettä $S = \{S(s) : 0 \leq s < \infty\}$ kutsutaan C:n *laajentumattomaksi puoliryhmäksi*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot :

(i) $S(0)(x) = x$ kaikilla $x \in C$,

(ii) $S(s + t) = S(s)S(t)$ kaikilla $s, t \geq 0$

,

(iii) $\|S(s)(x) - S(s)(y)\| \leq \|x - y\|$
kaikilla $x, y \in C$ |, ja $s \geq 0$,

(iv) Kaikilla $x \in C$ funktio
$s \mapsto S(s)(x)$ on jatkuva

Merkitään $F(S)$:llä perheen S yhteisten kiintopisteiden joukkoa eli

$$F(S) = \cap_{s \geq 0} F(S(s)).$$

Määritelmä 10. Kuvaus $A : C \to H$ on *α-käänteisesti vahvasti monotoninen* ("α-inverse-strongly monotone"), jos on olemassa positiivinen reaaliluku α siten, että

$$A(x) - A(y), x - y) \geq \alpha \|A(x) - A(y)\|$$

kaikilla $x, y \in C$.

Määritelmä 11. Kuvausten $\{V_i : C \to C\}$ perhettä ($i = 1, \ldots, \infty$) kutsutaan *tasaisesti k-tiukkojen pseudokontraktioiden perheeksi*, jos on olemassa vakio $k \in [0,1)$ siten, että

$$\|V_i(x) - V_i(y)\|^2 \geq \|x - y\|^2 + k\|(1 - v_i)(x) - (1 - V_i)(y)\|^2$$

kaikilla $x, y \in C$ ja kaikilla $i \geq 1$.

Lause 3. Olkoon C reaalisen Hilbertin avaruuden H epätyhjä suljettu konveksi osajoukko, olkoot kuvaukset $S = \{S(s) : 0 \leq s < \infty\}$ C:n laajentumaton puoliryhmä ja olkoon $\{t_n\}$ positiivinen reaalinen hajaantuva jono. Oletetaan, että $F(S) \neq \varnothing$ Olkoon $\{x_n\}$ jono, jolle pätee

$$x_0 \in C,\ C_{l,i} = C,\ C_l = \cap_{i=1}^{\infty} C_{l,i}\ x_1 = P_{C_l}(x_0)$$

ja

$$\gamma_{n,i} = \alpha_{n,i} x_0 + (1 - \alpha_{n,i})(1/t_n) \int_0^{t_n} S(x_n) ds,$$
$$C_{n+1,i} = \{z \in C_{n,i} : \|\gamma_{n,i} - z\|^2 \leq \|xn - z\|^2$$
$$+\alpha_{n,i}(\|x_0\|^2 + 2(x_n - x_0, z))\}$$
$$C_{n+1} = \cap_{i=1}^{\infty} C_{n+1,i},$$
$$x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(x_0)$$

kaikille $n \geq 0$ ja $\{\alpha_{n,i}\}_{n=1}^{\infty} \subset (0,1)$ ja $\lim_{n\to\infty} \alpha_{n,i} = 0$ kaikilla$i \geq 1$.

Tällöin $\{x_n\}$ suppenee vahvasti kohti pistettä $P_{F(S)}(x_0)$.

Todistus. Ks. Kurnam ja Katchang (2012), korollaari 4.1.

