NRO 1/2024

FYSIIKAN JA MATEMATIIKAN AIKAKAUSLEHTI
TIDSKRIFT FÖR FYSIK OCH MATEMATIK

ARKHIMEDES

KONTRAKTIO JA SEN JOHDANNAISET

NEWTON DE MUNDI SYSTEMATE

CULTIVATING FLEXIBILITY: a new approach to teaching and learning mathematics at the university level

ARKHIMEDES 2/2023

Julkaisijaseurat
Suomen Fyysikkoseura ry:
https://www.fyysikkoseura.fi
Fysikersamfundet i Finland rf:
https://www.fysikersamfundet.fi
Suomen matemaattinen yhdistys ry:
https://www.matemaattinenyhdistys.fi/

Yhteystiedot
toimitus@arkhimedes.fi

ARTIKKELIT

SARJAKUVA

ARTIKKELIT

KONTRAKTIO JA SEN JOHDANNAISET

Raimo Voutilainen

Banachin kiintopistelauseen keskeisenä sisältönä on kontraktion käsite, ja kontraktion käyttö kiintopisteen etsinnässä. Tässä kirjoituksessa esitellään eräitä kontraktion johdannaisia ja niiden merkitystä kiintopisteteoriassa. Myös eräitä muita mielenkiintoisia viimeaikaisia kiintopistelauseita esitellään.

JOHDANTO

Kiintopisteteorian varhaiset kulmakivet ovat Brouwerin (1912) kiintopistelause euklidisille avaruuksille ja Banachin (1922) kiintopistelause täydellisille metrisille avaruuksille. Sen jälkeen esitettyjä kiintopistelauseita on esitellyt mm. Voutilainen (2023). Uudemmassa kiintopiste-kirjallisuudessa Banachin esittämää kontraktion käsitettä on yleistetty siten, että kiintopisteen olemassaolo ja sen etsintäalgoritmi on pystytty muotoilemaan mahdollisimman yleisellä tasolla. Tämän kirjoituksen tarkoituksena on esitellä eräitä tällaisia lauseita ja muutamia muitakin viime aikoina todistettuja kiintopistelauseita. Niissä käytetään runsaasti mm. funktionaalianalyysin käsitteistöä. Aluksi käsitellään kontraktiota ja eräitä sen ominaisuuksia. Kirjoituksen pääsisältönä ovat lauseet 2-8. Ennen kutakin lausetta esitellään sen tarvitsemia määritelmiä. Lauseet ovat peräisin julkaisuista Wang ja Zhou (2011), Kurnam ja Katchang (2012), Ungchittrakool ja Jarernsuk (2012), Kim (2011), Suantai ym. (2016) ja Shukla ja Panicker (2022).

Aloitetaan määrittelemällä metrinen avaruus:

Määritelmä 1. Metrinen avaruus on pari (X, d) missä X on joukko ja d reaaliarvoinen kuvaus (ns. metriikka eli etäisyysfunktio), joka kaikilla joukon X alkioillax, y ja z toteuttaa ehdot

1. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, x) = 0$,
4. $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

Metristä avaruutta $(X, d))$ kutsutaan usein vain metriseksi avaruudeksi X, jos käytössä oleva metriikka on asiayhteydestä selvä.

Vektoriavaruus on tunnetusti metrinen avaruus. Saadaan tärkeä uusi käsite, *Banachin avaruus*:

Määritelmä 2. Banachin avaruus on vektoriavaruus, jossa jokainen Cauchyn jono suppenee. (Cauchyn jono on tavallisen suppenevan jonon yleistys.) Metristä avaruutta, jonka jokainen Cauchyn jono suppenee, sanotaan *täydelliseksi.*

Määritelmä 3. Olkoon V vektoriavaruus, jonka skalaarikunta on F (reaaliluvut R tai kompleksiluvut C). Sisätulo on kuvaus $(\cdot,\cdot)$: $V \times V \to F$, joka toteuttaa aksioomat:

1. $(f, g) = (g, f)^*$ kaikilla $f, g \in V$ (konjugaattisymmetrisyys; symboli * on komplek sikonjugaatti),
2. $(af, g) = a(f, g)$ kaikilla $a \in F,\ f, g \in V$ja $(f, g + h) = (f, g) + (f, h)$ kaikilla $f, g, h \in V$ (seskvilineaarisuus).
3. $(f, f) \geq 0$ kaikilla $f \in V$ (ei-negatiivisuus)
4. $(f, f) = 0 \Rightarrow f = 0$ (ei-degeneratiivisuus).

Vektoriavaruus varustettuna sisätulolla on *sisätuloavaruus*.

Määritelmä 4. Hilbertin avaruus on täydellinen sisätuloavaruus. Hilbertin avaruus on siis vektoriavaruus, jossa jokainen Cauchyn jono suppenee sisätulon indusoimalla metriikalla mitaten.

Tässä kirjoituksessa tarkastellaan erilaisia tapoja lieventää kontraktion ehtoja siten, että kiintopisteen olemassaolo ja sen kanssa sukua olevat olemassaolokysymykset pysyvät voimassa ja ao. tehtäville voidaan laatia ratkaisualgoritmit. Ensin annetaan kontraktion määritelmä yksinkertaisen reaalifunktion tapauksessa ja sitten yleisesti.

Määritelmä 5. Funktio $f : R \to R$ on kontraktio, jos riippumatta luvuista $x, y \in R$ on olemassa $0 \leq q < 1$ siten, että

$$|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|.$$

Yleisemmällä tasolla kontraktio määritellään kahden metrisen avaruuden välisenä funktiona. Tällöin yo. määritelmässä korvataan vain erotusten itseisarvot metriikoilla: (https://fi.wikipedia.org/wiki/Kontraktio) funktio $f : X \to Z$ on kontraktio, jos riippumatta pisteistä $x, y \in X$ on olemassa $0 \leq q < 1$ siten, että $dZ(f(x), f(y)) \leq qdX(x, y)$ missä dZ ja dX ovat avaruuksien Z ja Xmetriikat, vastaavasti. Kontraktiosta käytetään joskus nimitystä ”kutistus”.

KONTRAKTIO JA DERIVAATTA

Jakamalla määritelmän 5 ensimmäinen epäyhtälö $|x - y|$:llä saadaan vasemmalle puolelle f:n erotusosamäärä. Helposti voidaan todistaa

Lause 1. Olkoon $f : I \to R$ derivoituva, missä $I \subset R$ on väli. Tällöin f on kontraktio jos ja vain jos

$$\sup_{x \in I} |f'(x)| < 1.$$

Määritelmä 6. Olkoon C Hilbertin avaruuden$H$ suljettu konveksi osajoukko, ja olkoon $S : C \to H$ kuvaus. Jos C:ssä on alkio x siten, että $x = S(x)$, x on S:n *kiintopiste*. S:n kiintopisteiden joukkoa merkitään $F(S)$:llä.

Kiintopiste ei ole aina yksikäsitteinen, vaan kiintopisteitä voi olla jopa ääretön määrä. Toisaalta kiintopisteitä ei yleisessä tapauksessa tarvitse olla lainkaan. Kiintopistelauseet kertovat kiintopisteprobleeman ratkaisusta eli kysymyksestä kiintopisteen tai -pisteiden olemassaolosta tiettyjen ehtojen vallitessa. Kiintopiste määritellään usein euklidista avaruutta yleisemmissä avaruuksissa kuten Banachin avaruudessa tai Hilbertin avaruudessa, joskus jopa yleisessä topologisessa avaruudessa, jossa ei ole määritelty etäisyyttä (Raj ja Piramatchi, 2020).

Määritelmä 7. Olkoon Φ funktio $C \times C \to R$. Tasapainoprobleemassa Φ:lle on löydettävä piste $x \in C$ siten, että $\Phi(x, y) \geq 0$ kaikilla $y \in C$. Sellaisten ratkaisujen joukkoa merkitään $EP(\Phi)$:llä.

KONVERGENSSILAUSEITA

Kiintopisteteorian peruslause, jonka muunnoksia on viimeisten sadan vuoden aikana rakenneltu, on seuraava:

Lause 2. Banachin kiintopistelause. (Banach, 1922.) Olkoon (X, d) epätyhjä täydellinen metrinen avaruus ja olkoon $f : X \to X$ avaruuden X kontraktio. Tällöin kuvauksella f on täsmälleen yksi kiintopiste a. Lisäksi kyseinen kiintopiste voidaan löytää seuraavasti: Olkoon x_0 avaruuden X mielivaltainen piste. Määritellään lukujono $x_n = f(x_{n-1})$, $n = 1,2,3,\ldots$ Tämä jono suppenee kohti kiintopistettä a.

Voidaksemme formuloida kirjallisuudesta löytyviä kontraktiokuvauksen yleistäviä lauseita meidän on annettava joukko uusia määritelmiä:

Määritelmä 8. Olkoon C Hilbertin avaruuden H suljettu konveksi osajoukko. Kuvausta S kutsutaan *laajentumattomaksi* (”nonexpansive”), jos $\|S(x) - S(y)\| \leq \|x - y\|$ kaikilla $x, y \in C$.

Kuvausta S kutsutaan *asymptoottisesti laajentumattomaksi* (”asymptotically nonexpansive”), jos on olemassa jono $\{k_n\} \subset [1,\infty)$ jossa $k_n \to 1$ siten, että $\|S^n(x) - S^n(y)\| \leq \|x - y\|$ kaikilla $x, y \in C$ ja $n \geq 1$.

Kuvausta S kutsutaan *κ-tiukaksi pseudokontraktioksi* (“κ-strict pseudo-contraction”) jos on olemassa vakio κ siten, että $0 \leq \kappa < 1$ ja

$$\|S(x) - S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \kappa\|(x - y) - S(x) - S(y)\|^2$$

kaikilla $x, y \in C$.

Kuvausta S kutsutaan *asymptoottisesti κ-tiukaksi pseudokontraktioksi*, jos on olemassa vakio κ siten, että $0 \leq \kappa < 1$ ja jono $\{v_n\} \subset [0,\infty)$ siten, että $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ ja

$$\|S^n(x) - S^n(y)\|^2 \leq (1 + v_n)\|x - y\|^2 + \kappa\|(x - y) - S^n(x) - S^n(y)\|^2$$

kaikilla $x, y \in C$ ja $n \geq 1$.

Huomautus. Jatkossa P on *(metrinen) projektio*. Ks. esim. Metric projection ja Chebyshev set.

Lause 2. Olkoon C Hilbert-avaruuden H epätyhjä suljettu osajoukko, olkoon T asymptoottisesti κ-tiukka pseudokontraktio siten, että $\{v_n\} \subset (0,\infty)$, $v_n \to 0$ kun $n \to \infty$ ja $F(T) \neq \emptyset$. Olkoot $\{x_n\}$ ja $\{u_n\}$ jonoja, jotka määrittelevät alkuarvo $x_1 = x \in H$ ja yhtälöt

$$\begin{aligned} z_n &= \theta_n x_n + (1 - \theta_n)P_C(x_n), \\ w_n &= \sigma_n x_n + (1 - \sigma_n)(\beta_n I + (1 - \beta_n)T^n)(z_n), \\ C_n &= \{v \in C : \|w_n - v\| \leq \|x_n - v\|\}, \\ D_n &= \cap_{j=1}^n C_j, \\ x_{n+1} &= P_{D_n}(x), \text{ kaikilla } n \geq 1, \end{aligned}$$

missä $\{\theta_n\} \subset (0,1)$, $\{\sigma_n\} \subset [0,a]$, missä $0 < a < 1$, ja $\{\beta_n\} \subset [k, k']$, missä $k < k' < 1$.

Tällöin $\{x_n\}$ suppenee vahvasti kohti pistettä $P_{F(T)}(x)$.

Todistus. Ks. Wang ym. (2011). Kyseesä on artikkelin päälauseen toinen korollaari.

Huomautus. Wang ym. todistavat kolme Hilbertin avaruuden konvergenssilausetta.

