NRO 2/2022

FYSIIKAN JA MATEMATIIKAN AIKAKAUSLEHTI
TIDSKRIFT FÖR FYSIK OCH MATEMATIK

ARKHIMEDES

TIETEEN HUIPPUYKSIKÖT:
VIRTUAALILABORATORIO VILMA

CANTOR, SAARNIO JA ABSOLUUTTINEN ÄÄRETTÖMYYS

VIELÄKÖ TARVITAAN JOUKKO-OPPIA?

ARKHIMEDES 2/2022

Julkaisijaseurat
Suomen Fyysikkoseura ry:
https://www.fyysikkoseura.fi
Fysikersamfundet i Finland rf:
https://www.physics.helsinki.fu/~fysif/
Suomen matemaattinen yhdistys ry:
https://www.matemaattinenyhdistys.fi/

Yhteystiedot
toimitus@arkhimedes.fi

PÄÄKIRJOITUS

ARTIKKELIT

KOLUMNI

KIRJA-ARVIO

PÄÄKIRJOITUS

Kimmo Tuominen

KUKA OLI ELVING?

Kaikki paitsi retkeily on turhaa. Kansallispuistoja ja muita retkeilyalueita kolutessa kohdalle sattuu kaikenlaista. Esimerkiksi Repoveden kansallispuiston Lapinsalmen parkkialueelle vievän tien varressa osuu silmiin tienviitta, jossa lukee *Elvingin torni*. Kyltin kupeessa on myös lionsklubin tunnus. Retkeilijän aika ei riitä tarkempaan torniin tutustumiseen, ja kännykän kenttä on jo kadonnut, joten internet ei pysty auttamaan. Mieleen jää kimpoilemaan kysymys: kuka tämä Elving mahtoi olla?

Vastaavanlainen kysymys alkoi poukkoilla ajatuksissa, kun törmäsin Arkhimedeksen edellisen toimituskunnan kadottamaan artikkeliin, jossa mainittiin Uuno Saarnio. Silloin polkujuoksukenkä ei vetänyt eri suuntaan, joten oli aikaa selvittää asiaa tarkemmin.

Tiedon valtatie johtaa aluksi Wikipediaan, josta löytyy lyhyt ja ytimekäs selvitys Saarniosta. Selviää, että pääasiallisen työuransa vuosina 1940-1963 Saarnio teki Helsingin kaupunginkirjaston johtajana. Kysäisen asiasta Keijo Kajantieltä, joka muistaa Saarnion hyvin vietettyään runsaasti aikaa Rikhardinkadun kirjastossa 50-luvulla. Kajantie muistelee mm. että ”Saarnio harrasti logiikkaa ja puhui kovasti kontinuumihypoteesista”. Ilmeisesti Saarnio uskoi todistaneensa Georg Cantorin kontinuumihypoteesin, mutta tiedeyhteisöä tämä todistus ei vakuuttanut.

Tässä Arkhimedeksen numerossa Jari Palomäki kirjoittaa joukko-opin perusteista ja Cantorista sekä Saarniosta — edellä mainittu kateissa ollut artikkeli saa päivänvalon. Jukka Tuomela puolestaan tarkastelee artikkelissaan, voitaisiinko joukko-opista luopua kokonaan. Toivottavasti nämä kirjoitukset kirvoittavat lukijakunnassamme ajatuksia ja innoittavat jatkamaan samoista aiheista tulevissa numeroissa. Onko kontinuumihypoteesi ratkaistavissa?

Toisaalta törmääminen Saarnioon muistutti siitä, että tieteen kysymyksiin ja yksityiskohtiin nivoutuvat ihmiset ja tarinat heidän takanaan ovat usein yhtä kiinnostavia kuin tieteen yksityiskohdat. Tämän numeron päätteeksi Tauno Metsänkylä esitteleekin kaksi tuoretta kirjaa liittyen Emmy Noetherin elämään ja tieteelliseen tuotantoon.

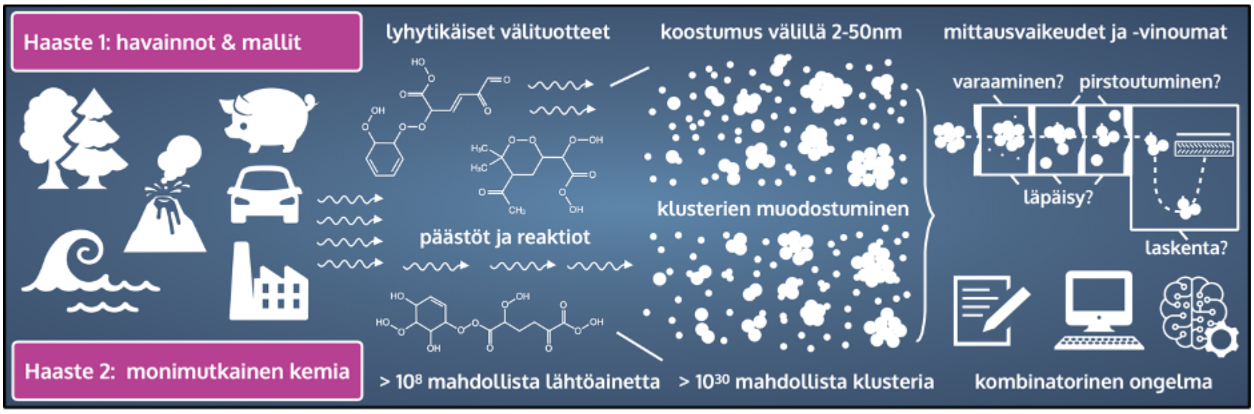
Lopuksi vielä: Elvingin tornin rakennutti Rudolf Bernhard Elving vuosina 1905-1907. Torni ehti vuosien saatossa rapistua, mutta vuonna 1994 paikalliset lionsklubit yhdessä Kymiyhtiön kanssa laittoivat tornin kuntoon. Siitä lähtien torni on ollut avoinna yleisölle. Täytyypä seuraavalla reppureissulla ohiajamisen sijaan poiketa!

TUTKIMUKSEN HUIPPUYKSIKÖT 2022-2029: VIRTUAALINEN LABORATORIO ILMAKEHÄN MOLEKYYLITASON REAKTIOILLE JA FAASIMUUTOKSILLE

Hanna Vehkamäki
Professori, Helsingin yliopisto

ILMAKEHÄ JA SUURET YMPÄRISTÖHAASTEET

Ilmastonmuutos ja ilman saastuminen ovat aikamme merkittävimmät ympäristöhaasteet. Kumpikin on seurausta ihmisen aiheuttamista ilmakehän koostumuksen muutoksista. Näiden ongelmien ytimessä on kaasumaisen aineen muuntuminen nesteeksi tai kiinteäksi aineeksi radikaalireaktioiden ja molekyylien klusteroitumisen seurauksena. Näissä prosesseissa syntyvät ilmakehän pienhiukkaset ja epäpuhtaassa palamisessa syntyvät nokihiukkaset ovat suurin epävarmuustekijä maapallon säteilypakotteessa (Stocker 2013) ja merkittävin ilmansaasteisiin liittyvien ennenaikaisten kuolemien aiheuttaja (Silva 2013). Suomen aerosolitutkimusyhteisö on ollut keskeisessä roolissa tämän ilmiön huippulaatuisen mallinnuksen ja kokeellisten työkalujen kehittämisessä. Prosessiymmärryksen syventämistä hankaloittaa kuitenkin tarvittavien työkalujen monimuotoisuus sekä eri metodeja systemaattisesti yhdistelevän tutkimuksen puute. Ongelma korostuu, kun kehitettyjä mittalaitteistoja ja malleja sovelletaan niiden alkuperäisten käyttötarkoitusalueiden laitamilla tai jopa ulkopuolella. Ilmakehän aerosolinmuodostukseen liittyy suuri joukko enimmäkseen orgaanisia kemiallisia yhdisteitä ja monenlaisia prosesseja. Monia näistä on jo yksinään haastava mallintaa tai mitata esimerkiksi mittalaitteiden herkkyyden kannalta liian pienten pitoisuuksien vuoksi tai siksi, että prosessit kattavat monen kertaluokan laajuiset pituus- ja aikaikkunat (Goldstein 2007). VILMAn tavoitteena on vastata näihin haasteisiin luomalla maailman johtava ilmakehän aerosolimuodostuksen virtuaalilaboratorio yhdistämällä ilmakehätieteitä ja tekoälyä. Tämänkaltaisen virtuaalilaboratorion pystyttäminen on jo itsessään merkittävä haaste, eikä sitä ole tässä laajuudessa yritetty aiemmin luonnontieteissä, vaikkakin vastaavia suunnitelmia on vireillä esimerkiksi hiukkasfysiikassa (Derkach 2019) ja energia-alalla (Ratner 2019). Huomattavasti yleisempiä ovat tuotantolinjojen digitaalikaksoset, joita käyte-



Kuva 1 : Kaaviokuva VILMAn tutkimuskysymyksistä ja keskeisistä haasteista

tään laadunvalvonnan parantamiseen sekä laitteistojen huoltotarpeiden vähentämiseen. Luonnontieteissä tähän mennessä kehitetyt virtuaalilaboratoriot on suunnattu opetukseen eikä tutkimukseen.

VIRTUAALILABORATORIO JA DIGITAALISET KAKSOSET

Rakennamme ensin digitaalisia kaksosia yksittäisistä laitteista ja ilmakehän prosesseista. Niiden avulla saamme tietoa muun muassa sellaisista suureista, joita ei voi suoraan mitata, sekä tuotamme systemaattisia ja luotettavia virhearvioita mittausten ja mallien tuloksille. Kehitämme myös menetelmiä tiedon visualisointiin sekä interaktiivisia lähestymistapoja, jotta digitaaliset kaksoset voidaan rakentaa ottaen tutkijoiden tieto ja näkemys huomioon. Lopulta yhdistämme useita digitaalisia kaksosia interaktiivisiksi virtuaalisiksi laboratorio- tai kenttäkokeiksi, jotka sisältävät kymmeniä eri laitteistoja, data-analyysityökaluja sekä usean mittakaavan mallinnusta. Virtuaalilaboratoriolla pyrimme vastaamaan tärkeisiin "mitä jos" kysymyksiin (esim. "mitä jos mittalaitteistomme olisivat herkempiä?" tai "mitä jos mallintaisimme tiettyjä prosesseja tarkemmin?") optimoidaksemme tutkimusmenetelmien kehitystä. Näin pystymme ratkaisemaan kaksi haastetta, jotka tällä hetkellä estävät aerosolimuodostuksen syvällisemmän ymmärryksen (katso kuva 1): 1) vaikeudet ja vinoumat lyhytikäisten tai epästabiilien kemiallisten yhdisteperheiden sekä erittäin pienten, alhaisen pitoisuuden omaavien molekyyliklusterien havaitsemisessa ja mallituksessa; sekä 2) hiukkasia muodostavien yhdisteiden kemiallisesta monimutkaisuudesta aiheutuva tarvittavien laskennallisten ja kokeellisten yksittäistutkimusten tähtitieteellinen määrä. Haasteiden ratkaiseminen vaatii tietojenkäsittelytieteen tutkimusta ja menetelmien kehitystä. Tietojenkäsittelytiede palvelee aerosolitutkimusta kolmessa eri roolissa: (i) rakennettaessa tehokkaita (laskenta)malleja koko prosessista, (ii) käytettäessä näitä malleja tuottamaan dataa ja suunniteltaessa kokeellisia laitteistoja sekä päätettäessä mitä ylipäätään mitataan tai simuloidaan, ja (iii) määritettäessä suorien mittausten ulottumattomissa olevia parametreja sekä mittaus- ja mallinnustulosten epävarmuuksia kokeellisista tai simuloiduista tuloksista.

