NOUDATTAVATKO EMPIIRISET MITTALAITTEET LUONNON LAKEJA?

Pentti Alanen
Sosiaalihammaslääketieteen professori (emeritus)
Tampereen Yliopisto

Tieteiden tavoitteena on saada havaintojen, kokeiden ja päättelyn avulla selville, millainen maailma on ja kuvata löytönsä tarkasti, selkeästi, ristiriidattomasti ja yksikäsitteisesti. Tutkiskellaan sir Michael Atiyahin artikkelia *Matematiikka ja fysikaalinen maailma* (*Symbolien metsässä,* s 187-210):

"Tarkastelkaamme seuraavaksi hieman toisenlaista geometriaa: pallonpinnan, esimerkiksi maapallon geometriaa. Ensimmäinen ongelmamme on selvittää, mitä "suorat viivat" nyt tarkoittavat. Määrittelemme ne lyhimpinä teinä pisteestä toiseen. Jokainen lentokapteeni tietää, että lyhin tie Lontoosta New Yorkiin on pitkin isoympyrän kaarta. Tästä saamme määritelmän suorille viivoille pallon pinnalla. Jos kehittelemme edelleen näin muodostuvaa geometriaa, havaitsemme, ettei kolmion kulmien summa enää ole kaksi suoraa kulmaa. Itse asiassa tuo summa on aina suurempi kuin kaksi suoraa kulmaa. Ottakaamme esimerkiksi pallokolmion ABC yhdeksi kärjeksi A pohjoisnapa ja valitkaamme kaksi muuta kärkeä B ja C päiväntasaajalta siten, että kaaren BC pituus on yksi neljäsosa päiväntasaajan pituudesta. Siiloin havaitsemme helposti, että kolmion ABC kaikki kulmat ovat suoria, joten sen kulmien summa on yhtä kuin kolme suoraa kulmaa."

Atiyah on tunnettu matemaatikko, parinkymmenen yliopiston kunniatohtori ja aateloitu matemaattisista ansioistaan, joten hänen kommenttejaan on syytä tarkastella huolella. Miksi hän määrittelee ensin isoympyräksi toteamansa kaaren suoraksi? Miksi hän nimittää kolmen isoympyrän kaaren muodostamaa kuviota kolmioksi? Miksi hän ei anna kulman koon mittaamiselle empiiristä tulkintaa, vaikka hän antaa sellaisen suoralle ja vaikka hän antaa esimerkissään kulmien koolle empiirisiä lukemia? Suorat, kolmiot ja kulmat ovat täsmällisiä termejä geometriassa ja niitä on käytettävä yksikäsitteisesti, jotta väärinkäsityksiltä vältytään.

Atiyah haluaa ilmeisesti viitata siihen yleiseksi tulleeseen ajatukseen, että empiirinen maailma ei olekaan välttämättä euklidinen. Me olemme vain niin pienikokoisia avaruuteen nähden, ettemme ole havainneet sitä, koska ihmisen kokoluokassa euklidinen geometria on hyvin tarkka likiarvo maailman ”oikeasta” geometriasta. Toiseksi, hän ajattelee samoin kuin Albert Einstein (*Ideas and Opinions,* s 235): ”Kysymyksellä siitä, onko universumin geometria euklidinen vai ei, on selkeä merkitys ja se voidaan ratkaista vain kokemuksen avulla.” Samaa mieltä on monien muiden tapaan Malcolm Lines (*Jättiläisen harteilla* s 48): ”Meidän maailmamme geometria voi poiketa euklidisesta geometriasta, ja asia pitää selvittää kokeellisesti.” Perustana on luonnontieteilijöiden käsitys, että **avaruudella on joku geometria, oli se sitten euklidinen tai epäeuklidinen,** ja se voidaan saada mittaamalla selville.