Määritelmä 9. kuvauksen $C \to C$ perhettä $S = \{S(s) : 0 \leq s < \infty\}$ kutsutaan C:n *laajentumattomaksi puoliryhmäksi*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot :

(i) $S(0)(x) = x$ kaikilla $x \in C$,

(ii) $S(s + t) = S(s)S(t)$ kaikilla $s, t \geq 0$

,

(iii) $\|S(s)(x) - S(s)(y)\| \le \|x - y\|$ kaikilla $x, y \in C$|, ja $s \ge 0$,

(iv) Kaikilla $x \in C$ funktio $s \mapsto S(s)(x)$ on jatkuva

Merkitään $F(S)$:llä perheen S yhteisten kiintopisteiden joukkoa eli

$$F(S) = \cap_{s\ge 0} F(S(s)).$$

Määritelmä 10. Kuvaus $A : C \to H$ on *α-käänteisesti vahvasti monotoninen* ("α-inverse-strongly monotone"), jos on olemassa positiivinen reaaliluku α siten, että

$$A(x) - A(y), x - y) \ge \alpha\|A(x) - A(y)\|$$

kaikilla $x, y \in C$.

Määritelmä 11. Kuvausten $\{V_i : C \to C\}$ perhettä ($i = 1,\ldots,\infty$) kutsutaan *tasaisesti k-tiukkojen pseudokontraktioiden perheeksi*, jos on olemassa vakio $k \in [0,1)$ siten, että

$$\|V_i(x) - V_i(y)\|^2 \ge \|x - y\|^2 + k\|(1 - v_i)(x) - (1 - V_i)(y)\|^2$$

kaikilla $x, y \in C$ ja kaikilla $i \ge 1$.

Lause 3. Olkoon C reaalisen Hilbertin avaruuden H epätyhjä suljettu konveksi osajoukko, olkoot kuvaukset $S = \{S(s) : 0 \le s < \infty\}$ C:n laajentumaton puoliryhmä ja olkoon $\{t_n\}$ positiivinen reaalinen hajaantuva jono. Oletetaan, että $F(S) \ne \emptyset$ Olkoon $\{x_n\}$ jono, jolle pätee

$$x_0 \in C,\ C_{l,i} = C,\ C_l = \cap_{i=1}^{\infty} C_{l,i}\ x_1 = P_{C_l}(x_0)$$

ja

$$\gamma_{n,i} = \alpha_{n,i}x_0 + (1 - \alpha_{n,i})(1/t_n)\int_0^{t_n} S(x_n)ds,$$
$$C_{n+1,i} = \{z \in C_{n,i} : \|\gamma_{n,i} - z\|^2 \le \|xn - z\|^2 + \alpha_{n,i}(\|x_0\|^2 + 2(x_n - x_0, z))\}$$
$$C_{n+1} = \cap_{i=1}^{\infty} C_{n+1,i},$$
$$x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(x_0)$$

kaikille $n \ge 0$ ja $\{\alpha_{n,i}\}_{n=1}^{\infty} \subset (0,1)$ ja $\lim_{n\to\infty} \alpha_{n,i} = 0$ kaikilla$i \ge 1$.

Tällöin $\{x_n\}$ suppenee vahvasti kohti pistettä $P_{F(S)}(x_0)$.

Todistus. Ks. Kurnam ja Katchang (2012), korollaari 4.1.

Lause 4. Olkoon C reaalisen Hilbertin avaruuden H epätyhjä suljettu konveksi osajoukko, ja olkoon $\{V_i : C \to C\}_{i=1}^{\infty}$ tasaisesti k-tiukkojen pseudokontraktioiden numeroituva perhe. Olkoon edelleen$\{T_i : C \to C\}_{i=1}^{\infty}$ laajentumattomien kuvausten numeroituva perhe, jolle

$$T_i(x) = tx + (1 - t)V_i(x)$$

kaikilla $x \in C$, kaikilla $i \ge 1$ ja $t \in [k,1)$. Olkoon myös$\theta = \cap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \ne \emptyset$. Olkoon $\{x_n\}$ jono, jolle pätee

$$x_0 \in C,\ C_{l,i} = C,\ C_l = \cap_{i=1}^{\infty} C_{l,i}\ x_1 = P_{C_l}(x_0)$$

ja

$$\gamma_{n,i} = \alpha_{n,i}x_0 + (1 - \alpha_{n,i})W_n(x_n),$$
$$C_{n+1,i} = \{z \in C_{n,i} : \|\gamma_{n,i} - z\|^2 \le \|xn - z\|^2 + \alpha_{n,i}(\|x_0\|^2 + 2(x_n - x_0, z))\}$$
$$C_{n+1} = \cap_{i=1}^{\infty} C_{n+1,i},$$
$$x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(x_0)$$

kaikille $n \ge 0$ ja $\{\alpha_{n,i}\}_{n=1}^{\infty} \subset (0,1)$ ja $\lim_{n\to\infty} \alpha_{n,i} = 0$ kaikilla $i \ge 1$. Kuvauksen $W_n : C \to C$ määrittelevät jono $\{T_i\}$ ja jono $\{\mu_i\}$ ei-negatiivisia lukuja välillä [0,1], ks. tarkemmin Kurnam ja Katchang (2012), kaavat 19 ja 20. Tällöin $\{x_n\}$ suppenee vahvasti kohti pistettä $P_\theta(x_0)$.

Todistus. Ks. Kurnam ja Katchang (2012), korollaari 4.2.

Palautetaan mieleen seuraava määritelmä.

Määritelmä 12. Olkoot annettuina kaksi metristä avaruutta (X, dX) ja (Y, dY). Funktio $f : X \to Y$ on *Lipschitz-jatkuva*, jos on olemassa reaaliluku $K \geq 0$ siten, että kaikille $x_1, x_2 \in X$ pätee:

$$dY(f(x_1), f(x_2)) \leq KdX(x_1, x_2).$$

Lukua K sanotaan funktion f *Lipschitz-vakioksi*, ja K:n voidaan myös sanoa olevan K-Lipschitz. Jos $K = 1$, f on laajentumaton. Jos $0 \leq K < 1$ ja f kuvaa metrisen avaruuden itselleen, f on kontraktio.

Määritelmä 13. Olkoot E reaalinen Banach-avaruus , E^* E:n duaaliavaruus ja C E:n epätyhjä suljettu konveksi osajoukko. Olkoon Θ funktio $C \times C \to R$, $\phi : C \to R$ reaaliarvoinen funktio ja $A : C \to E$ epälineaarinen kuvaus. *Yleistetyssä sekoitetussa tasapainoprobleemassa* on löydettävä $x \in C$ siten, että

$$\Theta(x, y) + A(x), y - x) + \phi(y) - \phi(x) \geq 0$$

kaikilley $\in C$.

Tämän tehtävän ratkaisujen joukkoa merkitään $GMEP(\Theta, A, \phi)$:llä, ts.

$$\begin{aligned} GMEP(\Theta, A, \phi) = \{x \in C : \Theta(x, y) + (A(x), y - x) \\ + \phi(y) - \phi(x) \geq 0 \, \forall \, y \in C\} \end{aligned}$$

Lause 5. Olkoon C reaalisen Hilbertin avaruuden H epätyhjä suljettu konveksi osajoukko, ja olkoon $T : C \to C$ L-Lipschitz pseudokontraktio. Olkoon Θ funktio $C \times C \to R$ siten, että seuraavat ehdot (A1) – (A4) ovat voimassa:

(A1) $\Theta(x, x) = 0$ kaikilla $x \in C$.

(A2) Θ on monotoninen, ts.

$$\Theta(x, y) + \Theta(y, x) \leq 0$$

kaikilla $x, y \in C$.

(A3) kaikilla $x, y, z \in C$,

$$\lim_{t \to 0+} \Theta(tz + (1 - t)x, y) \leq \Theta(x, y)$$

(A4) kaikille $x \in C$, $y \mapsto \Theta(x, y)$ on konveksi ja alaspäin puolijatkuva.

Olkoon edelleen $\phi : C \to R$ alaspäin puolijatkuva ja konveksi funktio sekä $A : C \to H$ jatkuva ja monotoninen kuvaus siten, että

$$\Omega = F(T) \cap GMEP(\Theta, A, \phi) \neq \emptyset$$

Olkoot $x_0 \in H$, $C_1 = C$ ja $x_1 = P_{C_1}(x_0)$. Määritellään jono $\{x_n\} \in C$ seuraavasti:

$$\begin{aligned} y_n &= (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(z_n), \\ z_n &= (1 - \beta_n)x_n + \beta_n u_n, \\ u_n \in C &: \Theta(u_n, y) + (A(u_n), y - u_n) + \phi(y) - \phi(u_n) \\ &\quad + (1/r_n)(y - u_n, u_n - x_n) \geq 0, \\ C_{n+1} &= \{v \in C_n : \|\alpha_n(I - T)(y_n)\|^2 \\ &\quad + \|x_n - u_n\| \leq 2\alpha_n \langle x_n - v, (I - T)(y_n)) \\ &\quad + \sqrt{(x_n - v, x_n - u_n)(2\alpha_n\beta_n L\|y_n - x_n + \alpha_n(I - T)y_n\| + 1)} \\ x_{n+1} &= P_{C_{n+1}}(x_0) . \end{aligned}$$

Oletetaan, että jonot $\{u_n\}$, $\{\beta_n\}$ ja $\{r_n\}$ toteuttavat ehdot

$0 < a \leq \alpha_n \leq b < 1/(L + 1) < 1$ kaikilla $n \in N$,
$0 \leq \beta_n \leq 1$, kaikilla $n \in N$,
$r_n > 0$ kaikilla $n \in N$, ja $\lim\inf_{n \to \infty} r_n > 0$.

Silloin $\{x_n\}$ suppenee vahvasti kohti arvoa $P_\Omega(x_0)$.

Todistus. Ks. Ungchittrakool ja Jarernsuk (2012), lause 3.1 (artikkelin päätulos).

Seuraavassa oletetaan, että E on reaalikertoiminen Banachin avaruus ja C on E:n epätyhjä suljettu konveksi osajoukko.

Määritelmä 14. Kuvaus T on *kvasi-ϕ-laajentumaton*, jos $F(T) \neq \varnothing$ ja

$\phi(p, T(x)) \leq \phi(p, x)$ kaikilla $x \in C$ ja $p \in F(T)$.

Kuvaus T on *asymptoottisesti ϕ-laajentumaton*, jos on olemassa jono $\{k_n\} \subset [1,\infty)$ siten, että $k_n \to 1$, kun $n \to \infty$ ja

$\phi(T_n(x), T_n(y)) \leq k_n \phi(x, y)$ kaikilla $x, y \in C$.

Kuvaus T on asymptoottisesti kvasi-ϕ-laajentumaton, jos $F(T) \neq \varnothing$ ja jos on olemassa jono $\{k_n\} \subset [0,\infty)$ siten, että $k_n \to 1$, kun $n \to \infty$ ja

$\phi(p, T_n(x)) \leq k_n \phi(p, x)$

kaikilla $x \in C$,$p \in F(T)$ ja $n \geq 1$.

Määritelmä 15. Banachin avaruudella E on *Kadec-Kleen ominaisuus*, jos oletuksista $\{x_n\} \subset E$, $x \in E$, $x_n \to x$ ja $\|x_n\| \to |x\|$ seuraa, että$\|x_n - x\| \to 0$ kun $n \to \infty$.

Voidaan osoittaa, että jos E on tasaisesti konveksi Banachin avaruus, E:llä on Kadec-Kleen ominaisuus.

Määritelmä 16. Olkoon U_E Banachin avaruuden E yksikköpallo, $U_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$. E on *sileä* (smooth), jos raja-arvo

$$\lim_{t \to 0} \left(\|x + ty\| - \|x\|\right)/t$$

on olemassa kaikilla $x, y \in U_E$.. E on *tasaisesti sileä*, jos raja-arvo saavutetaan tasaisesti kaikilla $x, y \in U_E$.