MALLINNUKSEN JA MITTAUSTEN VAIKEUDET JA VINOUMAT

Sekä ilmakehän aerosolien että noen muodostumisessa tapahtuvat kaasufaasin kemialliset reaktiot edellyttävät äärimmäisen reaktiivisia välimuotoja, kuten radikaaleja ja Criegee-välituotteita, sekä monimutkaisia ja –vaiheisia reaktiopolkuja. Reaktiivisten välimuotojen käyttäytymisen havainnointi on usein hankalaa niiden erittäin matalien pitoisuuksien ja lyhyen eliniän vuoksi (Glasius 2016): uusimmatkin metodit mahdollistavat usein vain lopputuotteiden, kaikkein stabiileimpien radikaalien tai klusterien havaitsemisen. Laskennalliset lähestymistavat ovat välttämättömiä tutkittaessa näitä reaktioita, mutta mikään menetelmä, lukuun ottamatta äärimmäisen raskasta multireferenssihäiriöteoriaa, ei ole riittävän tarkka kuvaamaan välituotteita, jotka saattavat sisältää esimerkiksi relativistisen kvanttimekaniikan sanelemia elektronitilojen siirtymiä ja/tai edeltävistä reaktiovaiheista ylijäänyttä energiaa. Kehitämme koneoppimiseen perustuvia kustannustehokkaita mallinnusmenetelmiä ennustaaksemme äärimmäisen tärkeitä prosesseja hapettumis- ja palamisreaktioissa, sekä suunnittelemme näille reaktioille soveltuvia täydentäviä mittaustekniikoita.

Ilmakehän molekyyliklusterien havaitsemista vaikeuttaa sekä itse klusterien että niiden ainesosien äärimmäisen pieni lukumäärä ja massakonsentraatio (<1 ppt ja 1 pg/cm3). Nämä pitoisuudet ovat selvästi sähkömagneettiseen säteilyyn perustuvien spektroskooppisten menetelmien havaintorajojen alapuolella, joten ilmakehän aerosolien ja molekyyliklusterien kokeelliseen tutkimukseen käytetään perinteisesti tiivistymiseen perustuvia hiukkaslaskureita (CPC, condensation particle counter), massaspektrometrejä (MS) tai näiden yhdistelmiä. Modernit CPC:t kykenevät mittaamaan halkaisijaltaan 1-2nm kokoisten hiukkasten pitoisuuksia, vaikkakaan ei niiden koostumuksia. Lisäksi havaitsemistehokkuuteen liittyy suuria epävarmuuksia, erityisesti pienimmissä kokoluokissa. Tämä johtuu klusterien ja tiivistyvän höyryn välisen kemian puutteellisesta ymmärryksestä (Kangasluoma 2020). Vastaavasti MS-mittausten tulokset saattavat olla vinoutuneita johtuen erilaisista välttämättömistä esikäsittelyprosesseista, kuten lämpödesorptiosta (Li 2020) ja valikoivasta kemiallisesta varaamisesta (jos tutkittavat molekyylit tai klusterit ovat sähköisesti neutraaleja), ja/tai törmäyksen aiheuttamasta pirstoutumisesta mittalaitteen sisällä (Passananti 2019). Kaikki nämä vinoumat voivat riippua merkittävästi hiukkas-, klusteri-, molekyyli- tai ionityypistä, ulkoisista olosuhteista ja laitteiston asetuksista. VILMA hyödyntää sekä mallinnusta että täydentäviä kokeellisia tekniikoita mittausvinoumien mallinnuksessa, minimoinnissa ja kvantifioinnissa. Esimerkkejä tällaisista virheistä ovat varaamiseen liittyvät artefaktit neutraalien klustereiden havainnoinnissa tai kyvyttömyys erottaa monimutkaisten polyfunktionaalisten orgaanisten molekyylien rakenteellisia isomeerejä. Samanaikaisesti kehitämme uusia mittaustekniikoita mahdollistaaksemme MS-pohjaiset koostumusmittaukset myös halkaisijaltaan 2-50 nm hiukkasille. Ilmakehän paineessa toimivat massaspektrometrit voivat havaita suurimmillaan noin 1-2 nm kokoisia yksittäisiä molekyylejä ja klustereita (Sipilä 2016), kun taas aerosolimassaspektrometrien tämänhetkinen vastaava alaraja on 30-50 nm. Viimeaikaisten tutkimusten perusteella MS:n yhdistäminen lämpödesorptioon vaikuttaa lupaavalta kandidaatilta tämän aukon täyttämiseksi (Perraud 2020). VILMAn tavoitteena on pystyä luotettavasti mittaamaan halkaisijaltaan 2-50 nm kokoa olevien ilmakehän klusterien ja hiukkasten kemiallinen koostumus.

KEMIALLINEN MONIMUTKAISUUS

Ilmakehän kemia, joka määrää miten tuhansista erilaisista orgaanisista lähtöaineista (Ditto 2018), päädytään tiivistyviin lopputuotteisiin, sisältää satojatuhansia reaktiivisia yhdisteitä, joista jokaisella on jopa miljardeja konformeereja (kolmiulotteisia rakenteita). Orgaaniset yhdisteet reagoivat ja klusteroituvat joidenkin kymmenien epäorgaanisten yhdisteiden kanssa. Välituotteiden väliset reaktiot mahdollistavat miljardeista biljooniin erilaisia reaktiopolkuja. Tämä orgaanisten yhdisteiden ja ilmakehän reaktioreittien monimuotoisuus on tutkimuksemme keskiössä. Ratkaisemme kuitenkin myös noen muodostuksen, samoin kuin epäorgaanisen ilmakemian keskeisiä avoimia kysymyksiä, kuten kaasufaasisen jodioksohappojen (He 2021) ja organosulfaattien muodostumismekanismeja. Nykyiset ilmakehän kemiamallit (esim. MCM; mcm.leeds.ac.uk) kuvaavat tarkasti monien tyypillisten hiilivetyjen hapettumisen alkuvaiheet sekä suuren osan kaasufaasin epäorgaanisesta kemiasta. Sitä vastoin uni- ja bimolekulaaristen radikaalireaktioiden monimutkainen vuorovaikutus, joka tuottaa vähiten haihtuvia, eli parhaiten aerosolihiukkasia muodostavia lopputuotteita (itsehapetus; katso esim. Ehn et al., 2014; Bianchi 2019), on edelleen mysteeri huolimatta yksittäisten reaktiovaiheiden lupaavista kokeellisista ja teoreettisista tutkimuksista. VILMAn tavoite on käyttää uusia laskennallisia ja kokeellisia työkaluja tunnistamaan ja kvantifioimaan reaktiomekanismit, jotka muodostavat vähiten haihtuvia yhdisteitä ilmakehässä, ja käyttää virtuaalista laboratoriota eri yhdisteperheiden osuuden määrittämiseen.

Reaktioissa syntyvät haihtumattomat, hapettuneet orgaaniset aineet klusteroituvat yhdessä rikkihappoa ja typpeä sisältävien emästen kanssa, mikä käynnistää uusien hiukkasten muodostumisen. Huippuluokan kokeet yhdistettynä kvanttikemiaan ja klusteridynamiikkaan nojaaviin malleihin ovat mahdollistaneet läpimurron ilmakehän epäorgaanisten (esim. rikkihappoammoniakki) klusterien muodostumisen ymmärtämisessä (Elm 2020). Näille klustereille käytettyä lähestymistapaa ei kuitenkaan voida suoraan soveltaa orgaanisia aineita sisältäviin klustereihin, koska tarvittavien kokeiden tai raskaiden tietokoneajojen määrä olisi tähtitieteellinen. Makroskooppisen nesteen ominaisuuksiin, kuten nestefaasiaktiivisuuksiin ja kyllästyshöyrynpaineisiin, perustuvia perinteisiä termodynaamisia malleja ei voida luotettavasti soveltaa molekyyliklustereihin, koska monet keskeiset parametrit (kuten protoninsiirtoreaktioiden todennäköisyys) riippuvat voimakkaasti klusterin koosta (Elm 2020). Edes makroskooppiselle nesteelle ei ole olemassa malleja, jotka kuvaisivat tarkasti monimutkaisia, useita komponentteja sisältäviä orgaanisten ja epäorgaanisten aineiden seoksia, ja joidenkin keskeisten tiivistyvien höyryjen luokille yksikomponenttisysteemin kyllästyshöyrynpaineetkin ovat tuntemattomia (Kurtén 2016). VILMAn tavoitteena on kehittää tehokkaita laskennallisia menetelmiä ilmakehän kannalta merkityksellisten, mielivaltaisten molekyyliklusterien ominaisuuksien ennustamiseen tekoälyä käyttäen. Nanoklusterien muodostuttua ne kasvavat sekä tiivistymällä että monimutkaisempien nesteessä, kiinteässä aineessa tai niiden pinnalla tapahtuvien reaktioiden, kuten organosulfaattien muodostumisen, seurauksena. VILMAn tavoitteena on kvantifioida sekä palautuvien että ei-palautuvien neste- pinta- ja kiinteän faasin reaktioiden vaikutus vastamuodostuneiden hiukkasten kasvuun, keskittyen erityisesti orgaanisia ja epäorgaanisia yhdisteperheitä yhdistäviin reaktioihin.

Viitteet:

Bianchi, F. et al.: *Highly-oxygenated organic molecules (HOM) from gas-phase autoxidation involving organic peroxy radicals...*, Chem. Rev. 119, 3472, 2019.