Lause 4. Olkoon C reaalisen Hilbertin avaruuden H epätyhjä suljettu konveksi osajoukko, ja olkoon $\{V_i : C \to C\}_{i=1}^{\infty}$ tasaisesti k-tiukkojen pseudokontraktioiden numeroituva perhe. Olkoon edelleen$\{T_i : C \to C\}_{i=1}^{\infty}$ laajentumattomien kuvausten numeroituva perhe, jolle

$$T_i(x) = tx + (1 - t)V_i(x)$$

kaikilla $x \in C$, kaikilla $i \geq 1$ ja $t \in [k,1)$. Olkoon myös$\theta = \cap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \varnothing$. Olkoon $\{x_n\}$ jono, jolle pätee

$$x_0 \in C,\ C_{l,i} = C,\ C_l = \cap_{i=1}^{\infty} C_{l,i}\ x_1 = P_{C_l}(x_0)$$

ja

$$\gamma_{n,i} = \alpha_{n,i} x_0 + (1 - \alpha_{n,i}) W_n(x_n),$$
$$C_{n+1,i} = \{z \in C_{n,i} : \|\gamma_{n,i} - z\|^2 \leq \|xn - z\|^2$$
$$+\alpha_{n,i}(\|x_0\|^2 + 2(x_n - x_0, z))\}$$
$$C_{n+1} = \cap_{i=1}^{\infty} C_{n+1,i},$$
$$x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(x_0)$$

kaikille $n \geq 0$ ja $\{\alpha_{n,i}\}_{n=1}^{\infty} \subset (0,1)$ ja $\lim_{n\to\infty} \alpha_{n,i} = 0$ kaikilla $i \geq 1$. Kuvauksen $W_n : C \to C$ määrittelevät jono $\{T_i\}$ ja jono $\{\mu_i\}$ ei-negatiivisia lukuja välillä [0,1], ks. tarkemmin Kurnam ja Katchang (2012), kaavat 19 ja 20. Tällöin $\{x_n\}$ suppenee vahvasti kohti pistettä $P_\theta(x_0)$.

Todistus. Ks. Kurnam ja Katchang (2012), korollaari 4.2.

Palautetaan mieleen seuraava määritelmä.

Määritelmä 12. Olkoot annettuina kaksi metristä avaruutta (X, dX) ja (Y, dY). Funktio $f : X \to Y$ on *Lipschitz-jatkuva*, jos on olemassa reaaliluku $K \geq 0$ siten, että kaikille $x_1, x_2 \in X$ pätee:

$$dY(f(x_1), f(x_2)) \leq KdX(x_1, x_2).$$

Lukua K sanotaan funktion f *Lipschitz-vakioksi*, ja K:n voidaan myös sanoa olevan K-Lipschitz. Jos $K = 1$, f on laajentumaton. Jos $0 \leq K < 1$ ja f kuvaa metrisen avaruuden itselleen, f on kontraktio.

Määritelmä 13. Olkoot E reaalinen Banach-avaruus , E^* E:n duaaliavaruus ja C E:n epätyhjä suljettu konveksi osajoukko. Olkoon Θ funktio $C \times C \to R$, $\phi : C \to R$ reaaliarvoinen funktio ja $A : C \to E$ epälineaarinen kuvaus. *Yleistetyssä sekoitetussa tasapainoprobleemassa* on löydettävä $x \in C$ siten, että

$$\Theta(x, y) + A(x), y - x) + \phi(y) - \phi(x) \geq 0$$

kaikilley $\in C$.

Tämän tehtävän ratkaisujen joukkoa merkitään $GMEP(\Theta, A, \phi)$:llä, ts.

$$\begin{aligned} GMEP(\Theta, A, \phi) = \{x \in C : \Theta(x, y) + (A(x), y - x) \\ + \phi(y) - \phi(x) \geq 0 \,\forall\, y \in C\} \end{aligned}$$

Lause 5. Olkoon C reaalisen Hilbertin avaruuden H epätyhjä suljettu konveksi osajoukko, ja olkoon $T : C \to C$ L-Lipschitz pseudokontraktio. Olkoon Θ funktio $C \times C \to R$ siten, että seuraavat ehdot (A1) – (A4) ovat voimassa:

(A1) $\Theta(x, x) = 0$ kaikilla $x \in C$.

(A2) Θ on monotoninen, ts.

$$\Theta(x, y) + \Theta(y, x) \leq 0$$

kaikilla $x, y \in C$.