Määritelmä 17. Banachin avaruus E on *vahvasti konveksi* (strictly convex), jos
$\|(x - y)/2\| < 1$ kaikilla $x, y \in E$, joille
$\|x\| = \|y\| = 1$ ja$x \neq y$.

Määritelmä 18. Kuvaus Ton asymptoottisesti säännöllinen C:ssä, jos, jokaiselle C:n rajoitetulle osajoukolle K pätee:

$$\limsup_{n \to \infty} (\|T_{n+1}(x) - T_n(x)\| : x \in K\} = 0.$$

Määritelmä 19. Banachin avaruuden E *duaalikuvaukset* muodostavat joukon

$J(x) = \{\phi \in E^* : \|\phi\| = 1, \phi(x) = \|x\|\}$,

missä $x \in E$ ja $x \neq 0$. E^* on E:n duaali.

Määritelmä 20. Tarkastellaan seuraavaa funktionaalia ϕ:

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2(x, J(y)) + \|y\|^2,$$

missä $x, y \in E$. Yleistetty projektio
$\Pi_C : E \to C$ on kuvaus, joka liittää mielivaltaiseen pisteeseen $x \in E$ funktionaalin $\phi(x, y)$ minimikohdan, ts. $\Pi_C(x) = x'$, missä x' on minimointitehtävän

$$\phi(x', x) = \min_{y \in C} \phi(y, x)$$

ratkaisu. Tiedetään, että $\Pi_C = P_C$ Hilbertin avaruuksissa.

Lause 6. Olkoon E tasaisesti sileä ja vahvasti konveksi Banachin avaruus, jolla on Kadec-Kleen ominaisuus, ja olkoon C E:n epätyhjä, suljettu ja konveksi osajoukko. Olkoon f funktio $C \times C \to R$, joka toteuttaa seuraavat ehdot (A 1) - (A 4):

(A1) $f(x, x) = 0$ kaikilla $x \in C$.

(A2): f on monotoninen, ts.
$f(x, y) + f(y, x) \leq 0$ kaikilla $x, y \in C$;

(A 3) : $\limsup_{t \to 0^+} f(tz + (1 - t)x, y) \leq f(x, y)$
kaikilla $x, y, z \in C$;

(A4): jokaisella $x \in C$, $f(x, y)$ on konveksi ja heikosti alaspäin puolijatkuva,

Olkoon $T : C \to C$ suljettu ja asymptoottisesti kvasi-ϕ-laajentumaton kuvaus. Oletetaan, että T on asymptoottisesti säännöllinen ja joukko $F = F(T) \cap EP(f)$ on epätyhjä ja rajoitettu. Olkoon edelleen $\{x_n\}$ jono, joka muodostetaan seuraavasti:

$x_0 \in E$ valitaan mielivaltaisesti,

$C_1 = C$,

$x_1 = \Pi_{C_1}(x_0)$,

$y_n = J^{-1}(\alpha_n J(x_n) + (1 - \alpha_n) J(T^n(x_n))$,

$u_n \in C$ siten, että

$f(u_n, y) + (1/r_n)(y - u_n, J(u_n) - J(y_n)) \geq 0$ kaikilla $y \in C$.

$C_{n+1} = \{z \in C_n : \phi(z, u_n) \leq \phi(z, x_0) + (k_n - 1)M_n\}$

$x_{n+1} - \Pi_{C_{n+1}}(x_0)$,

missä $M_n = \sup\{\phi(z, x_0) : z \in F\}$ kaikille $n \geq 1$, $\{\alpha_n\}$ on reaalinen jono välillä [0,1] siten, että $\lim_{n\to\infty} \alpha_n(1 - \alpha_n) > 0$, $\{r_n\}$ on reaalinen jono välillä $[a, \infty)$ missä a on jokin positiivinen reaaliluku ja J on E:n duaalikuvaus. Silloin jono $\{x_n\}$ suppenee vahvasti kohti pistettä $\Pi_F(x_0)$, missä Π_F on yleistetty projektio $E \to F$.

Todistus. Ks. Kim (2011), lause 2.1 (artikkelin päälause).

Olkoot H_1 ja H_2 kaksi reaalista Hilbertin avaruutta. Olkoot C ja Q H_1:n ja H_2:n suljettuja konvekseja osajoukkoja ja olkoon $A : H_1 \to H_2$ rajoitettu lineaarinen operaattori. Olkoot edelleen $F_1 : C \times C \to R$ ja $F_2 : Q \times Q \to R$.

Määritelmä 21. Jaettu tasapainoprobleema (split equilibrium problem) on seuraava: On etsittävä piste $x^* \in C$ siten, että

$F_1(x^*, y) \geq 0$ kaikille $y \in C$

ja siten, että $Ax^* \in Q$ on ratkaisu epäyhtälölle $F_2(Ax^*, v) \geq 0$ kaikilla $v \in Q$.

Määritelmä 22. Olkoon H Hilbertin avaruus ja C sen osajoukko. Joukkoarvoisen kuvauksen $T : C \to P(C)$ sanotaan toteuttavan *ehdon (A)*, jos $\|x - p\| = d(x, T(p))$ kaikilla $x \in H$ ja $p \in F(T)$.

Määritelmä 23. Oletetaan, että funktio $F_1 : C \times C \to R$ toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) $F_1(x, x) = 0$ kaikilla $x \in C$,

(2) F_1 on monotoninen, ts.
$F_1(x, y) + F(y, x) \leq 0$ kaikilla
$x \in C$,

(3) Jokaiselle $x, y, z \in C$,

$\limsup_{t\to 0^+} F_1(tz + (1 - t)x, y) \leq F_1(x, y)$,

(4) Jokaiselle $x \in C$ $y \to F_1(x, y)$ on konveksi ja alaspäin puolijatkuva.

Jokaiselle $r > 0$ ja $x \in H_1$ määritellään kuvaus $T_r^{F_1} : H_1 \to C$ seuraavasti :

$T_r^{F_1}(x) = \{z \in C : F_1(x, y) + (1/r)(y - z, z - x) \geq 0$ kaikilla $y \in C\}$.

Oletetaan edelleen, että $F_2 : Q \times Q \to R$ toteuttaa ehdot (1)-(4). Jokaiselle $s > 0$ ja $w \in H_2$määritellään kuvaus $T_s^{F_2} : H_2 \to Q$ seuraavasti :

$T_s^{F_2}(w) = \{d \in Q : F_2(d, e) + (1/s)(e - d, d - w) \geq 0$ kaikilla $e \in Q\}$.

Määritelmä 24. Olkoon C Hilbert-avaruuden H osajoukko. Kuvaus $T : C \to C$ on *leviämätön* (nonspreading), jos

$2\|T(x) - T(y)\|^2 \leq \|T(x) - y\|^2 + \|T(y) - x\|^2$ kaikilla $x, y \in C$.

Joukkoarvoinen kuvaus $T : C \to P(C)$ on leviämätön, jos

$2\|u_x - u_y\|^2 \leq \|u_x - y\|^2 + \|u_y - x\|^2$ joillakin $u_x \in T(x)$ ja $u_y \in T(y)$ kaikilla $x, y \in C$.

Määritelmä 25. Joukon C pisteen x ja osajoukon A välinen *etäisyys* on

$d(x, A) = \inf\{\|x - z\| : z \in A\}$.

Hausdorffin metriikka potenssijoukossa $P(C)$ määritellään seuraavasti :

$$H(A, B) = \max\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A)\}$$

kaikilla $A, B \in P(C)$.

Määritelmä 26. Kuvaus $T : C \to P(C)$on *k-leviämätön joukkoarvoinen kuvaus*, jos on olemassa $k > 0$ siten, että

$H(T(x), T(y))^2 \leq k(d(T(x), y)^2 + d(x, T(y))^2)$ kaikilla $x, y \in C$.

Lause 7. Olkoot H_1 ja H_2 reaalisia Hilbert-avaruuksia ja $C \subset H_1$ ja $Q \subset H_2$ niiden epätyhjiä suljettuja konvekseja osajoukkoja. Olkoon $A : H_1 \to H_2$ rajoitettu lineaarinen operaattori ja olkoon $T : C \to P(C)$ 1/2-leviämätön joukkoarvoinen kuvaus. Olkoot $F_1 : C \times C \to R$ ja $F_2 : Q \times Q \to R$ funktioita, jotka toteuttavat määritelmän 23 ehdot (1) - (4), ja olkoon F_2 ylöspäin puolijatkuva ensimmäisen argumentin suhteen. Oletetaan edelleen, että T toteuttaa määritelmän 22 ehdon (A) ja

$\Theta = F(T) \cap \Omega \neq \emptyset$, missä

$\Omega = \{z \in C : z \in EP(F_1) \text{ ja } A(z) \in EP(F_2)\}$.

Määritellään jono $\{x_n\}$ seuraavasti:

$x_1 \in C$ valitaan mielivaltaisesti,

$$u_n = Tr_n^{F_1}(1 - \gamma A(1 - Tr_n^{F_2})A)(x_n), \qquad (*)$$

$x_{n+1} \in \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)T(u_n)$,

kaikilla $n \geq 1$ missä $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$, $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ ja $\gamma \in (0,1/L)$ siten, että L on A^*A:n spektraalisäde ja A^* on An adjungoitu operaattori. Oletetaan, että seuraavat ehdot ovat voimassa:

(1) $0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$,

(2) $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n > 0$.

Silloin yhtälöiden (*) määrittelemä jono $\{x_n\}$ suppenee heikosti kohti pistettä $p \in \Theta$.

Todistus. Suantai ym. (2016).

Määritelmä 27. Kolmikko (Γ, ρ, Ω) on hyperbolinen metrinen avaruus, jos (Γ, ρ) on metrinen avaruus, ja funktio $\Omega : \Gamma \times \Gamma \times [0, 1] \longrightarrow \Gamma$ toteuttaa seuraavat oletukset kaikilla $\zeta, \xi, \upsilon, w \in \Gamma$ ja $\mu, \theta \in [0, 1]$:

(W1) $\rho(\upsilon, \Omega(\zeta, \xi, \mu)) \leq (1 - \mu)\rho(\upsilon, \zeta) + \mu\rho(\upsilon, \xi)$

(W2) $\rho(\Omega(\zeta, \xi, \mu), \Omega(\zeta, \xi, \theta)) = |\mu - \theta|\rho(\zeta, \xi)$

(W3) $\Omega(\zeta, \xi, \mu) = \Omega(\xi, \zeta, 1 - \mu)$

(W4) $\rho(\Omega(\zeta, \upsilon, \mu), \Omega(\xi, w, \mu)) \leq (1 - \mu)\rho(\zeta, \xi) + \mu\rho(\upsilon, w)$.

Määritelmä 28. Olkoon $(\Gamma, \|.\|)$ Banachin avaruus ja olkoon $F : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ kuvaus. F on *b-rikastettu laajentumaton* ("b-enriched nonexpansive") kuvaus, jos on olemassa $b \in [0, \infty)$ siten, että

$\|b(\zeta - \xi) + F(\zeta) - F(\xi)\| \leq (b + 1)\|\zeta - \xi\|$, kaikilla $\zeta, \xi \in \Gamma$.

Määritelmä 29. Jono (x_k) metrisessä avaruudessa (X, d) Δ-*suppenee* kohti pistettä $x \in X$, jos

$$\limsup_{k\to\infty} (d(x_k, x) - d(x_k, y)) \leq 0$$

kaikilla $y \in X$.

Δ-konvergenssi on heikompi ominaisuus kuin normaali metrinen konvergenssi. Hilbertin avaruudessa Δ-konvergenssi ja heikko konvergenssi ovat sama asia.