Derkach, D. et al.: *Cherenkov detectors fast simulation using neural networks*, Nuclear Instruments and Methods in Phys. Res. Sec. A 952, 161803, 2019.

Ditto, J. C. et al.: *An omnipresent diversity and variability in the chemical composition of atmospheric functionalized organic aerosol.* Communications Chemistry 1, 75, 2018.

Ehn, M. et al.: *A large source of low-volatility...,* Nature 506, 47, 2014.

Elm, J. et al.: *Modelling the Formation and Growth of Atmospheric Molecular Clusters: A Review*, J.of Aerosol Science 149, 10562, 2020.

Glasius, M., and Goldstein, A. H.: *Recent Discoveries and Future Challenges in Atmospheric Organic Chemistry*, Environ. Sci. Technol. 50, 2754, 2016.

Goldstein, A. H. and Galbally, I. E.: *Known and Unexplored Organic Constituents in the Earth's Atmosphere*, Environ. Sci. Technol. 41, 1514, 2007.

He, X. et al.: *Role of iodine oxoacids...*, Science 371, 589, 2021.

Kangasluoma, J. et al.: *Overview of measurements and current instrumentation for 1–10 nm aerosol...,* J. Aerosol Sci. 148, 105585, 2020.

Kurtén, T. et al.: *α-pinene Autoxidation Products...*, J. Phys. Chem. A 120, 2569, 2016.

Li, Z. et al.: *A robust clustering algorithm for analysis ofcomposition-dependent organic aerosol thermal desorption measurements,* Atmos. Chem. Phys. 20, 2489, 2020.

Passananti, M. et al.: *How well can we predict cluster fragmentation inside a mass spectrometer?* Chemical Communications 55, 5946, 2019.

Perraud, V. et al.: *Size-Resolved Chemical Composition of Sub-20 nm Particles from Methanesulfonic Acid Reactions...*, ACS Earth & Space Chem. 4, 1182, 2020.

Ratner, D. et al.: *BES Roundtable on Producing and Managing Large Scientific Data with Artificial Intelligence and Machine Learning*, DOI: 10.2172/1630823, 2019.

Silva, R. A. et al.: *Global premature mortality due to anthropogenic outdoor air pollution and the contribution of past climate change*, Environ. Res. Lett. 8, 034005, 2013.

Sipilä, M. et al.: *Molecular-scale evidence ofaerosol particle formation via sequential addition of HIO3*, Nature 537, 532–534, 2016.

Stocker, T. et al.: IPCC, 2013: *Climate Change 2013: The Physical Science Basis*, Cambridge University Press, 2013.

PROMOTING MATHEMATICS IN COMPLICATED TIMES

Nicolás Atanes Santos

It is very difficult to define mathematics, and even so, it is a subject in schools where students can leave even without knowing how to define it. Mathematics matters, is necessary, and useful, but the application appears with a theoretical background behind it, and it is also necessary to make this theoretical background known in order to progress. Seeking application to everything is sometimes absurd, and devoting oneself to pure mathematics is perfectly normal. I am a popularizer of mathematics, and I find myself in situations that frustrate me a lot. Classmates who learn derivatives in high school without knowing what they mean, people who ask you to find a sum, as if more than math you were good at mental calculation, and then hearing my brothers complain about math and say that they are useless… The pandemic affects many people, and it has to go down. Many things still keep happening and just increases this hate towards mathematics.

In my work to spread mathematics, I have asked politicians who are in charge of education and youth to ask teachers to promote a critical spirit in mathematics. Mathematics is not to believe, but to make things clear. Some listen and agree that there is a problem, but no one seems to want to fix it. Because solving it is another problem, and they don't know which one is worse. Some want to see math disappear, and that's frustrating.

Mathematics education fails, and when students learn something that is not mathematics, calling it mathematics in fact it is a problem, because they learn to hate real mathematics and underestimate the value of this science, and in fact they are not learning but simple math. In the 1970s, a brief and dramatic change in the way mathematics was taught took place, and it failed because of complexity. Definitely what is most important is to show “real” mathematics, those who are adequate to the times, and try to make each student understand what is going on in mathematics. What is worse is that many students think they are not good at mathematics. If we want to stop this, we must ensure that students do not learn math as if history would be. A math proof can not be memorized by hand, and so that is something we can do to achieve this. If we show various math things, and why they matter, and not just a few tricks and how to do them, we will get students more motivated than if they learn things by memorization. Math Olympiad is the best example: you can learn many things, but the problems are random. There are many approaches to the problem, but sometimes the idea is just to think creatively. You can just do many problems to prepare, and having an interest in it in order to prepare the maximum (as sportsmen do) is the best way to get the maximum points.

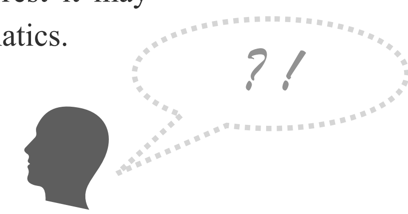
Fortunately, there are and have been many popularizers of mathematics and the number is increasing more and more. This is increasing the interest of people towards mathematics, but the problem is always the same: math popularizers always reach the same people, those who are already interested in mathematics, and not those who are not.

I try to reach those who are not interested in mathematics, those who hate math. Unfortunately, there are many, but some things are common among them. One thing they all have in common is that they see mathematics as something hard, simple, without any interest at all. Mathematicians see them as numberists. And it is more than that.

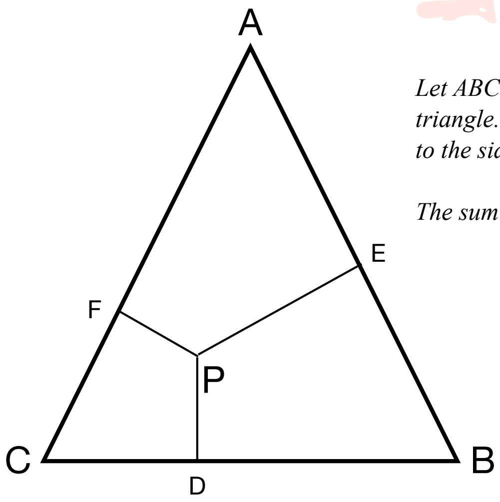
I used to show the beauty of mathematics through games, such as Rubik’s cubes. I explained that there are more states in the Rubik’s cube than atoms in a bottle of water, or humans in the world. One day one teenager asked me why this matters, and I told him that a Rubik’s cube is an example to understand the general idea of combinatorics. In a business, if there are 12 people for an election to the president, vice president and worker, then there are 1320 ways to choose them. More than what anyone may expect.

When I am asked to explain what I do, I say to raise awareness about the importance of math. When I started writing this, I thought about how important football is, but how much less important the Abel Prize winner is, or Conway's game of life as entertainment is. In my free time, I spend creating and solving math problems, and my wish is that people get less afraid of them, and get encouraged to play them at an early age.

Mathematics does not depend on the weather, the place, or the context, and learning mathematics indirectly helps you make decisions, such as to understand which object is bigger, how to compare two situations, and to find solutions to immediate questions. Popularizing mathematics is important, not only for people to learn, but also so people do not make mistakes in the interpretation of data, or in serious debates such as counting. We, those interested in mathematics, must get this message across, because maybe someone near you forgot mathematics because of a lack of interest, and small things such as Viviani’s theorem may bring back the interest it may have once had in mathematics.

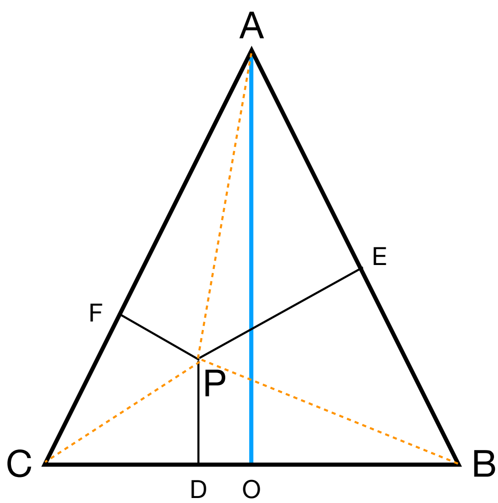


VIVIANI'S THEOREM



Let ABC be an equilateral triangle and P an arbitrary point inside the triangle. The segments PD, PE and PF are, respectively, perpendicular to the sides BC, AC and AB.

The sum PD+PE+PF is equal to the height of the equilateral triangle.



Proof:

$\text{Area(APB)} = \frac{1}{2}\,\text{Area(rectangle AB} \times \text{PE)}$ **(prove this!)**

$\text{Area(BPC)} = \frac{1}{2}\,\text{Area(rectangle BC} \times \text{PD)}$

$\text{Area(APC)} = \frac{1}{2}\,\text{Area(rectangle CA} \times \text{PF)}$

The sum of the l.h.s. is Area(ABC), which is equal to half of the area of the rectangle with sides BC and (PE+PD+PF). But this is also equal to the area of a rectangle with sides BC and AO. Hence

AO=PE+PD+PF, which we wanted to prove.

Exercise: construct at least two other proofs of Viviani's theorem.

CANTOR, SAARNIO JA ABSOLUUTTINEN ÄÄRETTÖMYYS

Jari Palomäki

"Ääretön on filosofian, uskonnon ja matematiikan yhteinen käsite ja yhteinen ongelma."

Uuno Saarnio: *Mitä tiedämme äärettömästä?*, 1969, 1.

Kirjoittamassaan johdannossa Uuno Saarnion (1896–1977) *Das System und Darstellung der transfiniten Ordnungszahlen mit hilfe der Höheren Rechenoperationen* –teokseen vuonna 1958, saksalainen matemaatikko ja loogikko Heinrich Behmann (1891–1970) totesi Saarnion jatkavan Georg Cantorin (1845–1918) alulle panemaa joukko-opin tutkimusta Cantorin harjoittamassa perinteisessä muodossa.[1] Trigonometristen sarjojen yksikäsitteisyyden tutkimus johti Cantorin tarkastelemaan äärettömiä jonoja ja luokittelemaan näin muodostettuja joukkoja. Näin Cantor mahdollisti joukko-opin syntymisen. Cantor uskoi löytäneensä äärellisen ja Absoluuttisen äärettömän lisäksi myös kolmannen äärettömyyden kategorian, jota hän kutsui transfiniittiseksi. Näin Cantor onnistui tuomaan joukko-oppinsa avulla aktuaalisen äärettömyyden myös matemaattisen tutkimuksen piiriin. Cantorin alkuperäinen ajatus Absoluuttisesta äärettömästä, joka on inhimillisen ymmärryksen tuolla puolen, oli ensisijassa teologinen ja se esitti tärkeää osaa Cantorille koko hänen elämänsä ajan.[2]

Absoluuttista ääretöntä voidaan kuitenkin lähestyä ja tarkastella matematiikan avulla. Sen matemaattisen vastineen muodostivat kaikkien kardinaali- ja järjestyslukujen joukot, jotka kaikki-joukkoina kuitenkin muodostuivat paradokseiksi. Näin kaikki-joukko ei muodosta joukkoa eikä se siten ole joukko. Cantorin ja Saarnion suhtautumisessa kaikkien kardinaali- ja järjestyslukujen joukkoihin liittyviin paradokseihin löytyy yhtäläisyyksiä. Molemmat

[1] Cantorin tavoin Saarnionkin harjoittama joukko-opin tutkimus ei ollut aksiomaattista. Tällaista Cantorin harjoittamaa ei-aksiomaattista joukko-oppia John von Neumann (1903-1957) kutsui naiiviksi joukko-opiksi, Moore 1982, 260.