Jotta voimme tutkia avaruuden geometriaa, meidän on annettava geometrian peruskäsitteille empiirinen vastine myös mittalaitteita varten. Geometrisen suoran käsitteen empiirinen vastine on näissä esimerkeissä tavallisesti valonsäde. Ensimmäinen vaikeus liittyy siihen, että puhtaan geometrian käsitteet ovat ajan ulkopuolella, mutta empiiriset ilmiöt ovat ajallisia. Valonsäteen rata voidaan ajatella suoraksi viivaksi, mutta itse valonsäde on yksisuuntaisesti etenevä signaali, jolla on äärellinen nopeus; sen matkaan paikasta toiseen kuluu aikaa. Valo heijastuu pinnoista, taittuu veden ja ilman rajalla, kaareutuu ilmakehässä tullessaan tiheämpiin kerroksiin, hajoaa vesipisaroissa sateenkaareksi prisman tapaan, taipuu gravitaatiokentässä yms. Käytännössä missään ei liene paikkaa, jossa valonsäteen rataan ei vaikuttaisi joku tekijä, mutta voimme ajatella valonsäteen radan olevan empiirisesti suora silloin kun siihen ei vaikuta mikään ulkoinen tekijä.

Akateemikko Rolf Nevanlinna pitää Gaussin oivalluksena, että suuren empiirisen kolmion kulmasumma voi poiketa 180 asteesta. Olemme mitanneet vain pieniä kolmioita ja siksi erehtyneet pitämään tulosta yleispätevänä (*Suhteellisuusteorian periaatteet,* s 87-8):

”Mutta ehkä sitten tapahtuisi, että pienoismaailman avarakatseinen, ennakkoluulottomasti ajatteleva tutkija oivaltaisi, että eroavaisuudet hyvin suurilla etäisyyksillä voisivat tulla huomattaviksikin. Sen selvittämiseksi hän ”maapallollaan” valitsisi kolme pistettä A, B C, joiden keskinäinen etäisyys on suhteellisesti suuri, ja yrittäisi kokeellisesti mitata kolmion ABC kulmat. Koeteltavuuden periaatteen mukaan hänen olisi silloin ”konkreettisesti esitettävä” kolmion sivusuorat. Lähtien käsityksestä, että valo etenee suoraviivaisesti, hän kolmion kärkipisteistä lähettäisi valosignaaleja molempiin muihin kärkipisteisiin. Tähystämällä hän silloin voisi kussakin kärjessä mitata kulmien suuruudet. … Tällainen suuri tutkija oli Gauss — meidän todellisessa maailmassamme. … Kärkipisteiksi A, B, C hän valitsi kolme vuorenhuippua Brocken, Hohenhagen, Inselsberg, joiden keskinäiset etäisyydet ovat noin 100 kilometriä.”

Ei ole historiallisesti varmaa, että Gauss olisi tehnyt tällaiset mittaukset, mutta periaatetta pidetään silti mielekkäänä. Tässä asetelmassa on kuitenkin useita ongelmallisia kohtia.

1. Jos Gaussin ajatellaan tutkivan pienoismaailman mahdollista empiiristä epäeuklidisuutta, hän joutuu valitsemaan vuorten huiput ei ainoastaan siksi, että niiden etäisyys olisi suuri ilmiön esiintymisen havaituksi tulemisen kannalta, vaan myös siksi, että kärkipisteet olisivat riittävän korkeita, jotta ne näkyisivät kauas. Niinpä Gaussin mittaus ei koske (ei hänen tarvitse katsoa näin väittävänkään,) pallon pinnan muotoa vaan siitä riippumatonta kuviota, jonka mahdollinen epäeuklidisuus ei riipu maapallon pinnan mukaisesta geometriasta.