Lause 8. Olkoon (Γ, ρ, Ω) täydellinen tasaisesti konveksi hyperbolinen avaruus ja olkoon $L \subseteq \Gamma$ siten, että $L \neq \emptyset$. Oletetaan, että L on suljettu, rajoitettu ja konveksi. Olkoon $G : L \longrightarrow L$ b-rikastettu laajentumaton kuvaus. Tällöin $F(G) \neq \emptyset$: Edelleen, kun on annettu $\zeta_0 \in L$, $\omega \in (0, 1)$ ja $\omega_b = \omega/(b + 1)$ jono, jonka muodostaa yhtälö

$$\zeta_{n+1} = (1 - \omega_b)\zeta_n + \omega_b G(\zeta_n)$$

kaikilla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (ns. Krasnoselskin menetelmä) Δ-suppenee kohti F(G):n pistettä.

Todistus. Shukla ja Panicker (2022)

KOMMENTTEJA.

Kaikkien esitettyjen lauseiden ajatuksena on lähtien Banachin kiintopistelauseesta korvata siinä esitetty hyvin yksinkertainen kontraktion käsite lievemmillä ehdoilla, joilla kiintopisteen olemassolo olisi todistettavissa ja kiintopiste löydettävissä. Kysymys kuuluu, kuinka monimutkaisiin rakenteisiin ja määrittelyihin tällöin joudutaan.

Esitetyistä 28 määritelmästä 22 on tuotu esille kuutta kiintopistelausetta varten. Määritelmät on valtaosin tarkoitettu nimenomaan näiden lauseiden tarpeisiin. Lause 2 operoi asymptoottisesti k-tiukoilla pseudokontraktioilla ja metrisillä projektioilla. Lauseet 3 ja 4 käyttävät hyväkseen laajentumattomia puoliryhmiä, metrisiä projektioita ja tasaisesti k-tiukkoja pseudokontraktioita. Lauseessa 5 hyödynnetään Lipschitz-preudokontraktioita. Lauseessa 6 käytetään tasaisesti sileää ja vahvasti konveksia Banachin avaruutta, jolla on Kadec-Kleen ominaisuus, asymptoottisesti kvasi-ϕ-laajentumatonta kuvausta sekä asymptoottisesti säännöllistä kuvausta. Lauseessa 7 operoidaan mm. ½ -leviämättömällä joukkoarvoisella kuvauksella ja operaattoriteorian käsitteillä. Lauseessa 8 liikutaan täydellisessä tasaisesti konveksissa hyperbolisessa avaruudessa, ja käytössä on b-rikastettu laajentumaton kuvaus. Shukla ja Panicker (2022) käsittelevät myös geodeettisia avaruuksia, mutta niitä ei ole käytetty lauseessa 8.

Uusien tulosten vaatimat määrittelyt ovat varsin mutkikkaita, mutta samalla tietysti mielenkiintoisia kiintopisteteorian harrastajalle. Edellä esitettyjä määritelmiä ei kaikkia ole tarvittu lauseiden formuloinnissa, mutta kylläkin niiden todistuksissa. Selvästi on syntynyt kiintopisteteoriaa ja tasapainoteoriaa tutkiva koulukunta, jonka jäsenet siteeraavat toisiaan hyvän matemaattisen tutkimuskäytännön mukaisesti. Koulukunnan työlle on odotettavissa jatkoa ja yhteisölle uusia jäseniä.

Tässä esitettyjen lauseiden meriitti on, että niissä kaikissa esitetään iteratiivinen algoritmi, jolla kiintopiste saadaan ratkaistua (jos ei normaalin, niin vähintään heikomman konvergenssin mielessä). Algoritmiaskelten vaatimat laskutoimitukset voivat tosin paikoitellen olla vaativia. Minua kiehtoi ehkä eniten yksinkertainen määritelmä 12, joka yhdisti Lipschitz-jatkuvuuden laajentumattomuuteen ja kontraktion käsitteeseen. Tietysti on myös kiintoisaa nähdä, että monen laisilla funktioilla (laajentumattomilla funktioilla, pseudokontraktioilla yms.) osoitetaan kontraktion tapaan olevan kiintopiste ja konstruoidaan iteroiva algoritmi sen saavuttamiseksi. Lauseiden ehdot ovat kyllä melko monilukuisia ja paikoin mutkikkaita.

Viitteet:

Banach, S. (1922), 'Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales', Fundamenta Mathematicae 1922.

Brouwer, L. (1912), 'Uber Abbildungen von Mannigfaltigkeiten', Mathematische Annalen 71, ss. 97-115.

Chebyshev set. Encyclopedia of Mathematics, URL: http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Chebyshev_set&oldid=53352

Kim, J. (2011), 'Strong convergence theorems by hybrid projection methods for equilibrium problems and fixed point problems of the asymptotically quasi-ϕ-nonexpansive mappings', Fixed Point Theory and Applications 2011, 10. DOI: 10.1186/1687-1812-2011-10

Kurnam, P. ja Katchang, P. (2012), 'The hybrid algorithm for the system of mixed equilibrium problems, the general system of finite variational inequalities and common fixed points for nonexpansive semigroups and strictly pseudocontractive mappings'. Fixed Point Theory and Applications 2012, 84. DOI: 10.1186/1687-1812-2012-84

Metric projection. Encyclopedia of Mathematics, URL: http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Metric_projection&oldid=47830

Raj, V. and Piramatchi, T. (2020) 'Best proximity point theorems in topological spaces', Journal of Fixed Point Theory and Applications 22(2), doi.org/10.1007/s11784-019-0747-2

Shukla, R. ja Panicker, R (2022), 'Approximating Fixed Points of Enriched Nonexpansive Mappings in Geodesic Spaces', Journal of Function Spaces vol. 2022 (Special issue "Fixed-Point Techniques and Applications to Real World Problems, ed. by S. Kumar'), Article ID 6161839, 8 s., DOI: 10.1155/2022/6161839

Suantai, S., Cholamjiak, P., Cho, Y. ja Cholamjiak, W. (2016), 'On solving split equilibrium problems and fixed point problems of nonspreading multi-valued mappings in Hilbert spaces', Fixed Point Theory and Applications 2016, 35. DOI: 10.1186/s13663-016-0509-4

Ungchittrakool, K. ja Jarernsuk, A. (2012), 'Strong convergence by a hybrid algorithm for solving generalized mixed equilibrium problems and fixed point problems of a Lipschitz pseudo-contraction in Hilbert spaces'. Fixed Point Theory and Applications 2012, 147. DOI: 10.1186/1687-1812-2012-147

Voutilainen, R. (2023) 'On The Search for Solutions for Equilibrium Problems and Fixed Point Problems', Journal of Insurance and Financial Management 7(4), 88-99.

Wang, S. ja Zhou, C. (2011), 'New Iterative Scheme for Finite Families of Equilibrium, Variational Inequality, and Fixed Point Problems in Banach Spaces', Fixed Point Theory and Applications 2011, 372975. DOI: 10.1155/2011/372975

NEWTON DE MUNDI SYSTEMATE

Jouni Huhtanen

Sir Isaac Newton (1642–1727) esitti tutkimuksessaan *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687) matemaattisesti kelvollisen selostuksen kappaleiden välisen mekanistisen voiman määrittelemiseksi. Ongelmaksi muodostui kuitenkin se, ettei hän kyennyt siirtämään tätä mallia kovin hyvin fysikaaliseen todellisuuteen, vaan joutui turvautumaan osin hypoteettisiin selityksiin. Seuraavassa tätä kysymystä tarkastellaan osana Newtonin fysiikan kehitystä ja pohditaan samalla sitä, millaisia keinoja hän käytti selvitellessään aineen ja voiman kokonaisrakenteen ongelmia.

Newton julkaisi pääteoksensa *Philosophiae Naturalis Principia Mathematican* ensimmäisen kerran vuonna 1687. Tutkimus syntyi seitsemän- tai kahdeksantoista kuukautta kestäneen intensiivisen tutkimus- ja kirjoitustyön jälkeen. Tiettävästi Newton aloitti työnsä laadinnan ystävänsä ja työtoverinsa Edmund Halleyn (1656–1742) toisen vierailun jälkeen marras- tai joulukuussa 1684 ja sai sen viimeisteltyä julkaisukuntoon huhtikuussa 1686. Tämä tiedetään siitä, että Newton lähetti kyseisen kuukauden aikana tutkimuksensa ensimmäisen kirjan (*De motu corporum liber primus*) käsikirjoituksen Royal Societyyn. Kirjoitus sisälsi ensimmäisen kirjan varsinaisen tekstiosuuden lisäksi alun kuuluisat määritelmät sekä liikelait, mutta ei esipuhetta. (Cohen 1978, 68–69.)

Principian kirjat syntyivät omina kokonaisuuksinaan ja Newton korjaili tutkimustaan huomattavan monta kertaa. Hänen Halleylle kahdeskymmenes kesäkuuta 1686 lähettämänsä kirjeen mukaan toinen kirja (*De motu corporum liber secundus*) valmistui kesällä 1685, jolloin se vaati enää puhtaaksikirjoittamista sekä muutaman kaavion lisäämistä. Samassa kirjeessä Newton mainitsi suunnitelleensa tutkimuksestaan kolmiosaisen. Viimeisen eli kolmannen osan (*De mundi systemate liber tertius*) teemana oli maailmankaikkeuden kokonaisjärjestelmä ja sen oli tarkoitus käsitellä ainakin komeettateoriaa. (Newton 1960, 437.) Tutkimuksen syntyyn vaikuttaneet yksityiskohdat ovat osin hämärän peitossa siksi, ettei Newton kommentoinut työnsä valmistumista kovin laajasti muistikirjoissaan tai kirjeenvaihdossaan. Lisäksi *Principian* ensimmäisen painoksen toimittajan Humphrey Newtonin tekemät muistiinpanot ovat kadonneet. Tämä tekee mahdottomaksi tietää varmasti, tekikö Newton tutkimukseensa muutoksia Halleyn esittämien korjausten perusteella.

Näistä ongelmista huolimatta *Principian* kehitystä voidaan tarkastella suhteellisen hyvin säilyneiden arkistolähteiden avulla. Newton kehitteli inertialain, kiihtyvyyden, voiman ja vastavoiman lain sekä gravitaation ideoita ensin ”De motu corporumissa” ja muissa Portsmouth Collectioniin sisältyvissä käsikirjoituksissaan (MS Add. 3965 ja MS Add. 3966), Cambridgen yliopiston professorina pitämissään luennoissa (MS Dd. 9.46), *Principian* käsikirjoituksessa (MS/69) sekä lopulta julkaistun tutkimuksen eri painosten oikolukuvedoksissa (Adv. b. 39.1 ja Adv. b. 39.2). Näiden tekstien syvällinen vertailu auttaa ymmärtämään, kuinka laajoja ja sisällöllisesti merkittäviä muutoksia Newton teki tutkimukseensa teoreemojen, lemmojen, korollaarien ja propositioiden osalta. (Ks. Cohen 1978; Koyré & Cohen 1972.)

Tutkimuksen kokonaisrakenteen kehitys on näin ajatellen suhteellisen helposti jäljitettävissä olemassa olevien arkistolähteiden avulla. Newtonin Cambridgessa vuosina 1684 ja 1685 pitämät luennot (MS Dd. 9.46) sisältävät käsikirjoituksen ”De motu corporum, liber primus” ja Portsmouthin arkistoyksikkö (MS Add. 3990) käsikirjoituksen ”De motu corporum, liber secundus”. Tiettävästi nämä kaksi luonnosta muodostivat *Principian* alkuperäisen hahmotelman. Osista jälkimmäinen käsitteli maailmanjärjestelmää ja todennäköisesti Newton siirsi sen *Principian* alkuperäisen käsikirjoituksen kirjaksi kolme. (Cohen 1978, 110.) Tämä tarkoitti samalla sitä, että hänen täytyi luonnostella tutkimukseen uusi toinen osa viimeistään työn käsikirjoitusvaiheessa vuonna 1686. Tällaista asiakirjaa ei arkistoista kuitenkaan löydy.