[2] Lyhyet kuvaukset Georg Cantorin elämästä ja persoonasta , ks. Cantor, 1932, 452-483, tai Dauben 1979, 271-299. Uuno Saarnion elämästä, filosofiasta ja matematiikasta, ks. Palomäki 2002.

tähdentävät paradoksien olevan ratkaistavissa niin, etteivät ne oikeastaan ole matematiikkaan kuuluvia ongelmia. Lisäksi he tarkastelevat näitä paradokseja lähinnä tietoteoreettisesta näkökulmasta. Toisaalta Cantorilla korostuu myös teologinen tulkinta, kun taas Saarnion tulkinta, joka perustuu erityisesti Immanuel Kantin (1724–1804) tietoteoriaan, on filosofinen.

Seuraavassa esitellään aluksi lyhyesti Georg Cantorin alulle paneman joukko-opin synty ja Cantorin siinä löytämät paradoksit, jotka koskivat kaikkien kardinaali- ja järjestyslukujen "joukkoa", jota Cantor kutsui Absoluuttiseksi äärettömäksi. Tämän jälkeen tarkastellaan Absoluuttista ääretöntä matemaattisesti nykyisissä joukko-opin esityksissä käytetyn reflektioperiaatteen valossa. Seuraavaksi esitetään Absoluuttisen äärettömän matemaattisesta tulkinnasta seuraavat joukko-opin paradoksit sekä niiden matemaattiset ratkaisut. Lopuksi esitetään Cantorin ja Saarnion tietoteoreettiset ratkaisut näihin paradokseihin.

GEORG CANTOR JA JOUKKO-OPIN SYNTY

Ennen Georg Cantorin tutkimuksia 1800-luvun lopulla, filosofiassa, luonnontieteissä ja matematiikassa ei hyväksytty aktuaalisen äärettömyyden käsitettä, vaan ainoastaan Aristoteleen tavoin ymmärretty potentiaalinen äärettömyys.[3] Ajattelijat ja tieteentekijät kuten Galileo Galilei (1564–1642), Baruch Spinoza 1632–1677), Isaac Newton (1642–1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), ja jopa Carl Friedrich Gauss (1777–1855) kielsivät aktuaalisen äärettömyyden olemassaolon. Yhtenä kiellon syistä oli, että aktuaalisen äärettömän käsitteen ajateltiin sisältävän ristiriidan, kuten esimerkiksi Galilein löytämä vaikeus verrata kahden eri äärettömän joukon – luonnollisten lukujen joukon $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$ja neliölukujen joukon $\mathbf{M} = \{1, 4, 9, 16, \ldots n^2, \ldots\}$ – suuruutta keskenään. Neliölukujen joukko $\mathbf{M}$ on luonnollisten lukujen joukon $\mathbf{N}$ aito osajoukko, mutta silti jokaista joukon $\mathbf{M}$ neliölukua vastaa joukon $\mathbf{N}$ luonnollinen luku ja päinvastoin: $1 \leftrightarrow 1, 2 \leftrightarrow 4, 3 \leftrightarrow 9, 4 \leftrightarrow 16, \ldots n \leftrightarrow n^2 \ldots.$ Galilein "paradoksi" on siinä, että joukon $\mathbf{N}$ aito osajoukko $\mathbf{M}$ on yhtä suuri kuin koko joukko. Tällöin Galilein protagonisti Salviati

[3] Merkittävänä poikkeuksena on mainittava Johannes Duns Scotus (1266–1308), joka kritisoi Tuomas Akvinolaisen äärettömän määritelmää virhepäätelmänä. Akvinolaisen määritelmän, *Summa Theologiae* I.7.1, mukaan olio on äärellinen (q), jos se on suhteessa rajoittavaan olioon (p), jolloinka olio on ääretön $(\sim q)$, jos sillä ei ole suhdetta rajoittavaan olioon $(\sim p)$. Päättely on siten muotoa: $(p \to q) \to (\sim p \to \sim q)$ joka ei ole loogisesti pätevä. Scotuksen mukaan olio on äärellinen tai ääretön, koska sillä on joko sisäinen äärellisyyden aste tai ääretön täydellisyys, (Cross 1999, 40). Scotus päättelee Jumalan aktuaalisen äärettömyyden kahdessa vaiheessa seuraavasti: Abstrahoidaan ensin potentiaalisesti ääretön avaruudellinen ulottuvuus aktuaaliseksi kvantitatiiviseksi äärettömäksi. Tämä ääretön on kuitenkin epätäydellinen, koska se on tehty osista ja osat ovat kokonaisuutta pienemmät. Toisena vaiheena siirrytään aktuaalisesta kvantitatiivisesta äärettömästä aktuaaliseen kvalitatiiviseen äärettömään, missä jokainen osa on yhtä suuri kuin kokonaisuus – ja tämä aktuaalinen kvalitatiivinen ääretön on täydellinen eli Jumala, (*ibid.*, 40, 41). Kun Scotus oletti, että jos jokin on ääretön, niin se ei voi olla mitään muuta vähempää, (*ibid.*, 30), niin tämä olettamus ei kuitenkaan päde, sillä Cantor tutkimuksissaan osoitti eri suurten matemaattisten äärettömyyksien olemassaolon. Myöhäisen keskiajan irtautumisesta Aristoteleen perustuvasta ajattelusta, ks. Murdoch 2009.

toteaa, että on pakko päätellä, että neliölukuja on yhtä paljon kuin luonnollisia lukuja. Puhuessaan sitten eripituisten janojen pistejoukkojen vertailusta, hän toteaa niihin liittyvän "paradoksin" toteamalla, että molemmat ovat äärettömiä. Galilei päätteli, että ominaisuuksia “yhtä suuri”, “suurempi” ja “pienempi” ei voida soveltaa äärettömiin, vaan ainoastaan äärellisiin määriin. Näyttäisi siten lähinnä siltä, että Galilei päätyi olettamaan, että on olemassa vain yksi ääretön.[4]

Cantor oli ensimmäinen, joka väitti, että aktuaalinen äärettömyys voi olla matemaattisen tutkimuksen kohteena ja sanoo käsityksellään olevan yhtymäkohtia Nikolaus Cusanuksen filosofian kanssa.[5] Hän sanoi, että ihmisen järki (ratio) voi luoda käsitteelliset välineet sen sisäisen rakenteen tutkimiseen. Cantor uskoi, että syy siihen, ettei aktuaalista äärettömyyttä käytetty matematiikassa, filosofiassa ja teologiassa perustui yleiseen ja kaikkialle levinneeseen harhaluuloon, että äärellisiä ominaisuuksia ei voi omistaa äärettömälle ilman ristiriitoja. Vuoden 1883 artikkelissaan “Grundlagen einer allgemeinem Mannigfaltigkeitslehre” hän käsitteli Aristoteleen ja keskiajan skolastikkojen argumenttia, jonka mukaan jos ääretön sallitaan, niin se mitätöi äärellisen luvun.[6] Esimerkiksi, jos n ja m ovat nollaa suurempia äärellisiä lukuja, niin $n + m > n$ ja $n + m > m$. Sen sijaan, jos m on ääretön, niin olkoon n mikä tahansa äärellinen luku, niin $n + m = m$. Cantor kuitenkin totesi, että on väärin olettaa äärettömien lukujen noudattavan samoja laskulakeja kuin äärelliset luvut. Esimerkiksi, vaikka äärelliset luvut noudattavat kommutatiivilakia $m + n = n + m$, niin transfiniittisille järjestysluvuille se ei päde kuten $1 + \omega = \omega$, mutta $\omega + 1 \neq \omega$.[7]

Vuonna 1887 artikkelissaan “Mitteilung zur Lehre von Transfiniten” Cantor siteeraa Tuomas Akvinolaisen *Summa Theologiae* I, q. 7, a. 4. ja sanoo, että kyseissä kappaleessa esiintyvät kaksi merkittävintä vastaväitettä aktuaalista ääretöntä vastaan, mitä historian kuluessa on koskaan esitetty:

> 1) ... jokaisen moneuden on oltava *jossakin moneuden lajissa, mutta moneuden lajit ovat lukumäärien lajien mukaisia. Mutta mikään lukumäärän laji ei ole*

[4] Galilei 1914, 31, 32. Jo keskiajalla aktuaalisen äärettömyyden olemassaoloa vastaan esitettiin erisuurten äärettömyyksien paradoksia seuraavasti: Jos hyväksytään aktuaalinen äärettömyys, niin jotkut äärettömyydet ovat suurempia kuin jotkut toiset, jotka samalla ovat edellisten osia. Kuitenkin on “aksiomaattista”, että kaikki äärettömyydet ovat yhtä suuria. Näin ollen osa ei voi olla pienempi, vaan yhtä suuri kuin kokonaisuus, mikä on absurdia. Tämä käsitys oli yleinen 1200- ja 1300-luvulla ja muun muassa Bonaventura (1221–1274) sisällytti sen kirjoitukseensa, joka käsitteli ikuisen maailman mahdollisuutta, Murdoch 1982, 569, 570.

[5] Cantor 1932, 205. Cantor mainitsee Bernard Bolzanon (1781–1848) postuumisti vuonna 1851 julkaistun teoksen *Paradoxien des Unendlichen, ibid.*, 179. Teoksessaan Bolzano kehittelee joukko-oppia käyttäen muun muassa sanaa ” Menge” ja todistaa induktiolla äärettömän olemassaolon, Bolzano 1851, § 13.

[6] Cantor 1932, 173–175. Cantor analysoi Aristoteleen näkemyksiä äärettömästä ja viittaa erityisesti tämän *Metafysiikan* kirjan XI, lukuun 10, joka sisältää lyhennettynä *Fysiikan* kirjassa III esittämiä tarkasteluja äärettömästä.