2. Gauss ei mittaa **samaa** valonsädettä eri kulmapisteistä, vaan ”tähystää” vastakkaisia, eri säteitä A:sta B:hen tai B:stä A:han pallolla, jonka ei oleteta pyörivän. Hän näkee esimerkiksi Inselsbergin Brockenista käsin, mutta Inselsbergissä ollessaan hän näkee Brockenin vastakkaisesta suunnasta. *Emme saa ilman muuta olettaa, että näillä vastakkaisilla säteillä olisi identtiset radat*. Maapallo pyörii, jolloin coriolis-ilmiön takia liikkuva valonsäde kaartaisi pohjoisella pallonpuoliskolla oikealle, joten vastakkaiset säteet eivät kulkisi identtistä rataa. Atiyahin kuviossa ABC päiväntasaajalta pohjoiseen isoympyrää pitkin lähtevä valonsäde kaartuisi oikealle ja vastakkaiseen suuntaan pohjoisnavalta lähtevä tekisi samoin, joten säteet eivät olisi osa samaa rataa. Kaikki tässä kulmiksi nimitetyt kuviot voidaan Atiyahin ja Nevanlinnan mielestä mitata, mutta ne eivät olisi saman, kolmioksi nimitetyn kuvion osia, joten niiden summalla ei ole oletettua tulkintaa. Coriolisilmiöstä ei liene valonsäteen suhteen kokeellista tietoa, mutta se pätee tykin ammuksen lentorataan, joten sitä ei ole syytä jättää sitä pois ajatuskokeesta. Atiyahin esimerkki lentokoneesta ei ole muutenkaan osuva, koska konetta voidaan koko ajan ohjata pysymään isoympyrällä, mutta vapaasti liikkuvaa tykin ammusta ei.

3. Mahdollisella coriolis-ilmiöllä ei kuitenkaan ole merkitystä avaruuden geometrian mittauksessa. Yritys tuottaa mielikuvia avaruuden geometriasta käyttämällä maapalloa esimerkkinä Atiyahin ja Nevanlinnan tapaan sisältää harhan lähteen, koska Maapallolla olevat pisteet ovat kiinni pallossa ja siksi myös toisissaan, mutta avaruudessa olevien kappaleiden vertailupisteet liikkuvat koko ajan toisiinsa nähden, ja niitä yhdistävät valonsäteet ovat yksisuuntaisia signaaleja, joiden matka pisteestä toiseen vie aikaa.

4. Empiirisen suoran käsite määritellään näissä esimerkeissä operatiivisesti, mutta kulman käsitteen empiiristä vastinetta ei ”konkreettisesti esitetä”. Näyttää siltä, että Atiyah ei kiinnitä mitään huomiota kulman koon mittaukseen, koska ”havaitsemme helposti”. **Atiyah olettaa ilmei-**

sesti, että euklidisen geometrian kulmanmittaustapa on pätevä myös epäeuklidisessa maailmassa. Juuri näin uskoo Nevanlinna (*Suhteellisuusteorian periaatteet*, s 81): ”kulmat mitataan euklidisesti”. Silloin ympyränkaarien välisen kulman suuruus määrätään piirtämälle ympyränkaarille niitä leikkauspisteessä sivuavat tangentit ja kulmat määritetään näiden tangenttien välisen kulman avulla. *Mikä tangentti on? Eikö se ole suora? Jos se on, sen tulee yhtyä piirretyn kuvion sivuihin, jotka on kuviossa ABC ensin määritelty suoriksi*. Jos näin ei ole, käytämme *käsitettä ”suora” samassa esimerkissä kahdella eri tavalla mitassa ja mitattavassa*. Projisioimme epäeuklidisena pitämämme kuvion euklidiselle taustalle, josta otamme käyttöön kulmanmittaustavan. **Kulmanmittausmenettelyn oletetaan siis olevan tutkittavan kohteen geometriasta riippumaton.** Tällöin on oletettu, että se euklidisen geometrian ominaisuus, että kulman koko ei riipu mittainstrumentin koosta, pätee myös tässä tilanteessa. Näin ei kuitenkaan ole, sillä jos käytämme pientä, so. ihmisen kokoluokan harppia, saamme Atiyahin esimerkin empiirisen kuvion suuruudeksi hyvin tarkasti 90 astetta, mutta jos harpin koko on niin suuri, että sen aukeaman pituus on sama kuin tässä kuvatun ABC -kuvion sivu, saamme kooksi 60 astetta.