Seuraavassa tarkastellaan lyhyesti muutamia *Principian* kolmannen kirjan sisällöllisiä ja käsitteellisiä ongelmia. Newtonin tutkimus nojasi tunnetusti matemaattiseen ilmaisutapaan ja yritykseen löytää kaikille propositioille täsmälliset matemaattiset perusteet. Hänen tutkimustyylilleen oli lähtökohtaisesti leimallista se, että hän pyrki tuottamaan *Principiassa* luonnosta matemaattisen järjestelmän, jonka säännöt voitiin johtaa suoraan kokemuksesta. Tämä lähtökohta tarjosi mahdollisuuden suhtautua eksaktin tieteen ongelmiin matemaattisesti ja yhdistää koetulokset ja havainnot toisiinsa. (Cohen 1983, 15–16.) Ongelmaksi muodostui kuitenkin se, että abstraktin matemaattisen ilmaisutavan tuli selittää luonnon yksinkertaiset muodot ja mukautua samalla luonnon todellisiin ilmiöihin. Tämä tarkoitti Newtonille yritystä soveltaa alun matemaattiset periaatteet luontoon ja osoittaa universaalin painovoiman todelliset tekijät käytännössä. Seuraavassa pohditaan sitä, kuinka hyvin tämä tavoite onnistui ja kuinka hyvin *Principian* kahden ensimmäisen kirjan teoreettiset lähtökohdat palvelivat loppuosan fysikaalisia tavoitteita.

PRINCIPIA MATEMAATTISENA JA FYSIKAALISENA TUTKIMUKSENA

Principian perustana oli pyrkimys johtaa ennen kaikkea matematiikan – ei niinkään tieteellisten kokeiden – avulla syvällinen käsitys maailmankaikkeudesta ja sen perustavista toiminnoista. Kokeellisesti tuotetulla havaintoaineksella oli tässä jonkinlainen alustava roolinsa, mutta perustavana lähtökohtana toimi ajatus matematiikan kyvystä paljastaa luonnon voimien todellinen luonne sellaisenaan. (Cohen 1983, 64.) *Principian* tieteelliset tavoitteet ja teoreettiset lähtökohdat selittivät täydellisesti työn rakennetta ja jakautumista kolmeen erilliseen osaan. Tutkimuksen kaksi ensimmäistä kirjaa olivat selvästi matemaattisia ja todistivat luonnossa vallitsevien olosuhteiden matemaattisen tasapainon, ja vasta kolmas kirja sisälsi laajan ideologisen selostuksen kokonaisjärjestelmän kehittämiseksi.

Käytännössä tämä tarkoitti sitä, että Newton oli kyennyt esittämään teorian kaikkialla vallitsevan voiman konstruoimiseksi huomatessaan järjestelmänsä olleen jokseenkin yhtäpitävä luonnon kanssa. Kolmannen kirjan teoreettinen esitys gravitaation luonteesta nojasi kahden ensimmäisen osan matemaattisiin periaatteisiin, joiden mukaan aine oli massaltaan äärellinen ja siten täysin täsmällisesti määriteltävissä matematiikan keinoin. (Jammer 2000, 11.) Fysikaalisessa mielessä tämä kaksijakoisuus johti kuitenkin kahden erilaisen voimakäsitteen määrittelyyn ja lopulta pyrkimykseen mieltää nämä kaksi voimaa yhdeksi ja samaksi voimaksi. Puhuessaan kahden kappaleen keskinäisestä vetovoimasta tutkimuksensa kahdessa ensimmäisessä osassa Newton käytti johdonmukaisesti sentripetaalisen voiman (*vis centripetae*) käsitettä. Kyseisen käsitteen käyttöön ei sisältynyt suuria ongelmia, mutta siirtyessään tutkimuksensa kolmanteen osaan ja varsinaisen maailmanjärjestelmän kuvaukseen hän joutui ottamaan käyttöön yleisen painovoiman eli gravitaation (*vis gravitatis*) käsitteen yleistääkseen sentripetaalisen voiman vaikutuksen koskemaan maailmankaikkeuden kaikkia osatekijöitä. (Cohen 1983, 70.)

Tutkimuksen ensimmäinen osa oli huomattavan matemaattinen, mutta siinä voitiin nähdä ainakin periaatteessa jonkinlainen ideologinen yritys siirtyä puhtaasta abstraktista matematiikasta luonnon fysikaalisen tutkimuksen piiriin. Tämä tapahtui sektion yksitoista (*De motu corporum viribus centripetis se mutuo petentium*) alussa. Newton käsitteli kyseisen sektion alkuun saakka keskustaa kohti suuntautuvaa liikkumatonta vetovoimaa, mutta myönsi tällaisen liikkeen olleen tuskin koskaan mahdollinen todellisissa oloissa. Tavanomaisesti vetovoima suuntautuu kohti kappaletta (kolmannen lain mukaisesti) attraktio- ja repulsiovoimien ollessa aina vastavuoroisia. Tällöin vetovoiman alaisena oleva kappale ei ole sen enempää levossa kuin sitä vetävä kappale. Sama pätee kolmen tai sitä useamman kappaleen järjestelmälle. Yksikään kappale ei ole levossa eikä liiku luotisuoraa linjaa pitkin, vaan kiertää gravitaatiokeskusta. (Newton 1999, 561.)

Erityisesti väite vetovoiman suuntautumisesta kohti vetävän kappaleen keskipistettä viittasi fysikaaliseen luontoon sellaisenaan. Newton piti sentripetaalista voimaa vetovoimana (*attractione*) ja katsoi sen synnyttäneen fysikaalisessa mielessä voiman sykäyksellisyyden (*impulsus*). Hänen tarkoituksensa ei ollut tästä huolimatta täysin selvä. Fysikaalinen kuvaustapa tuli esiin käsitteiden valinnassa. Puheena olevassa sektiossa Newton vaihtoi sentripetaalisen voiman käsitteen attraktion käsitteeseen hieman yllättäen ilmeisesti siksi, että katsoi jälkimmäisen olleen matematiikkaan perehtyneen lukijan helpommin ymmärrettävissä. (Newton 1999, 565.) Ensimmäisen kirjan kymmenessä ensimmäisessä sektiossa hän puolestaan käytti sentripetaalisen voiman käsitettä kaiketi siitä syystä, että katsoi käsitteen kuvaavan suhteellisen helposti yksittäisen kappaleen pyrkimystä kohti voimakeskusta. Yhdennestätoista sektiosta eteenpäin ongelmaksi muodostui kuitenkin se, ettei puhe ollut enää yhdestä yksittäisestä kappaleesta ja sen liikevoimasta, vaan kahden (tai useamman) kappaleen välisestä vuorovaikutuksesta. Monen kappaleen järjestelmässä ongelmaksi muodostui vaikeus hahmottaa voiman todellinen keskus. Kukin kappale muodosti oman voimakeskuksensa ja toimi keskipisteenä muille kappaleille. Jokainen yksittäinen voima suuntautui pikemminkin muihin kappaleisiin kuin yhteen yksittäiseen keskukseen. Tässä tilanteessa sentripetaalisen voiman käsite kävi riittämättömäksi, mutta täysin selvää ei ollut se, oliko kysymys todellisesta käsitteellisestä siirtymästä fysikaaliseen maailmakuvaan. Newton käytti attraktion käsitettä lähinnä sentripetaalisen voiman yleistyksenä kuvatessaan useamman kuin yhden voimakeskuksen ominaisuuksia. (Cohen 1983, 73.)

Principian teoreettinen rakenne tuntui vaativan hillittyä siirtymää matemaattisesta ilmaisutavasta fysikaaliseen. Omien sanojensa mukaan Newton käytti attraktion ja impulssin kaltaisia käsitteitä vaihtoehtoisesti ja osin umpimähkäisesti kuvatessaan kohti keskustaa hakeutuvaa sentripetaalista voimaa. Varsinkin ensimmäisessä kirjassa tämä voima määräytyi pääosin matemaattisesta lähtökohdasta sisältämättä varsinaista fysikaalista tulkintaa voimalle. Attraktion käsitteen tarkoituksena oli kuvata kaikkia kahden tai useamman kappaleen välisiä voimasuhteita riippumatta siitä, pyrkikö kappale kohti toista kappaletta vai työnsikö se tätä pois luotaan. Käsitteen alaan sisältyivät lisäksi kaikenlaiset eetterin, ilman tai muun väliaineen (medium) aiheuttamat muutokset kappaleen liikesuunnassa. Samansuuntainen yleinen merkitys oli impulssin käsitteellä. Sen tarkoituksena oli kuvata voiman kvantiteettia matemaattisena tosiasiana vaatimatta kuvaukselle varsinaisia fysikaalisia ominaisuuksia. (Cohen 1983, 74.)

Principian käsitteistöä kohtaan esitetty kritiikki juontaa juurensa ainakin osin siitä, että tutkimusta on tavallisesti luettu katkelmina sieltä täältä jäsentämättä sitä kokonaisuudessaan a capite ad calcem. Newtonilla saattoi olla ajatuksena siirtyä varsinkin tutkimuksensa toisessa osassa tarkempaan fysikaaliseen kuvaustapaan, mutta varsinaisesti tämän siirtymän voi havaita vasta tutkimuksen kolmannessa osassa. Kahden ensimmäisen kirjan matemaattiset väittämät alustavat kolmannen kirjan fysikaalista maailmankuvaa ja tarjoavat perustavanlaatuiset ehdot loppuosan astronomisille väittämille. Käytännössä tämä tarkoitti sitä, että Newtonin matemaattinen konstruktio yhdessä yleisesti määritellyn attraktion käsitteen kanssa saattoi johtaa lopulta ainakin analogisesti todellisen maailman kuvaukseen. (Jammer 1962, 137–138.)

Keskeiseksi ongelmaksi muodostui tällöin kysymys siitä, mikä saattoi olla syynä vetovoimalle. Newtonin tunnetun selityksen mukaan hän oli mielestään osoittanut täysin selvästi attraktion olevan sama voima kuin gravitaation. Kyseinen voima päti kaikissa tilanteissa kappaleen pudotessa kohti Maata tai liikkuessa painovoiman vaikutuksesta avaruudessa. Maailmankaikkeudessa vaikuttava voima ”tuplasi” (*duplicate*) kappaleiden välisen voiman ja osoitti fysikaalisen voiman toimivan vastavuoroisesti kahden kappaleen välillä. (Cohen 1983, 75.) Tämä selitys antoi Newtonille mahdollisuuden vetäytyä positivistiseen näkökulmaan. Hän oli löytänyt maailmankaikkeudelle jonkinlaisen selityksen, mutta myönsi tutkimuksensa loppuluvussa, ettei ollut vielä löytänyt sille todellista fysikaalista muotoilua. Newtonin aksiomaattinen mekaniikka toimi kuitenkin hyvin käytännössä. Hän johti ensin kaksi tai kolme yleistä liikelakia tai fysikaalista periaatetta ja sovelsi tämän jälkeen löytämiään lakeja maailmankaikkeuden yleisten ilmiöiden ja kokonaisrakenteen määrittelyyn. (Jammer 1993, 97–98.)

SENTRIPETAALISESTA VOIMASTA GRAVITAATIOOON

Principian kolmiosaista rakennetta selittää parhaiten Newtonin pyrkimys esittää ensin kahdessa ensimmäisessä kirjassa matemaattiset perusteet luonnonlakien todentamiseksi ja kolmannessa pyrkimys siirtää nämä lait käytäntöön ja osoittaa niiden todellinen fysikaalinen toimivuus luonnossa. *Principian* toinen kirja sisältää perustavanlaatuisia selostuksia voiman ja väliaineen vastuksen luonteesta, mutta Newton oli tiettävästi tietoinen näiden väitteiden vaikeaselkoisuudesta ja pyrki osin tästä syystä johtuen esittämään kolmannessa kirjassa konkreettisempia käsityksiä kappaleiden vastuksesta ja aineen tiheydestä. (Cohen 1983, 75.) *Principian* perimmäisenä tavoitteena oli osoittaa luonnon matemaattiset periaatteet, mutta tämä vaatimus tuotti Newtonille pyrkimyksen tehdä tutkimuksesta mahdollisimman yhdenmukainen.