[7] Cantor 1932, 177. Äärettömille joukoille ei myöskään päde se äärellisyydessä pätevä laki, jonka mukaan *totum parte majus* eli kokonaisuus on osaansa suurempi, Saarnio 1969, 71. Richard Dedekindin (1831–1916) mukaan ääretön joukko voidaan määritellä lauseella: ”Joukko on ääretön, jos sillä on aito osajoukko, jonka alkiot voidaan rinnastaa yksi-yksisesti koko joukon kaikkien alkioiden kanssa,” *ibid.*, 73. Näin määriteltynä saadaan Dedekind-ääretön, joka selittää myös Galilein ”paradoksin.” Ääretön voidaan määritellä myös toisin: ”Ei-tyhjä joukko A on äärellinen, jos on olemassa positiivinen kokonaisluku n siten, että joukon A alkiot voidaan rinnastaa yksi-yksisesti joukon $\{1,2,3,\ldots,n\}$kanssa; muutoin A on ääretön,” ks. tarkemmin Moore 1982, 22-30.

> *ääretön*, sillä jokainen lukumäärä on moneus jota mittaa yksikkö. Siksi moneus ei voi olla aktuaalisesti ääretön, ei itsessään eikä aksidentaalisesti. 2) Samoin jokainen moneus asioissa on luotu ja kaikki luotu kuuluu *johonkin määrättyyn luojan tarkoitukseen, sillä mikään toimija ei toimi tarkoituksetta*. Siksi on välttämätöntä, että kaikki luotu sisältyy määrättyyn lukumäärään. Siksi on mahdotonta, että ääretön moneus voisi olla aktuaalisesti edes aksidentaalisesti. [8]

Akvinolaisen ensimmäinen kohta näyttää sanovan, että jokaisella joukolla on lukunsa, mutta kaikki luvut ovat äärellisiä. Toinen kohta puolestaan näyttää sanovan, että jokaisella joukolla on oltava määrätty merkitys tai tavoite, mutta jokainen määrätty tavoite on äärellinen. Kirjeessään teologi Konstantin Schlottmannille (1819–1887) 9.4.1887 Cantor sanoi pitävänsä Akvinolaisen esittämiä vastaväitteitä oikeutettuina, mutta vain sillä edellytyksellä, ettei hänen omaa teoriaansa aktuaalisesta äärettömästä, jota hän kutsui transfiniittiseksi, olisi kehitetty.[9]

Cantorin mukaan emme voi tulla toimeen ilman potentiaalista ääretöntä, jota hän kutsui epäaidoksi äärettömäksi (*uneigentlich-unendliches*) ja merkitsi lemniskaatalla ∞. Potentiaalinen ääretön kuitenkin välttämättä edellyttää jo tietyn arvo-alueen kokonaisuutena olemassa olevaksi. Näin ollen jokainen potentiaalisen äärettömän tarkka matemaattinen käyttö edellyttää aktuaalisen äärettömän, jota Cantor kutsui aidoksi äärettömäksi (*eigentlich-unendliches*).[10]

Kehittäessään transfiniittisten lukujen teoriaa Cantorin perusajatuksena oli, että käsitteet “ekvivalentit joukot”, “kardinaaliluku” ja “lueteltavuus” koskevat paitsi äärellisiä joukkoja myös äärettömiä joukkoja.[11] Kun ääretön ajatellaan olevan vastakohtana äärelliselle, Cantor käsittelikin äärettömiä joukkoja analogisesti äärellisten joukkojen kanssa. Näin syntyi Cantorin luoma teoria transfiniittisistä luvuista.

Äärettömistä joukoista yksinkertaisin ja pienin on luonnollisten lukujen joukko $\mathbf{N} = \{1,2,3,\ldots\}$, jonka kardinaliteettia Cantor merkitsi $\aleph_0$:lla.[12] Cantor ajatteli, että $\mathbf{N}$ on täydellisesti ja kokonaisena annettu eikä epätäydellisesti päättymättömänä lukujonona, jota hän merkitsi ∞:lla. Näin Cantor erotti selkeästi toisistaan potentiaalisen äärettömän ja aktuaalisesti äärettömän joukon. Potentiaalisen äärettömän joukon alkiot voidaan järjestää päättymättömäksi jonoksi,

---

[8] Cantor 1932, 403, 404. Lainaus ja kursivointi Cantorin: “[1) ... quia omnem multitudinem oportet esse *in aliqua specie* multitudinis. *Species autem multitudinis sunt secundum species numerorum. Nulla autem species numeri est infinita*, quia quilibet numerus est multitudo mensurata per unum. Unde impossibile est esse multitudinem infinitam actu; sive per se, sive per accidens. 2) Item omnis multitudo in rerum natura existens est creata; et omne creatum *sub aliqua certa intentione* creantis comprehenditur, *non enim in vanum agens aliquod operatur*. Unde necesse est quod sub certo numero omnia creata comprehendantur. Impossibile est ergo esse multitudinem infinitam in actu, etiam per accidens.”

[9] Hallett 1984, 22.

[10] Hallett 1984, 25.

[11] Kaksi joukkoa A ja B ovat *ekvivalentit*, jos jokaista joukon A alkiota vastaa yksi-yksisesti joukon B alkio ja päinvastoin, jokaista joukon B alkiota vastaa yksi-yksisesti joukon A alkio. Jos joukot A ja B ovat ekvivalentit, sanotaan niiden olevan *yhtä mahtavat* (Mächtigkeit), toisin sanoen, niillä on sama *kardinaliteetti*. Siten joukon A *kardinaaliluku* on kaikkien joukon A kanssa ekvivalenttien joukkojen yhteinen ominaisuus ja sitä merkitään A. Joukko A on *numeroituva*, jos joukon A alkiot voidaan rinnastaa yksi-yksisesti joko kaikkien luonnollisten lukujen kanssa tai jonkin luonnollista lukua n pienempien luonnollisten lukujen kanssa.

[12] $\aleph$, (alef) on heprean aakkosten ensimmäinen kirjain, Cantor 1932, 293

josta puolestaan saadaan mielivaltaisen suuria äärellisiä osajoukkoja, muttei koskaan koko joukkoa, jolloin se tietyssä mielessä on aina äärellinen. Aktuaalisesti ääretön joukko puolestaan on täydellisesti annettu kokonaisuus. Näin ollen ∞ ei koskaan saavuta $\aleph_0$:aa.

Cantor osoitti, että luonnollisten lukujen joukon $\mathbf{N}$ ja rationaalilukujen joukon $\mathbf{Q}$ välillä vallitsee yksi-yksinen vastaavuus eli bijektio, mutta $\mathbf{N}$:n ja reaalilukujen joukon $\mathbf{R}$ välillä tällainen ei ole, ts. $|\mathbf{N}| = |\mathbf{Q}| = \aleph_0$, mutta $|\mathbf{R}| > \aleph_0$.[13] Hän oletti reaalilukujen joukon $\mathbf{R}$ kardinaaliteetin olevan $\aleph_0$:aa seuraavaksi suurempi kardinaliteetti ja merkitsi sitä $\aleph_1$:llä. Cantor kykeni osoittamaa myös, että $|\mathbf{R}| = 2^{\aleph_0}$, jolloin Cantorin oletuksen mukaan saadaan yhtälö: $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, jota kutsutaan Cantorin kontinuumihypoteesiksi. Lukuisista yrityksistään huolimatta Cantor ei kyennyt todistamaan hypoteesia oikeaksi – eikä myöskään vääräksi.[14]

Transfiniittisten kardinaalilukujen lisäksi on olemassa myös transfiniittisiä järjestyslukuja.[15] Äärellisillä joukoilla järjestysluvut ja kardinaaliluvut ovat yksi-yksisesti vastaavia toistensa kanssa. Sen sijaan äärettömyydessä saman kardinaaliluvun omaavilla tietyillä tavoilla järjestetyillä joukoilla voivat olla erilaiset transfiniittiset järjestysluvut. Luonnollisten lukujen tavanomaisella suuruusjärjestyksellä järjestettyä joukkoa Cantor merkitsi ω:lla, toisin sanoen, $\omega = 1,2,3,4,\ldots$. Jos nyt järjestetään ensin kaikki parittomat luvut ja niiden jälkeen kaikki parilliset luvut eli $1, 3, 5, 7, \ldots 2, 4, 6, 8, \ldots$, niin saadaan transfiniittinen järjestysluku $\omega + \omega = \omega 2$. Kaikkien parillisten luonnollisten lukujen joukon kardinaliteetti on $|\{2n\}| = \aleph_0$ ja kaikkien parittomien luonnol-

[13] $\mathbf{N}$ ja $\mathbf{Q}$ ovat numeroitavasti äärettömiä, kun taas $\mathbf{R}$ on ylinumeroituvasti ääretön.

[14] Monet ovat siitä lähtien pyrkineet todistamaan kontinuumihypoteesin, mutta toistaiseksi siinä epäonnistuneet. Vuonna 1939 Kurt Gödel (1906-1978) osoitti, että kontinuumihypoteesi voidaan lisätä aksiomaattiseen joukko-oppin ilman ristiriitaa, jolloin kontinuumihypoteesi olisi tosi ja sitä ei voisi kumota, kun taas vuonna 1963 Paul J. Cohen (1934-2007) osoitti, että kontinuumihypoteesin negaatio voidaan lisätä aksiomaattiseen joukko-oppiin ilman ristiriitaa, jolloin kontinuumihypoteesi voisi olla epätosi ja se voitaisiin kumota. Näin ollen kontinuumihypoteesi on joukko-opin aksiomeista riippumaton. Myös Saarnio on pyrkinyt todistamaan kontinuumihypoteesia, ks. Saarnio 1968, 1969, 458–485. Saarnion "konstruktiivinen" todistus ei perustu aksiomaattiseen joukko-oppiin, eikä se ole saanut myöskään tiedeyhteisön hyväksyntää. Toistaiseksi ei ole selvää, mitä oletuksia hänen todistukseensa tarkemmin sisältyy ja onko todistuksessa virhe ja jos, niin mikä ja missä. Systemaattinen tutkimus Saarnion todistuksesta on siis vielä tekemättä. Matemaatikkojen suhtautuminen kontinuumihypoteesiin ilmentää sen perustavaa filosofista luonnetta. Intuitionistit ovat ontologiselta kannaltaan konseptualisteja ja heidän mielestään kysymys on mieletön. Formalistit ovat ontologiselta kannaltaan nominalisteja ja heidän mielestään yhdessä systeemissä se on tosi ja toisessa epätosi riippuen valituista aksiomeista. Realistit ovat ontologiselta kannaltaan platonisteja ja heidän mielestään kontinuumihypoteesi on tosi tai epätosi aksiomeista ja tiedostammekin riippumatta. Viime aikana erityisesti matemaatikko William Hugh Woodin (1955–) on argumentoinut ensin sen puolesta, että kontinuumihypoteesi on mielekäs, mutta se olisi epätosi. Toisin sanoen, kontinuumin kardinaliteetti ei olisi $\aleph_1$, vaan se oli $\aleph_2$, ks. Woodin 2001. Sittemmin Woodin on muuttanut mieltään ja hän on alkanut argumentoimaan sen puolesta, että kontinuumihypoteesi voisikin olla tosi, ks. Rittberg 2015.