5. Tehdään seuraava ajatuskoe. Hämeenlinnassa olevasta Aulangon näkötornista näkee hyvällä säällä luultavasti Tampereella olevan Näsinneulan tornin huipun. Ellei, valittakoon muut pisteet. Kolmas piste olkoon Kuussa oleva havaitsija. Tällainen koe olisi empiirisestikin tehtävissä, mutta kritiikin saa esiin ilman avaruusmatkaa. Olettakaamme, että kaikki nämä kolme tarkkailupistettä lähettävät valonsäteitä suoraviivaisesti eri suuntiin, jotta voimme tähystää niitä toisistaan. Valonsäteen matka Maasta Kuuhun vie aikaa hiukan yli sekunnin. Tämän ajan kuluessa Kuu on siirtynyt radallaan, mutta Maassa olevat kaksi pistettä ovat yhä kiinni toisissaan. Kuussa oleva tähystäjä ei katsele identtistä tai samaa rataa edennyttä valonsädettä kuin Maassa vastakkaisesta suunnasta katseleva tähystäjä, vaikka kumpikin katsoo suoraan edennyttä valonsädettä, sillä Kuu on siirtynyt valonsäteen kulkuaikana. Jos Kuusta lähetetään valonsäde Maahan siitä pisteestä, johon tarkkailtu valosäde tuli, se ei etene siihen pisteeseen, josta Kuusta havaittu säde lähti Maasta. Tällaisen säteen pitäisi liikkua ajassa taaksepäin ja Maan tulisi palata siihen pisteeseen, josta lähtenyt, Kuussa rekisteröity valonsäde havaittiin. Kausaaliset signaalit ovat yksisuuntaisia, emme voi matkustaa ajassa taaksepäin. Mitkään kolme valonsädettä eivät muodostaisi sellaista kuviota, jonka kulmasummalla olisi mielekäs tulkinta avaruuden geometrian arvioimiseksi.

Voimme ymmärtää tilanteen kahdella tavalla. Atiyah ja Nevanlinna käyttävät epäonnistuneita esimerkkejä yrittäessään kuvata yleistajuisesti avaruuden geometrian luonnetta, joten heidän esimerkkiensä kritikointi ei osu kohteeseensa. Toinen mahdollisuus on mielenkiintoisempi. Matemaatikko Antti Kupiainen sanoo artikkelissaan *Matematiikan suhteeton tehokkuus* (*Suhteellista?* s 285):

"Aloitetaan siis alusta - eli matematiikasta. Useimmat matemaatikot lienevät jonkin asteen platonisteja. Toisin sanoen matemaattiset struktuurit näyttävät muodostavan oman meistä riippumattoman todellisuutensa, josta matemaatikot vähä vähältä saavat tietoa ajattelunsa avulla. Lisäksi tämä todellisuus tuntuu matemaatikoista ainakin yhtä todelliselta kuin fysikaalinen todellisuus, ja tietomme siitä jopa paljon varmemmalta."

Platonistisen maailmakuvan ohjaamina ajattelemme, että matematiikka tarjoaa meille riippumattoman koordinaatiston, objektiivisen taustan, jolta voimme esittää empiiristä maailmaa koskevia väitteitä. Näin esim. Singh (*Fermat´n viimeinen teoreema,* s 48):

"Matematiikka tarjoaa luonnontieteille lujan lähtökohdan, ja luonnontiede rakentaa tälle järkähtämättömälle perustalle omien epätäsmällisten mittaustensa ja epätäydellisten havaintojensa avulla."