Tämä yhdenmukaisuus muodostui lopulta *Principian* keskeisimmäksi tavoitteeksi ja konkretisoitui tutkimuksen kolmannessa kirjassa. Newtonin mukaan hänen oman aikakautensa fyysikot olivat pyrkineet oikeuttamaan kartesiolaisen pyörreteorian (vortex) tai viitanneet planeettojen liikkeitä tutkiessaan Borellin ja Hooken tavoin yksittäisiin impulsseihin kykenemättä osoittamaan kokonaisjärjestelmän toimivuutta käytännössä. Newton ei uskonut kartesiolaisiin ideoihin ja hänelle impulssien ja vastaavien määrittely oli ainoastaan mekaniikan ensimmäisen lain (*inertia*) kaltainen teoreettinen lähtökohta. *Principian* perimmäisenä tavoitteena oli osoittaa kappaleiden todellinen kvantiteetti ja perustavat liikeominaisuudet matemaattisesti. Perustana toimi käsitys sentripetaalisen voiman yleisluonteisuudesta, jolloin esimerkiksi kaikki Aurinkoa kohti pyrkivät kappaleet olivat aurinkokeskisiä (*circumsolares*) ja Jupiteria kohti pyrkivät kappaleet jupiterkeskisiä (*circumjoviales*). (Newton 1999, 802–803).

Kyseinen lähtökohta tarjosi perustavanlaatuisen edellytyksen gravitaation määrittelylle. Kolmannen kirjan tavoitteena oli löytää todellinen fysikaalinen selitys kaikkien kappaleiden taustalla vaikuttavalle yhtenäiselle voimalle. Tutkimuksen toisen kirjan ongelmana tuntui olleen samansuuntainen rajanveto matemaattisten ja fysikaalisten argumenttien osalta kuin ensimmäisessä kirjassa. Tutkimuksensa toisen kirjan propositiossa XXIII Newton tarkasteli Boylen lakia ja väitti kaasun (tai nesteen) paineen olevan käänteinen sen määrään. (Jammer 1962, 118.) Hän oletti partikkelien muodostavan elastisen, pieneen tilaan puristuvan nesteen ja tarkasteli yksittäisten partikkelien keskinäistä repulsiota sekä kykyä vastustaa toinen toisiaan. Newtonin mukaan Boylen laki on riittävä ja välttämätön ehto osoitettaessa partikkelien kyky vaihdella käänteisesti suhteessa toisiinsa. Tavoilleen uskollisena hän esitti lain perussisällön matemaattisesti, mutta väitti samalla, että oli käsitellyt sitä ainoastaan partikkelienvälisen voiman fysikaalisena mallina antamatta sille todellista asemaa luonnossa. Tämän hypoteettisen mallin tarkoituksena ei ollut todistaa luonnossa vallitsevien voimien olemassaoloa, vaan tarjota fyysikoille tilaisuus keskustella aiheesta. (Newton 1999, 698–699.)

Toinen *Principian* toisessa kirjassa esiintyvä teoreettinen malli maailmankaikkeuden kokonaisrakenteen selvittämiseksi koski Keplerin kolmea liikelakia. Näiden lakien etuna oli se, että Newton saattoi muunnella niitä suhteellisen helposti pohtiessaan maailmankaikkeuden kokonaisrakenteen yksityiskohtia. Ongelmaksi muodostui kuitenkin se, että Keplerin ideat koskivat yhden kappaleen ominaisuuksia tai kahden kappaleen keskinäistä liikettä. Näin ajatellen lakien avulla oli vaikea määritellä universaalin vetovoiman todellinen luonne. (Jammer 1962, 118.) Boylen laissa ei tätä ongelmaa ollut. Laki osoitti ainehiukkasten repulsiovoimat kauttaaltaan ja salli jokaisen fysikaalisessa tilassa vaikuttavan ainehiukkasen käyttäytyä samalla tavalla. Newton tiesi, ettei hänen yksinkertainen Keplerin lakeihin nojannut järjestelmänsä voinut olla yhtäläinen luonnon kanssa. Maailmankaikkeuden monimutkaisen järjestelmän paljastaminen vaati kokeellista tutkimusta ja todellisia havaintoja maailmankaikkeuden tilasta. Boylen laki oli hyvä lähtökohta tälle, mutta se ei kyennyt ilmaisemaan täysin selvästi (eikä varsinkaan matemaattisesti) luonnon todellista luonnetta sikäli kuin malliin ei lisätty voiman etäisyyksille jonkinlaisia raja-arvoja. (Cohen 1983, 77.)

Ongelmana oli ennen kaikkea se, että Newton hyväksyi korpuskularistisen teorian lähes sellaisenaan vaatimatta sille juuri minkäänlaista teoreettista tai kokeellista oikeuttamista. Tämä saattoi olla yllättävää huomioiden sen, etteivät kaikki Newtonin aikakauden tieteilijät olleet korpuskularisteja tai atomisteja. Väite partikkeleista ja niiden keskusvoimista oli Newtonin aikana radikaali ja heikosti vahvistettu. Lisäongelmia tuotti se, ettei tieteenharjoittajien keskuudessa vallinnut täydellistä yksimielisyyttä partikkeleille mahdollisesti kuuluvien voimien luonteesta ja kantamien pituuksista. (Jammer 2000, 122–123.) Kaiken tämän lisäksi ei ollut täyttä varmuutta siitä, saattoiko kyseinen staattinen malli kuvata luontoa totuudenmukaisesti. Newtonin teoriaa oli helppo vastustaa siksi, ettei hän ollut kyennyt esittämään sen vakuudeksi täysin tyydyttäviä koetuloksia. Boylen laki tuntui toimivan erittäin hyvin kaasumaisten ja nestemäisten aineiden kohdalla, mutta sen siirtämisestä maailmankaikkeuden mittakaavaan ei ollut minkäänlaisia takeita. Soveltaessaan mallia maailmankaikkeuden tutkimukseen Newton ei koskaan saavuttanut sille riittävää matemaattista tarkkuutta tai fysikaalista täydellisyyttä. (Cohen 1983, 77–78.) Malli tuntui jäävän selittäväksi hypoteesiksi jopa hänelle itselleen.

Varsinkin *Principian* kolmannen kirjan fysikaalinen ote tuntui karttavan kaikenlaisia teoreettisia malleja. Osan tunnetuin ongelma liittyi Newtonin yrityksiin kehittää asianmukainen teoria Kuun häiriöliikkeen todentamiseksi. Newton ei ollut tunnetusti koskaan täysin tyytyväinen kuuteoriaansa ja palasi sen ongelmiin kerta toisensa jälkeen. Tämä voidaan nähdä muun muassa hänen yrityksissään korjata Kuun radan Maata lähinnä olevan pisteen (perigee) määrittelyä. Ongelma tuli esiin tutkimuksen ensimmäisen painoksen kolmannessa kirjassa vain lyhyessä Scholiumissa sekä propositiossa XXXV. Newton korjasi kohtaa toisessa painoksessa (1713) laatimalla Scholiumista huomattavan paljon laajemman ja kehittämällä siinä gravitaatioteoriaa huomattavan paljon monipuolisemmin Kuun häiriöliikkeen todellisen luonteen paljastamiseksi. Tutkimuksensa kolmannessa painoksessa (1726) hän lisäsi kohtaan uutta materiaalia, mutta oli edelleen tyytymätön häiriöliikkeen tematisointiin. (Newton 1999, 867–874.)

Toisen keskeisen ongelman muodosti kolmannessa kirjassa tapahtunut käsitteellinen siirtymä attraktion käsitteestä gravitaation käsitteeseen. Newton viittasi kolmannessa kirjassa muutaman kerran attraktioon, mutta ei käyttänyt käsitettä yleisesti planeettateoriassaan tai kuvatessaan esimerkiksi vuorovesien vaihtelua kuuteoriansa yhteydessä. Tosiasiassa hän pyrki pitämään luomansa matemaattisen mallin ja fysikaalisen todellisuuden toisistaan erillään samalla tavalla kuin kahdessa ensimmäisessä kirjassa. Kolmannessa kirjassa laajemmin esiin tulevat painon (*gravitas*) ja painovoiman (*vis gravitatis*) käsitteet olivat luonteeltaan fysikaalisia, mutta attraktion käsite oli Newtonin omien sanojen mukaan ennen kaikkea matemaattinen ja sellaisena tarkoituksenmukainen ainoastaan tutkimuksen kahdessa ensimmäisessä kirjassa. (Cohen 1983, 82.)

Attraktion (subst., *attractio*; inf., *attrahere*) käsite esiintyi *Principiassa* yli kolmesataa kertaa, mutta näistä vain kahdeksantoista tuli esiin kolmannessa kirjassa. Tällöinkin Newton käytti käsitettä lähinnä vain kuvatessaan sähköistä tai magneettista vetovoimaa. Ainoastaan kaksi mainintaa liittyi komeettaratojen kuvaukseen, mutta nämä eivät olleet kokonaisuuden suhteen kovin merkittäviä. Jonkinlaista fysikaalista merkitystä saattoi nähdä ainoastaan korollaarissa yksi (propositio V), jossa Newton viittasi Jupiterin kuiden vetovoimaan, korollaarissa kolme, jossa hän puhui Jupiterin ja Saturnuksen läheisyydestä ja viittasi niiden keskinäiseen vetovoimaan sekä propositiossa VI, jossa hän puhui Jupiterin satelliittien vetovoiman epätasaisuudesta. (Jammer 2000, 119–120.) Muissa tapauksissa hän käytti kolmannessa kirjassa johdonmukaisesti gravitaation (subst., *gravitas*, *gravitatio*; inf., *gravitare*) käsitettä. Gravitaation käsite liittyi taivaanmekaniikan fysikaaliseen tutkimukseen eikä sillä ollut sijaa työn ensimmäisessä osassa. (Cohen 1983, 83.)

Gravitaation käsite soveltui hyvin kuvaamaan yleisesti Jupiterin, Saturnuksen ja

Maan sekä niiden kiertolaisten liikettä maailmankaikkeudessa. Newtonin mukaan kaikki kappaleet olivat perusominaisuuksiltaan toistensa kaltaisia ja keskeisvoima veti niitä tasaisesti puoleensa. Planeetat vetivät puoleensa kuitaan ja Aurinko planeettoja. Tällöin maailmankaikkeudessa täytyi olla jokin yksi yhtenäinen voima, joka vaikutti kaikkiin planeettoihin yleisesti. Newtonin kolmannen lain mukaan tämä vetovoima oli molemminpuolinen, jolloin kaikki planeetat pyrkivät vetämään kierolaisiaan puoleensa ja kiertolaiset puolestaan planeettoja puoleensa. (Newton 1999, 806.) Lisäksi kunkin planeetan etäisyys keskukseen määräytyi käänteisten neliöiden lain mukaan siten, että samanpainoiset kappaleet sijoittuivat aina samalle etäisyydelle keskuksesta. Kappaleet pyrkivät toisiaan kohti suhteellisten massojensa mukaisesti. (Cohen 1983, 88–89.)

GRAVITAATIO NEWTONIN JÄRJESTELMÄN PERUSTANA

Principian kolmas kirja erosi tyyliltään kahdesta ensimmäisestä siinä, ettei Newton selostanut osassa luonnonmekaniikkansa kaikkia osatekijöitä kovin täsmällisesti, vaan pyrki esittämään pikemminkin lyhennelmän tai yhteenvedon rationaalisen mekaniikkansa ja maailmanjärjestelmänsä pääkohdista. Lukija saattoi saada selvän käsityksen Newtonin tarkoituksista lukemalla ensimmäisen kirjan alussa olevat määritelmät (*Definitiones*) ja liikelait (*Axiomata sive leges motus*) sekä lisäksi kirjan kolme ensimmäistä sektiota. Tämän jälkeen hän saattoi siirtyä suoraan kolmanteen kirjaan ja edetä järjestyksessä alun menetelmällisistä säännöistä (*Regulae philosophandi*) maailmanjärjestelmää selittäviin ilmiöihin (*Phaenomena*), planeettaliikkeiden kuvauksiin, vuorovesiteoriaan, Kuun häiriöliikkeen analyysiin ja lopulta tutkimuksen päättäviin komeettojen ratakuvauksiin saakka. (Cohen 1999, 195.)