[15] Joukko on *järjestetty*, jos jonkin säännön tai relaation avulla voidaan sanoa mistä tahansa joukon kahdesta alkiosta, kumpi on toisen edellä ja kumpi jäljessä. Järjestetty joukko on *hyvinjärjestetty*, jos sillä ja sen jokaisella ei-tyhjällä osajoukolla on ensimmäinen alkio. Hyvinjärjestetyn joukon *järjestystyyppi* on puolestaan samanlaisten hyvinjärjestettyjen joukkojen yhteinen ominaisuus. *Järjestysluku on* hyvinjärjestetyn joukon järjestystyyppi. Järjestetyt joukot ovat *isomorfiset*, jos niiden alkiot vastaavat yksi-yksisesti toisiaan ja niiden järjestys on sama siten, että alkioiden välinen järjestys säilyy tässä vastaavuudessa.

listen lukujen joukon kardinaliteetti on $|\{2n+1\}| = \aleph_0$, jolloin helposti nähdään, että $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. Sen sijaan $\omega 2 \neq \omega$.[16]

Cantor osoitti myös, että on olemassa kasvava, yhä suurempien transfiniittisten kardinaalilukujen jono $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_3, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega-1}, \ldots, \aleph_\nu, \ldots$.[17] Vastaavasti, on olemassa kasvava, yhä suurempien transfiniittisten järjestyslukujen jono[18]

$1,2,3,\ldots,\omega,\omega+1,\ldots,$
$\omega 2,\omega 2+1,\ldots\omega\cdot\omega = \omega^2,\omega^2+1,\ldots,$
$\omega^3,\omega^3+1,\ldots,\omega^\omega,\omega^\omega+1,\ldots,$
$\omega_1,\omega_1+1,\ldots,\omega_\mu,\ldots$

Kaikki transfiniittiset kardinaaliluvut samoin kuin kaikki transfiniittiset järjestysluvut muodostavat Cantorin mukaan Absoluuttisen äärettömän, jonka tutkiminen ei enää kuulu matematiikkaan vaan teologiaan. Toisin sanoen, Cantorin mukaan Absoluuttinen ääretön on yhtä kuin Jumala.

Näin Georg Cantorin äärellisen ja äärettömien rationaaliset erottelut voidaan esittää seuraavasti:

1. Finiittiset eli äärelliset luvut: $1,2,3,\ldots,n$
2. Potentiaalinen ääretön: ∞
3. Transfiniittiset kardinaaliluvut: $\aleph$
4. Transfiniittiset järjestysluvut: ω
5. Absoluuttinen äärettömyys: Jumala

Tämän erilaisten äärettömyyksien erojen perusteella voidaan todeta, että Aristoteles erotti toisistaan (1.) äärellisen, (2.) potentiaalisen äärettömän, sekä aktuaalisen äärettömän, jonka olemassaolon hän kuitenkin kielsi. Cantor sen sijaan osoitti, että myös aktuaalinen ääretön on olemassa,[19] joka puolestaan jakaantui kahteen osaan, nimittäin kasvavaan aktuaaliseen äärettömyyteen eli transfiniittiseen (3. ja 4.), sekä enää kasvamattomaan Absoluuttiseen aktuaaliseen äärettömään (5.).[20]

ABSOLUUTTINEN ÄÄRETTÖMYYS

Platon (427–347 eKr.) ajatteli Absoluutin äärelliseksi, kun taas teologit ja metafyysikot Plotinoksesta (204–270) alkaen ovat olettaneet Absoluutin äärettömäksi. Mitä sana ”Absoluttinen” tarkoittaa, riippuu luonnollisesti kyseessä olevasta filosofista. Tässä yhteydessä Absoluutilla tarkoitetaan Absoluuttista ääretöntä, joka puolestaan tarkoittaa jotakin sanoin kuvaamatonta olemusta, Jumalaa,[21] hallitsevaa universaalia Mieltä tai – yksinkertaisesti – kaikkien

[16] $\omega 2 = \omega + \omega \neq \omega = 2\omega$ eli ω kaksi kertaa on yhtä kuin $\omega + \omega$, joka on eri suuri kuin ω, joka puolestaan on yhtä suuri kuin kaksi ω kertaa. Esimerkiksi, 1, 3, 5, 7, ... 2, 4, 6, 8, ... $= \omega 2 = \omega + \omega \neq$ 1, 2, 3, 4, ... $= \omega =$ 2+2+2+2+ ... $= 2\omega$.

[17] Cantor 1932, 296.

[18] Transfiniittisten järjestyslukujen kasvavan, yhä suurempien järjestyslukujen systemaattinen esitys on Saarnion *Das System und die Darstellung der Transfiniten Ordnungszahlen mit Hilfe der Höheren Rechenoperationen* vuodelta 1958. Pääosin sama suomeksi esitettynä, Saarnio 1969, 217–449, lukuun ottamatta viimeistä IV lukua, jossa esitetään myös ylinumeroituvien järjestyslukujen laskulait. Näin järjestyslukujen laskulakien systemaattisella esityksellä Saarnion jatkaa Cantorin alulle panemaa transfiniittisten järjestyslukujen laskulakien tutkimusta.

[19] Duns Scotusta kuitenkaan unohtamatta.

[20] Cantor 1932, 401, 405.

[21] Koska Absoluutilla ja Absoluuttisella äärettömällä tarkoitetaan tässä likimain samaa kuin Jumala eikä esimerkiksi Jumalan ominaisuutta, siksi kirjoitetaan sana: “Absoluutti” isolla A-kirjaimella

mahdollisten ajatusten luokkaa.[22] Ilmaus "kaikkien mahdollisten ajatusten luokka" tekee mahdolliseksi tarkastella Absoluuttia matemaattisen käsitteistön avulla.

Yksi Georg Cantorin antama joukon kuvaus kuuluu: "Joukko on mikä tahansa monta, joka voidaan ajatella yhtenä."[23] Näin joukko voidaan ajatella mahdollisen ajatuksen muotona. Toisin sanoen, mitä voidaan ajatella, niin siitä voidaan muodostaa joukko – ja päinvastoin.[24] Joukko-opissa Absoluuttia vastaa kaikkien järjestyslukujen luokka, jota merkitään Ω:lla. Joukko-opissa sitä käsitellään reflektioperiaatteella, joka voidaan yleisemmin esittää seuraavasti:

Reflektioperiaate: Jos P on mikä tahansa yksinkertaisesti kuvattavissa oleva Absoluutin ominaisuus, niin silloin on oltava olemassa jokin Absoluuttia pienempi, jolla myös on ominaisuus P.[25]

Reflektioperiaatteen taustalla on seuraava ajatus: jos millään Absoluuttia pienemmällä oliolla ei olisi ominaisuutta P, niin silloin Absoluuttia voitaisiin kuvata sinä ainoana oliona, jolla yksin olisi ominaisuus P. Tämä olisi kuitenkin vastoin sitä periaatetta, että Absoluutti ylittäisi kaikki sen inhimilliset kuvaukset. Teologisin termein tätä voitaisiin kuvata Gregorios Nyssalaisen sanoin: "Ei ole väliä sillä, miten pitkälle mielemme pyrkiikään keskittyessään kohti Jumalaan, sillä se ei saavuta sitä, mitä Hän on, vaan sitä mitä on Hänen alapuolellaan."[26]

Absoluutti on käsittämätön ja sanoin kuvaamaton. Silti, Robert John Russellin (1946–) mukaan, voimme eräässä mielessä tietää Absoluu-

[22] Cantor 1932, 443: "Wie man sich leicht überzeugt, ist z. B. der „Inbegriff alles Denkbaren" eine solche Vielheit." Joukko-opissa tehdään erottelu joukon ja luokan välillä siten, että kaikki joukot ovat luokkia, mutta kaikki luokat eivät ole joukkoja. Luokat, jotka eivät ole joukkoja, ovat liian suuria muodostaakseen joukkoja. Näitä luokkia kutsutaan *aidoiksi luokiksi*. Tämä erottelu mahdollistaa liian suurten ja ristiriitaisten joukkojen muodostamisen sijaan käsitellä niitä aitoina luokkina. Esimerkiksi kaikkien järjestyslukujen aitoa luokkaa merkitään usein von Neumann-Bernays-Gödel –joukko-opissa, NBG, symbolilla $\mathbf{ON} = df\{x \mid x = \text{järjestysluku}\}$ ja kaikkien joukkojen joukkoa symbolilla $\mathbf{V} = df\{x \mid x = \text{joukko}\}$.

[23] Cantor 1932, 204. "Unter einer „Mannigfaltigkeit" oder „Menge" verstehe ich nämlich allgemein jedes Viele, welches sich als Eines denken läßt."

[24] Rucker, 1982, 41. Tätä Cantorin joukon kuvausta voi kutsua tietoteoreettiseksi näkemykseksi matematiikan joukkokäsitteestä. Myös Saarnio lähestyy joukko-oppia tietoteoreettisesti sanomalla joukon käsitteestä, että "[s]e on ihmishengen kyky, jolla ihminen käsittää tietyt, toisistaan erilliset oliot yhdeksi kokonaisuudeksi, näiden olioiden *joukoksi*," Saarnio 1969, 42. Kuvaavaa Saarnion tietoteoreettiselle lähestymistavalle on niin ikään matemaattista joukko-oppia sisältävän ja äärettömiä joukkoja käsittelevän teoksen nimi: *Mitä tiedämme äärettömästä?*

[25] Toisin sanoen, olkoon järjestysluvun ominaisuus P mikä tahansa, jos Ω:lla on ominaisuus P, niin on olemassa ainakin yksi järjestysluku $\delta < \Omega$, jolla on ominaisuus P. Joukko-opissa reflektioperiaate tarkoittaa, että jokainen ominaisuus, joka on kaikkien joukkojen aidolla luokalla, on ainakin yhdellä siihen kuuluvalla joukolla. Reflektioperiaatteesta ja Gödelin toisesta epätäydellisyyslauseesta seuraa, että Zermelo-Fraenkel-joukko-oppi, ZF, ei ole äärellisesti aksiomatisoituva: Jokaisella äärellisellä määrällä ZF:n teoreemoja on olemassa malli reflektioperiaatteen mukaan, mutta ZF:n mallin olemassaolo ei ole todistuva, Jech 2003, 168.