(A3) kaikilla $x, y, z \in C$,

$$\lim_{t \to 0+} \Theta(tz + (1 - t)x, y) \leq \Theta(x, y)$$

(A4) kaikille $x \in C$, $y \mapsto \Theta(x, y)$ on konveksi ja alaspäin puolijatkuva.

Olkoon edelleen $\phi : C \to R$ alaspäin puolijatkuva ja konveksi funktio sekä $A : C \to H$ jatkuva ja monotoninen kuvaus siten, että

$$\Omega = F(T) \cap GMEP(\Theta, A, \phi) \neq \varnothing$$

Olkoot $x_0 \in H$, $C_1 = C$ ja $x_1 = P_{C_1}(x_0)$. Määritellään jono $\{x_n\} \in C$ seuraavasti:

$$\begin{aligned} y_n &= (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(z_n), \\ z_n &= (1 - \beta_n)x_n + \beta_n u_n, \\ u_n \in C&: \Theta(u_n, y) + (A(u_n), y - u_n) + \phi(y) - \phi(u_n) \\ &\quad + (1/r_n)(y - u_n, u_n - x_n) \geq 0, \\ C_{n+1} &= \{v \in C_n : \|\alpha_n(I - T)(y_n)\|^2 \\ &\quad + \|x_n - u_n\| \leq 2\alpha_n \langle x_n - v, (I - T)(y_n)) \\ &\quad + \sqrt{(x_n - v, x_n - u_n)(2\alpha_n\beta_n L\|y_n - x_n + \alpha_n(I - T)y_n\| + 1)} \\ x_{n+1} &= P_{C_{n+1}}(x_0) \,. \end{aligned}$$

Oletetaan, että jonot $\{u_n\}$, $\{\beta_n\}$ ja $\{r_n\}$ toteuttavat ehdot

$0 < a \leq \alpha_n \leq b < 1/(L + 1) < 1$ kaikilla $n \in N$,
$0 \leq \beta_n \leq 1$, kaikilla $n \in N$,
$r_n > 0$ kaikilla $n \in N$, ja $\lim_{n \to \infty} \inf r_n > 0$.

Silloin $\{x_n\}$ suppenee vahvasti kohti arvoa $P_\Omega(x_0)$.

Todistus. Ks. Ungchittrakool ja Jarernsuk (2012), lause 3.1 (artikkelin päätulos).

Seuraavassa oletetaan, että E on reaalikertoiminen Banachin avaruus ja C on E:n epätyhjä suljettu konveksi osajoukko.

Määritelmä 14. Kuvaus T on *kvasi-ϕ-laajentumaton*, jos $F(T) \neq \emptyset$ ja

$\phi(p, T(x)) \leq \phi(p, x)$ kaikilla $x \in C$ ja $p \in F(T)$.

Kuvaus T on *asymptoottisesti ϕ-laajentumaton*, jos on olemassa jono $\{k_n\} \subset [1,\infty)$ siten, että $k_n \to 1$, kun $n \to \infty$ ja

$\phi(T_n(x), T_n(y)) \leq k_n \phi(x, y)$ kaikilla $x, y \in C$.

Kuvaus T on asymptoottisesti kvasi-ϕ-laajentumaton, jos $F(T) \neq \emptyset$ ja jos on olemassa jono $\{k_n\} \subset [0,\infty)$ siten, että $k_n \to 1$, kun $n \to \infty$ ja

$\phi(p, T_n(x)) \leq k_n \phi(p, x)$

kaikilla $x \in C$,$p \in F(T)$ ja $n \geq 1$.

Määritelmä 15. Banachin avaruudella E on *Kadec-Kleen ominaisuus*, jos oletuksista $\{x_n\} \subset E$, $x \in E$, $x_n \to x$ ja $\|x_n\| \to |x\|$ seuraa, että$\|x_n - x\| \to 0$ kun $n \to \infty$.