Principian kolmas kirja muodosti itsessään suhteellisen selkeän kokonaisuuden osin siksi, että se oli jonkin verran väljemmin laadittu kuin työn kaksi ensimmäistä kirjaa ja lisäksi sen alkuun sisältyi selvä menetelmällinen johdanto. *Principian* kaksi ensimmäistä kirjaa olivat tyyliltään raskaita ja työläitä myös matemaattisilta taidoiltaan kyvykkäille lukijoille. Ilmeisesti tämän tosiasian vastapainoksi Newton oli laatinut kolmannesta kirjasta alussa mainitun version ”De mundi systemate, liber Isaaci Newtoni” (MS Add. 3990) pyrkimyksenään julkaista se yleistajuisena selostuksena maailmankaikkeuden kokonaisjärjestelmästä. Asiaa on syytä tarkastella gravitaatiokäsitteen kehityksen takia. Kyseinen versio julkaistiin Newtonin kuoleman jälkeen latinaksi otsikolla *De mundi systemate liber* (1728) ja englanniksi otsikolla *A Treatise of the System of the World* (1728). Lisäksi *Principian* ensimmäisen englanninkielisen käännöksen laatinut Gresham Collegen lyhytaikainen luennoitsija Andrew Motte (1696–1734) julkaisi sen käännöksensä liitteenä (ks. Newton 1962, 549–626).

A Treatisen alussa Newton mainitsi laatineensa työn siksi, että se saattoi olla muodoltaan varsinaista tutkimusta yleistajuisempi ja siten laajemman lukijakunnan omaksuttavissa (Newton 1731, v–vi). Tekstejä verrattaessa käy selväksi, ettei vuoden 1728 työ sisältänyt juuri minkäänlaista mainintaa universaalista gravitaatiosta. *A Treatisen* toisessa luvussa Newton selosti lyhyesti planeettojen pysymistä liikeradoillaan perustaen käsityksensä lähinnä Keplerin ja Descartesin impulssin ja attraktion käsitteisiin. Kyseisen liikkeen ymmärtäminen vaati lähtökohtaisesti ensimmäisen liikelain *(inertia)* hyväksymistä voiman perustaksi, mutta Newton pyrki löytämään kappaleen liikkeelle todellisen kvantitatiivisen selityksen. Välttääkseen kaikenlaiset epäselvyydet hän kutsui voimaa sentripetaaliseksi ja pyrki laajentamaan sen vaikutuksen koskemaan kaikenlaista keskihakuista voimaa maailmassa. (Cohen 1983, 93.) Tämän kehitelmän lähtökohtana oli Newtonin oman kielenkäytön mukaisesti matemaattinen menetelmä (*in a mathematical way*), mutta ei samanlainen matemaattinen täsmällinen esitystapa kuin *Principian* kolmannessa kirjassa. (Newton 1731, 5.)

A Treatisessa Newton käytti edellä mainittua matemaattiseksi kutsumaansa menetelmää tutkiakseen liikkuvien kappaleiden vaikuttavat voimat, mutta *Principian* kolmannessa kirjassa hän kääntyi kokonaisvaltaisemmin matemaattiseen ilmaisutapaan saavuttaakseen syvällisemmän käsityksen maailmankaikkeuden perustavista rakenteista. Samalla hän muutti *A Treatiselle* ominaiset proosakappaleet numeroiduiksi propositioiksi, korollaareiksi ja lemmoiksi ja sovitti näiden lomaan lyhyitä scholiumkatkelmia samaan tapaan kuin kahdessa ensimmäisessä kirjassa. Omien sanojensa mukaan hän oli pyrkinyt *A Treatisessa* selvittämään kappaleiden perimmäiset liikeominaisuudet ja kvantiteetit siltä osin kuin keskeisvoima saattoi selittää nämä tekijät. *Principian* kolmannessa kirjassa hän käänsi tämän ydinidean matemaattisiksi propositioiksi ja saattoi siten puhutella alan todellisia asiantuntijoita. (Cohen 1983, 94.)

Perustavanlaatuiseksi eroksi muodostui lopulta se, että Newton käytti *A Treatisessa* ennen kaikkea sentripetaalisen voiman käsitettä kuvatessaan planeettojen pyrkimystä pysyä liikeradoillaan (luku 3) ja puhui gravitaatiosta ainoastaan Maan lähelle pyrkivien kappaleiden kohdalla. Hän painotti sentripetaalisen voiman painavan kappaleita kohti Jupiteria, Maata ja muita planeettoja ja oletti näin ymmärretyn voiman vähenevän etäisyyden neliöiden mukaisesti (luku 6). Jonkinlaisen ongelman muodosti kuitenkin se, että selostaessaan planeettojen kiertolaisten voimasuhteita hän ei käyttänyt sentripetaalisen voiman käsitettä, vaan korvasi sen attraktion käsitteellä. Tutkimus ei ollut tältä osin kovin johdonmukainen. Esimerkiksi luvuissa 21 ja 22 hän pohti pienten kappaleiden keskinäisiä voimia, mutta kuvasi näitä voimia toisinaan vetovoiman (*attract*) ja toisinaan molemminpuolisen vetovoiman (*mutual attraction*) käsitteellä. (Newton 1731, 37–40.)

Newtonin pyrkimys siirtyä *Principian* ensimmäisen ja toisen kirjan mukaisesta matemaattisesta selitystavasta todellisen fysikaalisen maailman kuvaukseen ei toteutunut *A Treatisessa* samassa laajuudessa kuin Principian kolmannessa kirjassa. Hän pyrki löytämään kummassakin tutkimuksessaan luonnon selitykseksi todellisen universaalin voiman, mutta keskeisvoimia kuvatessaan käytti ensin mainitussa suhteellisen neutraalia attraktion käsitettä viittaamatta juuri gravitaatioon. Kun hän vuoden 1685 tienoilla muotoili *A Treatisesta* pääteoksensa kolmannen kirjan, ilmeisesti hän tuolloin ajatteli gravitaation tarjoavan konkreettisen positiivisen ilmaisun luonnon muodoille. Gravitaation käsitteestä muodostui näin ajatellen Newtonin mekaniikan keskeisin ilmaus, mutta täydellisessä kriittisessä muodossaan se tuli esiin ainoastaan *Principiassa*. Tutkimuksen ongelmana ei ollut niinkään käsitteellinen sekavuus, vaan pikemminkin se, että Newton joutui turvautumaan paikoin hypoteettisiin selityksiin olettaessaan gravitaation vaikuttavan kaikkien kappaleiden välillä.

Lähteet

Newtonin käsikirjoitukset

The Portsmouth Collection [culd.lib.cam.ac.uk/collections/newton]

MS Add. 3965: Papers Connected with the Principia (most holograph) (1665–1727). Physical Location: Cambridge University Library.

MS Add. 3966: Papers Connected with the Principia on Lunar Theory (1665–1727). Physical Location: Cambridge University Library.

MS Add. 3990: De motu corporum liber secundus, Draft of 'De mundi Systemate' (c. 1687, printed in 1731). Physical Location: Cambridge University Library.

Adv. b. 39.1: A copy of the first edition of the Principia, interleaved with notes in Newton's hand – among the leaves inserted is the preface to the third edition. Physical Location: Cambridge University Library.

Adv. b. 39.2: A copy of the second edition of the Principia, interleaved with notes and additions in Newton's hand. Physical Location: Cambridge University Library.

MS Dd. 9.46: Lectures on mechanics, De motu corporum (1684–1685). Physical Location: Cambridge University Library.

MS/69: The Manuscript of Newton's Philosophie Naturalis Principia Mathematica (1686). Physical Location: The Royal Society.

Kirjallisuus

Cohen, I. Bernard (1971/1978): Introduction to Newton's 'Principia'. Cambridge, London and Melbourne: Cambridge University Press.

Cohen, I. Bernard (1980/1983): The Newtonian Revolution. With Illustrations of the Transformation of Scientific Ideas. Cambridge: Cambridge University Press.

Cohen, I. Bernard (1999): "A Guide to Newton's Principia". In Isaac Newton, The Principia. Mathematical Principles of Natural Philosophy. A New Translation by I. Bernard Cohen and Anne Whitman. Berkeley, Los Angeles and London: University of California Press, pp. 1–370.

Jammer, Max (1957/1962): Concepts of Force. A Study in the Foundations of Dynamics. New York: Harper & Row.

Jammer, Max (1954/1993): Concepts of Space. The History of Theories of Space in Physics. Third, Enlarged Edition. Foreword by Albert Einstein. New York: Dover Publications, Inc.

Jammer, Max (2000): Concepts of Mass. In Contemporary Physics and Philosophy. Princeton (N. J.): Princeton University Press.

Koyré, Alexandre & Cohen, I. Bernard (1972): Isaac Newton's Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. The Third Edition (1726) with Variant Readings. Assembled and Edited by Alexandre Koyré and I. Bernard Cohen with the Assistance of Anne Whitman. 2 Volumes. Cambridge and London: Cambridge University Press / Cambridge (Mass.): Harvard University Press.

Newton, Isaac (1731): A Treatise of the System of the World. Translated into English. The Second Edition. London: F. Fayram.

Newton, Isaac (1960): The Correspondence of Isaac Newton. Volume II (1676–1687). Edited by H. W. Turnbull. Cambridge: Cambridge University Press.

Newton, Isaac (1687/1962): Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World. Volume One: The Motion of Bodies. Volume Two: The System of the World. Translated into English by Andrew Motte in 1729. The Translations Revised, and Supplied with an Historical and Explanatory Appendix by Florian Cajori [and Russell T. Crawford]. Berkeley and Los Angeles: University of California Press.

Newton, Isaac (1726/1999): The Principia. Mathematical Principles of Natural Philosophy. A New Translation by I. Bernard Cohen and Anne Whitman. Berkeley, Los Angeles and London: University of California Press.

CULTIVATING FLEXIBILITY:

A NEW APPROACH TO TEACHING AND LEARNING MATHEMATICS AT THE UNIVERSITY LEVEL

Sara Parikka
University of Helsinki

DEFINING FLEXIBILITY

When it comes to mathematics, many of us remember formulas and specific methods etched into our minds in school. Imagine, if instead of one right way to solve a problem, there were multiple approaches – each uniquely suited to a specific mathematical task. This skill, known as mathematical flexibility or simply flexibility, has gained increased attention from education and research. Flexibility is about adapting and selecting the best strategies to solve a problem effectively (Star & Rittle-Johnson, 2007; Xu et al., 2017).

In primary- and upper-secondary education mathematics it is often viewed as following a set of rigid steps. However, in the world of higher education, things get a little trickier. University mathematics presents students with more complex problems that require not only knowing procedures and concepts but also being able to apply them in different situations. In this environment, flexibility is crucial. Teaching students how to tackle a problem flexibly helps them to become better problem-solvers and more creative thinkers.

Consider a simple example of equation solving. You are given a linear equation

$$\frac{6x-9}{3}+\frac{8x-12}{4}=3,$$

with multiple fractions.

The generic strategy taught for solving this problem involves expanding the fractions to a common denominator before adding them together. This method is long and inefficient; students must handle larger numbers, and in the end simplify the fraction. In such a manner the students are more prone to make careless errors. A more efficient approach, known as the situational strategy, involves identifying a common factor and simplifying the fraction accordingly.