[26] Wolter 1947, 9: "No matter how far our mind may have progressed in the contemplation of God, it does not attain to what He is, but to what is beneath Him." Ks. myös Mühlenberg 1966, 159. Georg Cantor puolestaan sanoo, että Absoluutti voidaan ainoastaan tunnustaa (*anerkannt*), muttei koskaan käsittää (*erkannt*), eikä se myöskään likimääräisesti tule käsittäväksi. Cantor 1932, 205: "Das Absolute kann nur anerkannt, aber nie erkannt, auch nicht annähernd erkannt werden."

tin ominaisuuksista jotakin.[27] Nähdäksemme, ettei tässä ole ristiriitaa, oletetaan, että Absoluutti on käsitettävissä kuten transfiniittiset järjestysluvut. Tällöin olisi olemassa jokin ominaisuus P, joka yksinomaan olisi Absoluutilla ja jonka avulla voisimme käsittää yksinomaan Absoluutin. Nyt, saadaksemme Absoluutin käsittämättömäksi, *sovimme* yksinkertaisesti seuraavasti: jokainen ominaisuus P, joka olisi ainoastaan Absoluutilla, on sekä Absoluutilla että jollakin transfiniittisellä järjestysluvulla. Eli toisin sanoen, ei olisi olemassa ominaisuutta P, joka olisi ainoastaan Absoluutilla. Tämä tarkoittaisi, että voisimme sanoa Absoluutin olevan sekä käsitettävissä että käsittämätön. Tämä vuoksi emme voisi koskaan täysin erottaa Absoluuttia transfiniittisistä järjestysluvuista olettaen, että emme voi koskaan kuvata Absoluuttia, jolla ainoastaan olisi ominaisuus P ja jota se ei jakaisi jonkin transfiniittisen järjestysluvun kanssa. Tosin sanoen, ei olisi olemassa ominaisuutta P, joka erottaa Absoluutin jokaisesta transfiniittisesta järjestysluvusta.[28]

Absoluutti olisi kuitenkin käsittämätön, sillä vaikka transfiniittiset järjestysluvut lähestyvät loputtomasti Absoluuttia, ne eivät sitä koskaan saavuta. Absoluutti sijaitsee absoluuttisesti saavuttamattomana kaiken käsityksemme "tuolla puolen". Tätä argumenttia on usein kutsuttu Cantorin reflektioperiaatteeksi, joka johti Cantorin tekemään kolmijakoisen erottelun koskien ääretöntä:

> Aktuaalinen äärettömyys nousee esiin *kolmessa* yhteydessä: *ensiksi* kun se todellistuu kaikkein täydellisimmässä muodossa, kokonaan riippumattomana ylimaailmallisena olentona, *in Deo*, jota kutsun *Absoluuttiseksi äärettömäksi* tai yksinkertaisesti *Absoluutiksi*; *toiseksi* kun se esiintyy kontingentissa, luodussa maailmassa; *kolmanneksi* kun mieli käsittää sen *in abstracto* matemaattisena määränä, lukuna tai järjestystyyppinä. Tahdon tehdä selvän eron *Absoluutin* ja kutsumani *transfiniittisen* välillä, se on, *kaksi* jälkimmäistä lajia aktuaalista ääretöntä, jotka ovat selvästi rajattuja, kykeneviä edelleen kasvamaan ja siten sukua *äärelliselle*.[29]

Jos Absoluuttisen äärettömyyden ominaisuudet ovat myös transfiniittisillä järjestysluvuilla ja ilmenevät niissä, niin Russellin mukaan Absoluuttinen äärettömyys on eräässä mielessä tiedettävissä ja käsitettävissä. Absoluutti paljastuu transfiniittisissä järjestysluvuissa ja silti se tällä samalla paljastuksella jää kätketyksi, sanomattomaksi, käsittämättömäksi.[30] Transfiniittiset järjestysluvut muodostavat loputtoman verhon Absoluuttisen äärettömän ympärille. Tämä verho on kaikki, mitä koskaan voimme siitä tietää.

---

[27] Russell 2008, 66

[28] Russell 2008, 66.

[29] Cantor 1932, 378: "Es wurde das A.-U. nach *drei* Beziehungen unterschieden: *erstens* sofern es in der höchsten Vollkommenheit, im völlig unabhängigen, außerweltlichen Sein, *in Deo*, realisiert ist, wo ich es *Absolutunendliches* oder kurzweg *Absolutes* nenne; *zweitens* sofern es in der abhängigen, kreatürlichen Welt vertreten ist; *drittens* sofern es als mathematische Größe, Zahl, oder Ordnungstypus vom Denken *in abstracto* aufgefaßt werden kann. In den *beiden* letzten Beziehungen, wo es offenbar als beschränktes, weiterer Vermehrung fähiges und *insofern den Endlichen verwandtes* A.-U. sich darstellt, nenne ich es T*ransfinitum* und setze es dem *Absoluten* strengstens entgegen."

[30] Russell 2008, 71.

Aito tieto Absoluuttisesta äärettömästä on ikuisesti paljastettu verholla, joka sen kätkee.[31]

Russell esittää edellä esitetyn johtopäätöksensä myös teologisin termein seuraavasti: "Mitä Jumala on valinnut paljastaa meille, katafaattisesti – Jumalan olemassaolosta Luojana, Jumalan hyvyydestä, rakkaudesta ja kauneudesta – on verho, jonka takana Jumalan todellisuus on loputtomasti kätketty tarkalleen kuten se on loputtomasti ilmoitettu."[32]

JOUKKO-OPIN ANTINOMIAT - JA NIIDEN RATKAISUT: CANTOR JA SAARNIO

Cantor löysi luomastaan joukko-opista kaksi toisiinsa liittyvää paradoksia, mutta hän ei ollut niistä mitenkään huolissaan, koska uskoi ratkaisseensa ne. Toinen niistä koski kaikkien kardinaalilukujen systeemiä, jota Cantor kutsui Absoluuttiseksi äärettömäksi tai systeemiksi ת . Toisin sanoen systeemi ת muodostuu kaikista äärettömistä kardinaaliluvuista $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\ldots, \aleph_\nu, \ldots$.[33] Cantor osoitti, että oletus kaikkien kardinaalilukujen muodostaman joukon olemassaolosta johtaa ristiriitaan seuraavasti:

Oletetaan, että ת on kaikkien joukkojen joukko. Cantorin teoreeman mukaan jokaisen joukon A kaikkien osajoukkojen joukon eli potenssijoukon $\mathscr{P}(A)$ kardinaaliteetti on tätä joukkoa suurempi, toisin sanoen, $|\mathscr{P}(A)| > |A|$.[34] Tästä seuraa, että $|\mathscr{P}(\text{ת})| > |\text{ת}|$. Toisaalta, koska potenssijoukon $\mathscr{P}(\text{ת})$ kaikki alkiot ovat joukkoja, niin niiden täytyy sisältyä kaikkien joukkojen joukkoon ת, jolloin $|\text{ת}| > |\mathscr{P}(\text{ת})|$. Näin on luotu ristiriita jota kutsutaan Cantorin paradoksiksi.

Kaikkien kardinaalilukujen muodostaman systeemin ת synnyttämän ristiriidan Cantor ratkaisi sanomalla, että ת on Absoluuttinen ääretön, joka ei voi olla kvantitatiivisen päättelyn ja rationaalisen toiminnan kohteena. Sitä ei voi ymmärtää loogisella analyysillä, vaan ainoastaan intuitiivisen näkemyksen avulla. Lisäksi, sitä ei voi käsittää, sillä se voidaan ainoastaan hyväksyä ilman rationaalista päättelyä ja loogista analyysiä. Loogisella analyysillä tarkoitetaan tässä sitä, että ת:ta ei voi käsittää joukkona. Sen sijaan Cantor kutsui sitä "inkonsisten-

[31] Russell 2008, 71. Analogisesti tätä ajatusta voisi kuvata esimerkiksi autopeitteellä peitettyä autoa, jota itseään ei siis näy, mutta autopeitteen muoto paljastaa peitetyn auton olevan mitä ilmeisimmin Volkswagen Kupla.

[32] Russell 2008, 72: "What God has chosen to disclose to us, the kataphatic – God's existence as Creator, God's goodness, love, and beauty – is a veil behind which the reality of God is endlessly hidden precisely as it is endlessly revealed."

[33] ת, (taw), on heprean aakkosten viimeinen kirjain, Cantor 1932, 445–447.

[34] Cantor 1932, 279–280. Cantorin teoreeman ajatuksena on, ettei ole olemassa surjektiota joukosta A joukon A potenssijoukolle. *Todistus*: Ensiksi, helposti voi huomata, että on olemassa injektio ϕ joukosta A sen potenssijoukolle $\mathscr{P}(A)$. Jos $x \in A$ niin $\phi(x) = \{x\} \in \mathscr{P}(A)$. Toiseksi, oletetaan, että olisi surjektio $\varphi : A \to \mathscr{P}(A)$, jolloin niillä olisi sama kardinaliteetti. Olkoon $B_\varphi = \{x \in A \,|\, x \notin \varphi(x)\}$. Jos$B_\varphi = \varphi(y)$, niin $y \in B_\varphi \leftrightarrow y \notin \varphi(y) \leftrightarrow y \notin B_\varphi$, mikä on ristiriita. Siten B_φ on joukon A osajoukko, joka ei kuulu kuvauksen ϕ arvojoukkoon ja näin ollen ei ole olemassa surjektiota joukosta A joukon A potenssijoukkoon $\mathscr{P}(A)$.

tiksi, absoluuttisen äärettömäksi moninaisuudeksi."[35] Tämä ת, Cantor sanoi, on Jumala, kaiken maailmassa olemassa olevan luova alkusyy. Cantor esitti nyt aristotelis-skolastisen tunnuslauseen: "Ei ole aktuaalista ääretöntä,"[36] sijaan oman tunnuslauseensa: "Kaikki oliot, joko äärelliset tai äärettömät, ovat *määrättyjä* ja Jumalaa lukuunottamatta ne voidaan määrittää järjen avulla."[37]

Itse asiassa Cantor esitti tässä yhteydessä kaksi teoreemaa:

Teoreema A: Kaikkien järjestyslukujen systeemi Ω on inkonsistentti ja absoluuttisesti ääretön moninaisuus.[38]