Voidaan osoittaa, että jos E on tasaisesti konveksi Banachin avaruus, E:llä on Kadec-Kleen ominaisuus.

Määritelmä 16. Olkoon U_E Banachin avaruuden E yksikköpallo, $U_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$. E on *sileä* (smooth), jos raja-arvo

$$\lim_{t\to 0} \left(\|x + ty\| - \|x\|\right)/t$$

on olemassa kaikilla $x, y \in U_E$.. E on *tasaisesti sileä*, jos raja-arvo saavutetaan tasaisesti kaikilla $x, y \in U_E$.

Määritelmä 17. Banachin avaruus E on *vahvasti konveksi* (strictly convex), jos
$\|(x-y)/2\| < 1$ kaikilla $x, y \in E$, joille
$\|x\| = \|y\| = 1$ ja$x \neq y$.

Määritelmä 18. Kuvaus Ton asymptoottisesti säännöllinen C:ssä, jos, jokaiselle C:n rajoitetulle osajoukolle K pätee:

$$\limsup_{n\to\infty} (\|T_{n+1}(x) - T_n(x)\| : x \in K\} = 0.$$

Määritelmä 19. Banachin avaruuden E *duaalikuvaukset* muodostavat joukon

$J(x) = \{\phi \in E^* : \|\phi\| = 1, \phi(x) = \|x\|\}$,

missä $x \in E$ ja $x \neq 0$. E^* on E:n duaali.

Määritelmä 20. Tarkastellaan seuraavaa funktionaalia ϕ:

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2(x, J(y)) + \|y\|^2,$$

missä $x, y \in E$. Yleistetty projektio
$\Pi_C : E \to C$ on kuvaus, joka liittää mielivaltaiseen pisteeseen $x \in E$ funktionaalin $\phi(x, y)$ minimikohdan, ts. $\Pi_C(x) = x'$, missä x' on minimointitehtävän

$$\phi(x', x) = \min_{y\in C} \phi(y, x)$$

ratkaisu. Tiedetään, että $\Pi_C = P_C$ Hilbertin avaruuksissa.

Lause 6. Olkoon E tasaisesti sileä ja vahvasti konveksi Banachin avaruus, jolla on Kadec-Kleen ominaisuus, ja olkoon C E:n epätyhjä, suljettu ja konveksi osajoukko. Olkoon f funktio $C \times C \to R$, joka toteuttaa seuraavat ehdot (A 1) - (A 4):

(A1) $f(x, x) = 0$ kaikilla $x \in C$.

(A2): f on monotoninen, ts.
$f(x, y) + f(y, x) \leq 0$ kaikilla $x, y \in C$;

(A 3) : $\limsup_{t\to 0^+} f(tz + (1-t)x, y) \leq f(x, y)$
kaikilla $x, y, z \in C$;

(A4): jokaisella $x \in C$, $f(x, y)$ on konveksi ja heikosti alaspäin puolijatkuva,

Olkoon $T : C \to C$ suljettu ja asymptoottisesti kvasi-ϕ-laajentumaton kuvaus. Oletetaan, että T on asymptoottisesti säännöllinen ja joukko $F = F(T) \cap EP(f)$ on epätyhjä ja rajoitettu. Olkoon edelleen $\{x_n\}$ jono, joka muodostetaan seuraavasti:

$x_0 \in E$ valitaan mielivaltaisesti,

$C_1 = C$,

$x_1 = \Pi_{C_1}(x_0)$,

$y_n = J^{-1}(\alpha_n J(x_n) + (1 - \alpha_n)J(T^n(x_n))$,

$u_n \in C$ siten, että

$f(u_n, y) + (1/r_n)(y - u_n, J(u_n) - J(y_n)) \geq 0$ kaikilla $y \in C$.