Tämä **käsitys matematiikasta varmana lähtökohtana** dominoi itsestäänselvyytenä. Empiirisen maailman kuvauksen uskotaan olevan kokonaan muotoiltavissa matemaattisesti (Ludwig Faddejev, *Fysiikan loppu matemaatikon silmin*, kirjassa *Symbolien metsässä*, s 242). Tähän käsitykseen sisältyy kuitenkin kehäpäätelmä, joka on tunnettu logiikassa jo yli sadan vuoden ajan. Bertrand Russell osoitti Gottlob Fregen joukko-opin avulla tekemässä kielen formalisointiyrityksessä virheen, jota usein havainnollistetaan seuraavasti. Modifioin tässä Lauri Järvilehdon esimerkkiä *Konemieli*-kirjasta: Jos Pekka sanoo, että kaikki kreetalaiset ovat valehtelijoita, väite on selvä ulkopuolisen sanomana, mutta jos Pekka on itsekin kreetalainen, väite muuttuu ongelmalliseksi. (Oletamme tässä, että "olla valehtelija" tarkoittaa että jokainen kreetalaisen väite on valetta.) Logiikan lauseet eivät voi viitata itseensä aiheuttamatta ristiriitaa; se tekisi järjestelmästä virheellisenä arvottoman. Kokonaisuutta ei voi kuvata riippumattomasti sen itsensä osan avulla. On huomattava, että tämä kritiikki tulee joukko-opista ja matemaattisen logiikan piiristä, alueelta, jota pidetään matemaattisen fysiikan ja elotonta luontoa tutkivien tieteiden pelikenttänä.

Avaruuden geometrian ongelma on analoginen: sitä yritetään määrittää mittalaitteilla, joilla on etukäteen täytynyt olettaa joku geometria, jonka on oltava yhteensopiva maailman geometrian kanssa. Yritys saada selville empiirisen avaruuden geometria sisältää siten kehäpäätelmän. Vain paroni von Munchhausen voi nostaa itseään tukasta. Olemme jo joutuneet olettamaan sen, mitä yritämme sanoa. Ratkaisuksi tarjoutuu silloin ajatus, jonka mukaan avaruuden geometria eli ole euklidinen **tai** epäeuklidinen, vaan että maailman **kokonaisuuden** geometrian kuvaamista yrittävät lauseet johtavat loogiseen ristiriitaan ja ovat siksi epämielekkäitä**.** Reaalinen maailma ei olisi tämän mukaan loppuun saakka ristiriidattomasti kuvattavissa kielen, logiikan, geometrian tai matematiikan malleilla.

Karl-Otto Apel on artikkelissaan *Wittgenstein ja Heidegger* (kirjassa *Filosofian tila ja tulevaisuus*, s 97-137) perusteellisesti analysoinut kokonaisuutta koskevien väitelauseiden ontologista ongelmaa. Avaruuden geometriasta käytävää keskustelua ei ole tarkoituksenmukaista käydä ottamatta huomioon Apelin analyysiä. Platonistille ei tätä ongelmaa ole olemassa, koska hän uskoo voivansa tarkastella maailmaa ulkoapäin matematiikan antamasta riippumattomasta taustasta, olematta menetelmiensä empiiristen ominaisuuksien kautta jo väistämättä maailmasta riippuvainen.

Yhteensopivuuden vaatimus on jo Aristoteleen esittämä: mitan ja mitattavan on oltava laadullisesti samansukuisia. Teemu Perhoniemi kirjoittaa (*Mitan muunnelmat*, s 165):

”Mittaaja ei voi mitata *reaalista* (aineellinen todellisuus) ominaisuutta *ideaalisella* (puhtaan matematiikan tavoin vain ajatuksina tai kirjallisina määritelminä oleva ihanne) mitalla vaan tarvitsee valmistetun mitan tai mittausjärjestelyn.”

Tarkemmin (s 52-3):

”Siihen, mitä milläkin mitalla voi mitata, liittyy tärkeä rajoite. … Samansukuisuuden (*syggenes*) vaatimuksella Aristoteles tarkoittaa tässä sitä, ettei pituudella voi mitata esimerkiksi väriä, painolla äänekkyyttä tai vaikkapa tilavuudella lämpöä ja niin edespäin. Mittaaminen riippuu siten myös mitan ja mitattavan sukulaisuudesta, sillä vain samansukuiset eli saman *genoksen* omaavat mitta ja mitattava ovat *suhteessa* toisiinsa ja *yhteismitallisia*.”