Generic strategy	Situational strategy
$\frac{4(6x-9)}{12}+\frac{3(8x-12)}{12}=3$	$\frac{3(2x-3)}{3}+\frac{4(2x-3)}{4}=3$
$\frac{4(6x-9)+3(8x-12)}{12}=3$	$2x-3+2x-3=3$
$4(6x-9)+3(8x-12)=36$	$4x-6=3$
$24x-36+24x-36=36$	$4x=9$
$48x=108, x=\frac{108}{48}=\frac{9}{4}$	$x=\frac{9}{4}$

UNDERSTANDING THE IMPORTANCE OF RESEARCHING FLEXIBILITY

There are concerns about students' ability to apply learned methods and the lack of depth in their procedural and conceptual knowledge. The overall level of mathematical skills students possesses before entering university is also for worry. Studying flexibility helps students to develop multiple problem-solving strategies and foster a deeper understanding of mathematical concepts. This approach promotes critical thinking, which is valuable not only in mathematics but in various aspects of life. Students with strong flexibility skills are better equipped to adapt to new challenges, and flexible teaching methods enhance engagement, making learning more enjoyable and meaningful.

How can students and teachers then cultivate flexible thinking? The studies suggest creating a classroom environment where students are encouraged to explore multiple strategies (Star et al., 2012) and compare alternative solution methods (Star & Rittle-Johnson, 2007). Research indicates that comparing different strategies promotes flexible learning more effectively than studying each method individually (Durkin et al., 2017). Additionally, opportunities for collaboration among students and the introduction of non-routine problems can further enhance flexibility. While previous research demonstrates that educators can actively influence the development of students' flexibility, further investigation is needed to gain a deeper understanding of this area

MATHEMATICAL FLEXIBILITY IN HIGHER EDUCATION: CURRENT RESEARCH

At the university level, research on mathematical flexibility has been relatively limited, mostly focusing on arithmetics and calculus. In our research related to my dissertation, we first examined flexibility in early university mathematics, focusing specifically on solving algebraic tasks such as linear equations, quadratic equations, and systems of equations. We also investigated the relationship between accuracy, flexibility, and exam performance. The results demonstrated high levels of both accuracy and flexibility. Interestingly, although accuracy and flexibility were correlated, flexibility was a more significant predictor of exam scores than accuracy (Ernvall-Hytönen, et al., 2022).

The second article examines the relationship between flexibility in solving linear- and quadratic equations and mathematics achievement. It explores university students' strategy choices, the spontaneity of these choices, and flexibility across different degree programs. The study also compares the flexibility between university students and high-school students. The studies indicated that higher flexibility is associated with improved accuracy in problem-solving and greater success in academic performance (Ernvall-Hytönen, et al., 2025).

In conclusion, fostering mathematical flexibility in university students is a crucial step toward equipping them with the skills needed for complex problem-solving and critical thinking in higher education. While research on flexibility at the university level is still in its early stages, the findings thus far emphasize the importance of flexibility in not only improving mathematical skills but also in enhancing overall academic success. As we continue to explore how flexibility can be cultivated in university mathematics, it is essential for both students and educators to embrace a mindset that values multiple approaches and creative problem-solving strategies. By doing so, we can create a learning environment where students are better prepared to face the challenges of both their academic studies and real-world situations.

References:

Durkin, K., Star, J. R., and Rittle-Johnson, B. (2017). Using comparison of multiple strategies in the mathematics classroom: Lessons learned and next steps. ZDM Mathematics Education, 49:585–597

Ernvall-Hytönen, A.-M., Krzywacki, H., Hästö, P. & Parikka, S.

Procedural Flexibility In Early University Mathematics, (2022). FMSERA Journal, 5(1), 46–60.

Star, J. R., Rittle-Johnson, B., and Durkin, K. (2012). Developing procedural flexibility: Are novices prepared to learn from comparing procedures? British Journal of Educational Psychology, 82(3):436–455.

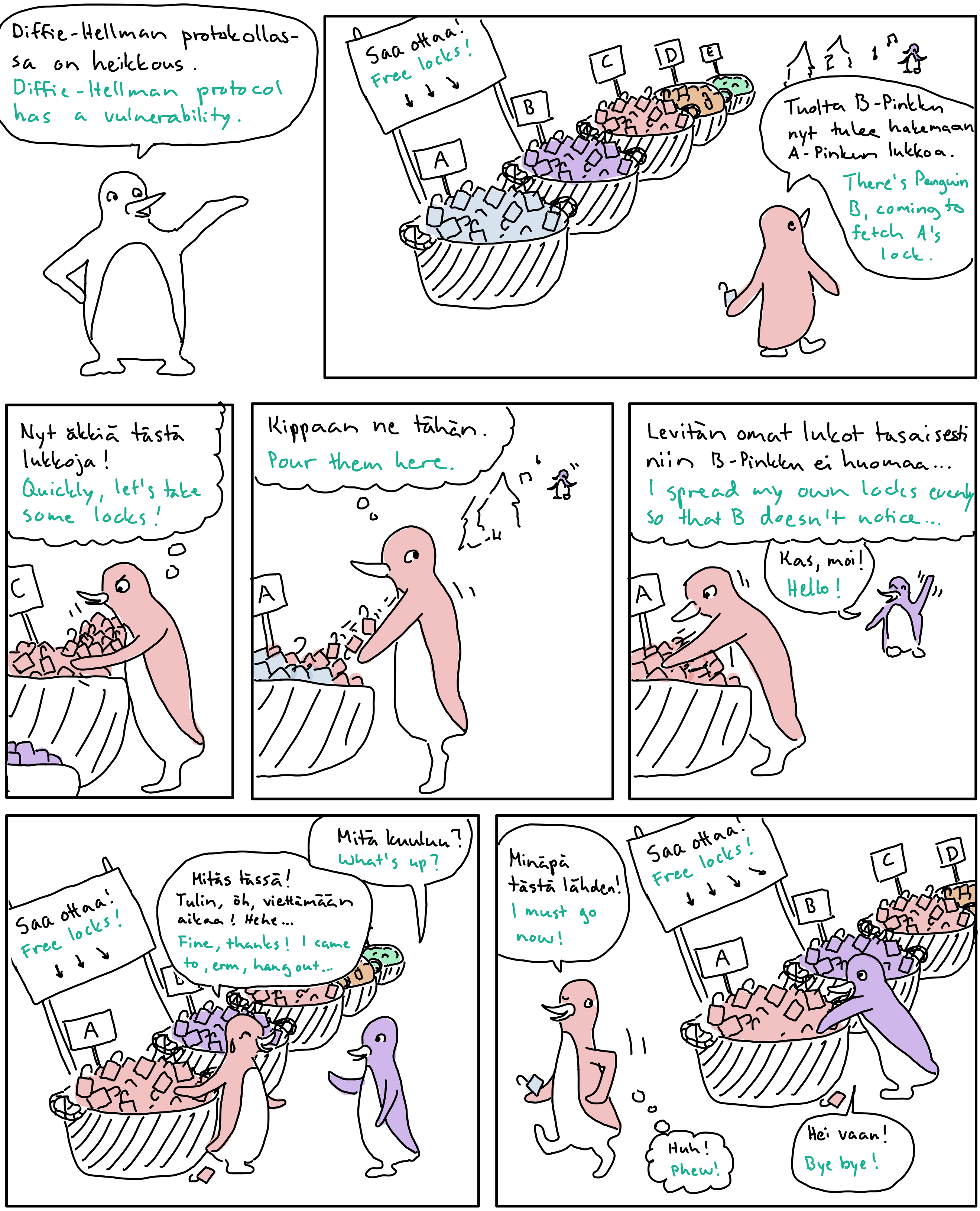
Star, J. R., Rittle-Johnson, B. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. Journal of Educational Psychology, 99(3), 561–574. https://doi.org/10.1037/0022-0663.99.3.561

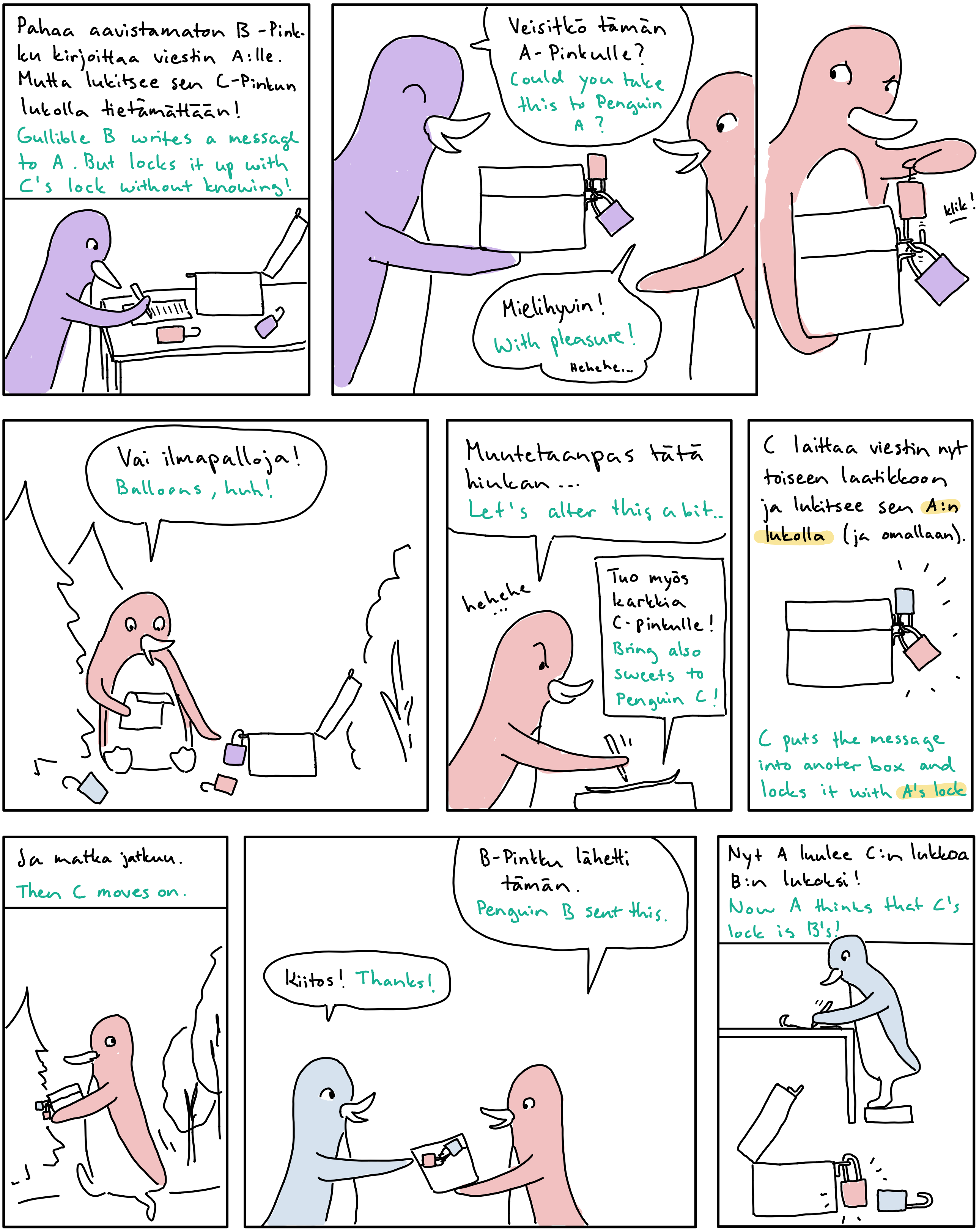
Xu, L., Liu, R.-D., Star, J. R., Wang, J., Liu, Y., & Zhen, R. (2017). Measures of potential flexibility and practical flexibility in equation solving. Frontiers in Psychology, 8, Article 1368. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.01368

PIKKU-PINKKU © P. Karanko

Pingviini välissä -hyökkäys

PITM attack (penguin-in-the-middle)





Nyt A ja B luulevat viestittelevänsä keskenään, mutta C pääsee käsiksi kaikkiin viesteihin! (Ja saa karkkia)

Now A and B think they are communicating with each other only, but in reality C can tamper with all the messages! (And gets sweets.)