$C_{n+1} = \{z \in C_n : \phi(z, u_n) \leq \phi(z, x_0) + (k_n - 1)M_n\}$

$x_{n+1} - \Pi_{C_{n+1}}(x_0)$,

missä $M_n = \sup\{\phi(z, x_0) : z \in F\}$ kaikille $n \geq 1$, $\{\alpha_n\}$ on reaalinen jono välillä [0,1] siten, että $\lim_{n\to\infty} \alpha_n(1 - \alpha_n) > 0$, $\{r_n\}$ on reaalinen jono välillä $[a, \infty)$ missä a on jokin positiivinen reaaliluku ja J on E:n duaalikuvaus. Silloin jono $\{x_n\}$ suppenee vahvasti kohti pistettä $\Pi_F(x_0)$, missä Π_F on yleistetty projektio $E \to F$.

Todistus. Ks. Kim (2011), lause 2.1 (artikkelin päälause).

Olkoot H_1 ja H_2 kaksi reaalista Hilbertin avaruutta. Olkoot C ja Q H_1:n ja H_2:n suljettuja konvekseja osajoukkoja ja olkoon $A : H_1 \to H_2$ rajoitettu lineaarinen operaattori. Olkoot edelleen $F_1 : C \times C \to R$ ja $F_2 : Q \times Q \to R$.

Määritelmä 21. Jaettu tasapainoprobleema (split equilibrium problem) on seuraava: On etsittävä piste $x^* \in C$ siten, että

$F_1(x^*, y) \geq 0$ kaikille $y \in C$

ja siten, että $Ax^* \in Q$ on ratkaisu epäyhtälölle $F_2(Ax^*, v) \geq 0$ kaikilla $v \in Q$.

Määritelmä 22. Olkoon H Hilbertin avaruus ja C sen osajoukko. Joukkoarvoisen kuvauksen $T : C \to P(C)$ sanotaan toteuttavan *ehdon (A)*, jos $\|x - p\| = d(x, T(p))$ kaikilla $x \in H$ ja $p \in F(T)$.

Määritelmä 23. Oletetaan, että funktio $F_1 : C \times C \to R$ toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) $F_1(x, x) = 0$ kaikilla $x \in C$,

(2) F_1 on monotoninen, ts.
$F_1(x, y) + F(y, x) \leq 0$ kaikilla
$x \in C$,

(3) Jokaiselle $x, y, z \in C$,

$\limsup_{t\to 0^+} F_1(tz + (1 - t)x, y) \leq F_1(x, y)$,

(4) Jokaiselle $x \in C$ $y \to F_1(x, y)$ on konveksi ja alaspäin puolijatkuva.

Jokaiselle $r > 0$ ja $x \in H_1$ määritellään kuvaus $T_r^{F_1} : H_1 \to C$ seuraavasti :

$T_r^{F_1}(x) = \{z \in C : F_1(x, y) + (1/r)(y - z, z - x) \geq 0$ kaikilla $y \in C\}$.

Oletetaan edelleen, että $F_2 : Q \times Q \to R$ toteuttaa ehdot (1)-(4). Jokaiselle $s > 0$ ja $w \in H_2$määritellään kuvaus $T_s^{F_2} : H_2 \to Q$ seuraavasti :

$T_s^{F_2}(w) = \{d \in Q : F_2(d, e) + (1/s)(e - d, d - w) \geq 0$ kaikilla $e \in Q\}$.

Määritelmä 24. Olkoon C Hilbert-avaruuden H osajoukko. Kuvaus $T : C \to C$ on *leviämätön* (nonspreading), jos

$2\|T(x) - T(y)\|^2 \leq \|T(x) - y\|^2 + \|T(y) - x\|^2$ kaikilla $x, y \in C$.

Joukkoarvoinen kuvaus $T : C \to P(C)$ on leviämätön, jos

$2\|u_x - u_y\|^2 \leq \|u_x - y\|^2 + \|u_y - x\|^2$ joillakin $u_x \in T(x)$ ja $u_y \in T(y)$ kaikilla $x, y \in C$.