Myös Einsteinin sanomaksi on esitetty vastaava ajatus: ”fysiikka on teoria luonnosta, jollaiseksi se osoittautuu, kun luontoa tutkitaan reaalisilla mittasauvoilla ja kelloilla” (Häuβling, *Die Reichweite der Physik*, s 128). Tämän mukaan kokonaisuutta ei voi mitata sen itsensä osalla joutumatta loogisiin virhepäätelmiin. Siinä missä platonisti ajattelee luonnontieteiden rakentavan matematiikan riippumattomalle, ”järkähtämättömälle perustalle”, siinä aristotelikko ajattelee, että luontoa koskevat matemaattiset tulokset ovat empiiristen mittojen ja empiiristen mittauskohteiden **suhteita**. ***Suhteita ei voi olla olemassa, ellei jo ole olemassa jotakin, joiden välillä nämä suhteet vallitsevat.*** Tämä platonismista eroava käsitys primäärisyydestä tarjoaa samalla mahdollisuuden ehdottaa ratkaisua Eugene Wignerin usein siteeratulle ongelmalle (*Matematiikan käsittämätön tehokkuus luonnontieteissä, s 282)*: ”Matematiikan kielen soveltuvuus luonnonlakien muotoiluun on ihme, jota emme ymmärrä, ja ihmeellinen lahja, jota emme ole ansainneet.” Kyseessä olisi tällöin platonistisen maailmankuvan tuottama ongelma, jota aristotelikolla ei ole. Jos jokainen empiiristä luontoa oikein kuvaava luku ilmaisee jonkun empiirisen suhteen, matematiikka on jo tulkittua matematiikkaa, sovellettu luontoon sopivaksi. Empiiriset mitat ovat osa empiiristä luontoa, ja sellaisina ne noudattavat luonnon lakeja,

VIITTEET

Apel Karl-Otto. Wittgenstein ja Heidegger, s. 97 -137 kirjassa Hintikka ja Routila, Filosofian tila ja tulevaisuus. Weilin et Göös, Helsinki 1970.
Atiyah Michael sir, Matematiikka ja fysikaalinen maailma, s. 186 -210 kirjassa Pekonen Osmo (toim.) Symbolien metsässä, Art House, Gummerus 1992.
Nevanlinna Rolf, Suhteellisuusteorian periaatteet, WSOY, Porvoo 1963
Einstein Albert, Ideas and Opinions, Bonanza Books, New York ei painovuotta
Faddejev Nikolai, Fysiikan loppu matemaatikon silmin, s 231 -243 kirjassa Pekonen Osmo (toim), Symbolien metsässä, Art House, Jyväskylä 1992
Hintikka Jaakko, Routila Lauri (toim.), Filosofian tila ja tulevaisuus. Weilin et Göös, Helsinki 1970.
Järvilehto Lauri, Konemieli, Tammi painettu EU:ssa 2025
Husserl Edmund, Eurooppalaisten tieteiden kriisi ja transkendentaalinen fenomenologia, Gaudeamus Tallinna 2012
Häuβling Ansgar, Die Reichweite der Physik. Verlag Anton Hain, Meisenheim am Glan 1969
Kupiainen Antti, Matematiikan suhteeton tehokkuus, s 284-296 kirjassa Rydman Jan, Suhteellista? Yliopistopaino, Helsinki 2005
Lines Malcolm, Jättiläisen harteilla. Edita, Jyväskylä 2000.
Nevanlinna Rolf, Suhteellisuusteorian periaatteet, WSOS, ´Porvoo 1963
Pekonen Osmo (toim.) Symbolien metsässä, Art House, Gummerus 1992.
Perhoniemi Tuukka, Mitan muunnelmat, Vastapaino Tampere 2014
Rydman Jan, Suhteellista? Yliopistopaino, Helsinki 2005
Singh Simon. Fermat´n viimeinen teoreema, Tammi, Helsinki 1998.
Wigner Ludwig, Matematiikan käsittämätön tehokkuus luonnontieteissä, ss 264-283 kirjassa Pekonen Osmo (toim.) Symbolien metsässä, Art House, Gummerus 1992.