Määritelmä 25. Joukon C pisteen x ja osajoukon A välinen *etäisyys* on

$d(x, A) = \inf\{\|x - z\| : z \in A\}$.

Hausdorffin metriikka potenssijoukossa $P(C)$ määritellään seuraavasti :

$$H(A, B) = \max\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A)\}$$

kaikilla $A, B \in P(C)$.

Määritelmä 26. Kuvaus $T : C \to P(C)$on *k-leviämätön joukkoarvoinen kuvaus*, jos on olemassa $k > 0$ siten, että

$H(T(x), T(y))^2 \leq k(d(T(x), y)^2 + d(x, T(y))^2)$ kaikilla $x, y \in C$.

Lause 7. Olkoot H_1 ja H_2 reaalisia Hilbert-avaruuksia ja $C \subset H_1$ ja $Q \subset H_2$ niiden epätyhjiä suljettuja konvekseja osajoukkoja. Olkoon $A : H_1 \to H_2$ rajoitettu lineaarinen operaattori ja olkoon $T : C \to P(C)$ 1/2-leviämätön joukkoarvoinen kuvaus. Olkoot $F_1 : C \times C \to R$ ja $F_2 : Q \times Q \to R$ funktioita, jotka toteuttavat määritelmän 23 ehdot (1) - (4), ja olkoon F_2 ylöspäin puolijatkuva ensimmäisen argumentin suhteen. Oletetaan edelleen, että T toteuttaa määritelmän 22 ehdon (A) ja

$\Theta = F(T) \cap \Omega \neq \emptyset$, missä

$\Omega = \{z \in C : z \in EP(F_1)$ ja $A(z) \in EP(F_2)\}$.

Määritellään jono $\{x_n\}$ seuraavasti:

$x_1 \in C$ valitaan mielivaltaisesti,

$$u_n = Tr_n^{F_1}(1 - \gamma A(1 - Tr_n^{F_2})A)(x_n), \qquad (*)$$

$x_{n+1} \in \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)T(u_n)$,

kaikilla $n \geq 1$ missä $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$, $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ ja $\gamma \in (0,1/L)$ siten, että L on A^*A:n spektraalisäde ja A^* on An adjungoitu operaattori. Oletetaan, että seuraavat ehdot ovat voimassa:

(1) $0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$,

(2) $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n > 0$.

Silloin yhtälöiden (*) määrittelemä jono $\{x_n\}$ suppenee heikosti kohti pistettä $p \in \Theta$.

Todistus. Suantai ym. (2016).

Määritelmä 27. Kolmikko (Γ, ρ, Ω) on hyperbolinen metrinen avaruus, jos (Γ, ρ) on metrinen avaruus, ja funktio $\Omega : \Gamma \times \Gamma \times [0, 1] \longrightarrow \Gamma$ toteuttaa seuraavat oletukset kaikilla $\zeta, \xi, \upsilon, w \in \Gamma$ ja $\mu, \theta \in [0, 1]$:

(W1) $\rho(\upsilon, \Omega(\zeta, \xi, \mu)) \leq (1 - \mu)\rho(\upsilon, \zeta) + \mu\rho(\upsilon, \xi)$

(W2) $\rho(\Omega(\zeta, \xi, \mu), \Omega(\zeta, \xi, \theta)) = |\mu - \theta|\rho(\zeta, \xi)$

(W3) $\Omega(\zeta, \xi, \mu) = \Omega(\xi, \zeta, 1 - \mu)$

(W4) $\rho(\Omega(\zeta, \upsilon, \mu), \Omega(\xi, w, \mu)) \leq (1 - \mu)\rho(\zeta, \xi) + \mu\rho(\upsilon, w)$.

Määritelmä 28. Olkoon $(\Gamma, \|.\|)$ Banachin avaruus ja olkoon $F : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ kuvaus. F on *b-rikastettu laajentumaton* ("b-enriched nonexpansive") kuvaus, jos on olemassa $b \in [0, \infty)$ siten, että

$\|b(\zeta - \xi) + F(\zeta) - F(\xi)\| \leq (b + 1)\|\zeta - \xi\|$, kaikilla $\zeta, \xi \in \Gamma$.

Määritelmä 29. Jono (x_k) metrisessä avaruudessa (X, d) Δ-*suppenee* kohti pistettä $x \in X$, jos

$$\limsup_{k \to \infty} (d(x_k, x) - d(x_k, y)) \leq 0$$

kaikilla $y \in X$.

Δ-konvergenssi on heikompi ominaisuus kuin normaali metrinen konvergenssi. Hilbertin avaruudessa Δ-konvergenssi ja heikko konvergenssi ovat sama asia.

Lause 8. Olkoon (Γ, ρ, Ω) täydellinen tasaisesti konveksi hyperbolinen avaruus ja olkoon $L \subseteq \Gamma$ siten, että $L \neq \emptyset$. Oletetaan, että L on suljettu, rajoitettu ja konveksi. Olkoon $G : L \longrightarrow L$ b-rikastettu laajentumaton kuvaus. Tällöin $F(G) \neq \emptyset$: Edelleen, kun on annettu $\zeta_0 \in L$, $\omega \in (0, 1)$ ja $\omega_b = \omega/(b+1)$ jono, jonka muodostaa yhtälö

$$\zeta_{n+1} = (1 - \omega_b)\zeta_n + \omega_b G(\zeta_n)$$

kaikilla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (ns. Krasnoselskin menetelmä) Δ-suppenee kohti F(G):n pistettä.

Todistus. Shukla ja Panicker (2022)

KOMMENTTEJA.

Kaikkien esitettyjen lauseiden ajatuksena on lähtien Banachin kiintopistelauseesta korvata siinä esitetty hyvin yksinkertainen kontraktion käsite lievemmillä ehdoilla, joilla kiintopisteen olemassolo olisi todistettavissa ja kiintopiste löydettävissä. Kysymys kuuluu, kuinka monimutkaisiin rakenteisiin ja määrittelyihin tällöin joudutaan.

Esitetyistä 28 määritelmästä 22 on tuotu esille kuutta kiintopistelausetta varten. Määritelmät on valtaosin tarkoitettu nimenomaan näiden lauseiden tarpeisiin. Lause 2 operoi asymptoottisesti k-tiukoilla pseudokontraktioilla ja metrisillä projektioilla. Lauseet 3 ja 4 käyttävät hyväkseen laajentumattomia puoliryhmiä, metrisiä projektioita ja tasaisesti k-tiukkoja pseudokontraktioita. Lauseessa 5 hyödynnetään Lipschitz-preudokontraktioita. Lauseessa 6 käytetään tasaisesti sileää ja vahvasti konveksia Banachin avaruutta, jolla on Kadec-Kleen ominaisuus, asymptoottisesti kvasi-ϕ-laajentumatonta kuvausta sekä asymptoottisesti säännöllistä kuvausta. Lauseessa 7 operoidaan mm. ½ -leviämättömällä joukkoarvoisella kuvauksella ja operaattoriteorian käsitteillä. Lauseessa 8 liikutaan täydellisessä tasaisesti konveksissa hyperbolisessa avaruudessa, ja käytössä on b-rikastettu laajentumaton kuvaus. Shukla ja Panicker (2022) käsittelevät myös geodeettisia avaruuksia, mutta niitä ei ole käytetty lauseessa 8.

Uusien tulosten vaatimat määrittelyt ovat varsin mutkikkaita, mutta samalla tietysti mielenkiintoisia kiintopisteteorian harrastajalle. Edellä esitettyjä määritelmiä ei kaikkia ole tarvittu lauseiden formuloinnissa, mutta kylläkin niiden todistuksissa. Selvästi on syntynyt kiintopisteteoriaa ja tasapainoteoriaa tutkiva koulukunta, jonka jäsenet siteeraavat toisiaan hyvän matemaattisen tutkimuskäytännön mukaisesti. Koulukunnan työlle on odotettavissa jatkoa ja yhteisölle uusia jäseniä.

Tässä esitettyjen lauseiden meriitti on, että niissä kaikissa esitetään iteratiivinen algoritmi, jolla kiintopiste saadaan ratkaistua (jos ei normaalin, niin vähintään heikomman konvergenssin mielessä). Algoritmiaskelten vaatimat laskutoimitukset voivat tosin paikoitellen olla vaativia. Minua kiehtoi ehkä eniten yksinkertainen määritelmä 12, joka yhdisti Lipschitz-jatkuvuuden laajentumattomuuteen ja kontraktion käsitteeseen. Tietysti on myös kiintoisaa nähdä, että monen laisilla funktioilla (laajentumattomilla funktioilla, pseudokontraktioilla yms.) osoitetaan kontraktion tapaan olevan kiintopiste ja konstruoidaan iteroiva algoritmi sen saavuttamiseksi. Lauseiden ehdot ovat kyllä melko monilukuisia ja paikoin mutkikkaita.

Viitteet:

Banach, S. (1922), 'Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales', Fundamenta Mathematicae 1922.

Brouwer, L. (1912), 'Uber Abbildungen von Mannigfaltigkeiten', Mathematische Annalen 71, ss. 97-115.

Chebyshev set. Encyclopedia of Mathematics, URL: http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Chebyshev_set&oldid=53352

Kim, J. (2011), 'Strong convergence theorems by hybrid projection methods for equilibrium problems and fixed point problems of the asymptotically quasi-ϕ-nonexpansive mappings', Fixed Point Theory and Applications 2011, 10. DOI: 10.1186/1687-1812-2011-10

Kurnam, P. ja Katchang, P. (2012), 'The hybrid algorithm for the system of mixed equilibrium problems, the general system of finite variational inequalities and common fixed points for nonexpansive semigroups and strictly pseudocontractive mappings'. Fixed Point Theory and Applications 2012, 84. DOI: 10.1186/1687-1812-2012-84

Metric projection. Encyclopedia of Mathematics, URL: http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Metric_projection&oldid=47830

Raj, V. and Piramatchi, T. (2020) 'Best proximity point theorems in topological spaces', Journal of Fixed Point Theory and Applications 22(2), doi.org/10.1007/s11784-019-0747-2

Shukla, R. ja Panicker, R (2022), 'Approximating Fixed Points of Enriched Nonexpansive Mappings in Geodesic Spaces', Journal of Function Spaces vol. 2022 (Special issue "Fixed-Point Techniques and Applications to Real World Problems, ed. by S. Kumar'), Article ID 6161839, 8 s., DOI: 10.1155/2022/6161839

Suantai, S., Cholamjiak, P., Cho, Y. ja Cholamjiak, W. (2016), 'On solving split equilibrium problems and fixed point problems of nonspreading multi-valued mappings in Hilbert spaces', Fixed Point Theory and Applications 2016, 35. DOI: 10.1186/s13663-016-0509-4

Ungchittrakool, K. ja Jarernsuk, A. (2012), 'Strong convergence by a hybrid algorithm for solving generalized mixed equilibrium problems and fixed point problems of a Lipschitz pseudo-contraction in Hilbert spaces'. Fixed Point Theory and Applications 2012, 147. DOI: 10.1186/1687-1812-2012-147

Voutilainen, R. (2023) 'On The Search for Solutions for Equilibrium Problems and Fixed Point Problems', Journal of Insurance and Financial Management 7(4), 88-99.

Wang, S. ja Zhou, C. (2011), 'New Iterative Scheme for Finite Families of Equilibrium, Variational Inequality, and Fixed Point Problems in Banach Spaces', Fixed Point Theory and Applications 2011, 372975. DOI: 10.1155/2011/372975