Teoreema B: Kaikkien $\aleph$-lukujen systeemi ת muodostaa suuruusjärjestyksessä systeemin Ω ja on siten inkonsistentti ja absoluuttisesti ääretön moninaisuus.[39]

Tässä kohden on huomattava, että kardinaaliluvut voidaan määritellä järjestyslukujen avulla seuraavasti: Jos joukko A voidaan hyvinjärjestää, niin silloin hyvinjärjestetty joukko $(A, <)$ on isomorfinen jonkin järjestysluvun α kanssa. Tällöin on olemassa pienin järjestysluku α, joka on joukon A kardinaaliluku $|A|$.[40]

Teoreema A tunnetaan Burali-Forti –paradoksina,[41] jonka Saarnio esittää lyhyesti seuraavasti: Ajatellaan, että kaikki äärelliset ja äärettömät – toisin sanoen finiittiset ja transfiniittiset – järjestysluvut on järjestetty suuruusjärjestykseen. Tämä järjestys on hyvinjärjestys. Koska *kaikkien* järjestyslukujen jono on hyvinjärjestetty jono, niin täytyy olla olemassa järjestysluku, joko on tämän hyvinjärjestetyn jonon järjestystyyppi. Olkoon tämä järjestysluku φ. Järjestysluku φ olisi siis suurempi kuin jokainen järjestysluku, koska olettamuksen mukaan jokainen järjestysluku kuuluu *kaikkien* järjestyslukujen suuruusjärjestyksessä olevaan jonoon. Luku φ olisi siis järjestysluku, joka ei voi kuulua kaikkien järjestyslukujen joukkoon, jolloin se ei voi olla finiittinen järjestysluku eikä transfiniittinen järjestysluku.[42]

---

35 Cantor 1932, 445: "[E]ine inkonsistente, eine absolute unendliche Vielheit."

36 Cantor 1932, 174, 205: "*Infinitum actu non datur*."

37 Cantor 1932, 176: "Omnia seu finita seu infinita definita sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt."

38 Cantor 1932, 445.

39 Cantor 1932, 446.

40 Tämä edellyttää valinta-aksiooman, joka on ekvivalentti lauseen: "jokainen joukko voidaan hyvinjärjestää." kanssa.

41 Cesare Burali-Forti (1861-1931) oli ensimmäinen matematiikko, joka julkaisi transfiniiittiseen joukko-oppiin kätkeytyvän paradoksin artikkelissaan "Una questionione sui numeri transfiniti" vuonna 1897. Hän huomasi, että kaikkien ordinaalilukujen Ω hyvinjärjestetyllä jonolla on oltava vastaava ordinaaliluku δ, joka on suurempi kuin kaikkien Ω:n edustama joukko. Koska Ω:n oli tarkoitus sisältää kaikki ordinaaliluvut, se ei voinut jättää δ pois, ja siten $\delta < \delta$, mikä on mahdotonta. Ratkaisuna tähän Burali-Forti ehdotti ordinaalilukujen vertailukelpoisuuden hylkäämistä; eli jos annetaan kaksi ordinaalilukua α ja β, niin ei aina ole totta, että vähintään yksi suhteista $\alpha < \beta$ $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$ pätee, *ibid*. Toisin sanoen, Burali-Forti ehdotti luopumista yhdestä valinta-aksiooman muodoista.

42 Saarnio 1969, 450. Oletetaan, että ääretöntä ei olisi olemassa ja olisi olemassa vain äärellisiä järjestyslukuja. Tällöin kaikkien äärellisten järjestyslukujen järjestysluku k olisi jokaista äärellistä järjestyslukua suurempi. Koska ääretöntä ei olisi olemassa, niin k olisi äärellinen järjestysluku, joka tulisi olla myös itseään suurempi, mikä on ristiriita, Saarnio 1969, 451,452.

Teoreeman B Saarnio puolestaan esittää lyhyesti seuraavasti: Muodostetaan kaikkien finiittisten ja transfiniittisten kardinaalilukujen joukko. Tässä joukossa ei ole suurinta lukua, vaan jokainen luku on eräitä muita lukuja pienempi. Tällä joukolla ei siis voi olla suurinta lukua. *Kaikkien* kardinaalilukujen summa olisi näillä ehdoilla jokaista kardinaalilukua suurempi.[43] Jos tämä summa olisi itse eräs transfiniittinen kardinaaliluku, niin sen täytyisi olla itseään suurempi, mikä on ristiriita.[44]

CANTORIN JA SAARNION TIETOTEOREETTISET RATKAISUT

Teoreemojen A ja B muodostamat paradoksit eivät huolestuttaneet Georg Cantoria, koska hänen käsityksensä joukosta oli tietoteoreettinen: "Joukko on mikä tahansa monta, joka voidaan ajatella yhdeksi," josta ristiriitaa ei seuraa.[45] Richard Dedekindille (1831–1916) lähettämässään kirjeessään 28.7.1899 Cantor kirjoitti, että järjestyslukujen systeemi Ω on Absoluuttisen ääretön tai ristiriitainen moninaisuus (*absolut unendliche* oder *inkonsistente Vielheit*), jota ei voida ajatella kokonaisuutena ilman ristiriitaisuuksia. Jos jotakin moninaisuuden muodostamaa kokonaisuutta voidaan ajatella ilman ristiriitaa, rajattuna kokonaisuutena, eli "yhtenä" ja ne voidaan koota yhteen "yhdeksi olioksi", niin Cantor kutsuu sitä ristiriidattomaksi moninaisuudeksi (*konsistente Vielheit*) tai "joukoksi" (*Menge*).[46] Näin Cantorin tietoteoreettisesta kriteeristä sen määrittämiseksi, muodostavatko jotkut moninaisuudet yhden vai eivät, seuraa, että esimerkiksi Burali-Forti paradoksi on ratkaistavissa: suurinta järjestyslukua ei ole olemassa.[47]

Saarnion tulkinta molempiin ristiriitoihin on niin ikään tietoteoreettinen. Samoin kuin Cantor, Saarnio katsoo kyseisten ristiriitojen olevan loogisia paradokseja, jotka voidaan ratkaista. Toisaalta, Saarnio mukaan ne muodostavat kuitenkin tietoteoreettisen antinomian, samalla tavalla kuin Immanuel Kantin *Kritik der reinen Vernunft*-teoksessa esittämä ensimmäinen,

---

43 Tämän lauseen taustalla on teoreema, jonka Saarnio esittää ilman todistusta, Saarnio 1969, 161. Teoreema: Jos K on transfiniittisten kardinaalilukujen joukko, jossa ei ole suurinta alkiota, niin on olemassa kardinaaliluku, joka on kaikkien joukon K alkioiden summa ja jokaista joukon K alkiota suurempi. Toisin sanoen, ei ole olemassa suurinta kardinaalilukua. Todistuksen tälle teoreemalle voi löytää esimerkiksi Saarnionkin lähteenään käyttämästä teoksesta Kampke 1950, 35, Teoreema 4.

44 Saarnio 1969, 453. Kaikkien finiittisten kardinaalilukujen summa ei niin ikään voi olla finiittinen kardinaaliluku, *ibid.*, 1969, 453

45 Ks. Menzel, 1984.

46 Cantor 1932, 443.

47 Ensimmäisen aksiomaattisen esityksen joukko-opista esitti Ernst Zermelo (1871–1953) artikkelissaan "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I," Zermelo 1908, 261-281. Tässä artikkelissa Zermelo esittää Erotteluaksiooman (*Axiom der Aussonderung*): Milloin propositionaalinen funktio $P(x)$ on määritelty kaikille joukon M alkioille ,niin joukolla M on osajoukko M_P, joka sisältää tarkalleen ne joukon M alkiot, joille $P(x)$ on tosi. Tämän aksiooman tarkoituksena oli rajoittaa joukkojen muodostusta niin, ettei paradoksaalisia joukkoja, kuten kaikkien joukkojen joukkoa, voi muodostaa

kosmologinen antinomia,[48] joka pysyy periaatteessa ihmisälylle ratkaisemattomana. Näin ollen Saarnion tekee eron ristiriidan, paradoksin ja antinomian välillä. Ristiriidassa (*"contra"* + *"dictus"*) kaksi väitettä eivät voi olla molemmat samanaikaisesti tosia, eivätkä samanaikaisesti epätosia. Loogisissa paradokseissa (*"para"* + *"doxa"*) puolestaan kaksi väitettä näyttävät ensin olevan ristiriidassa toistensa kanssa, mutta jatkotutkimuksissa ristiriita voidaan kuitenkin ratkaista. Koska teoreemat A ja B ovat Saarnion mukaan loogisia paradokseja, ne voidaan hänen mukaansa ratkaista Bertrand Russellin (1872–1970) tyyppiteorian avulla.[49] Sen sijaan tietoteoreettisissa antinomioissa (*"anti"* + *"nomos"*) kaksi väitettä ovat ja jäävät ristiriitaisiksi, eivätkä mitkään jatkotutkimukset voi sitä järkiperäisesti tai loogisesti ratkaista. Tällöin antinomioissa joko molempia väitteitä pidetään totena tai molempia väitteitä pidetään epätosina. Esimerkiksi Kantin esittämistä neljästä antinomiasta kaksi ensimmäistä, niin sanotut "matemaattiset" antinomiat, Kant katsoi molempien vastakkaisten väitteiden olevan epätosia, kun taas kolmannessa ja neljännessä, niin sanotut "dynaamiset" antinomiat, hän katsoi molempien vastakkaisten väitteiden olevan tosia.[50]

Kysyttäessä, voidaanko muodostaa kaikkien kardinaalilukujen tai vastaavasti kaikkien järjestyslukujen joukko, joudumme Saarnion mukaan *kaiken* äärellisen ja äärettömän tietoteoreettiselle rajalle. Käytämme kaikki–kategoriaa siinä, missä totaliteetin sijalla on *idea* tämän sanan siinä merkityksessä, jonka Immanuel Kant sen sille antoi.[51] Tämä idea, "kaikki kardinaali- ja järjestysluvut", on meille välttämätön. Juuri tämän transsendentaalisen idean avulla ja vain sen avulla olemme kykeneviä sanomaan, että tätä ideaa ei vastaa mikään joukko. Tämä idea muodostaa Saarnion mukaan eräällä tavalla negaation disjunktiosta: "äärellinen tai ääretön", jolloin siis saadaan: "ei äärellinen eikä ääretön."[52]

Kaikkien kardinaali- ja järjestyslukujen idea perustuu *kaikki*–kategoriaan, toisin kuin joukon käsite, jolloin se sisältää tietyn antinomian.[53] Saarnion mukaan emme voi sanoa, että tämä idea olisi "mieletön" tavallisen loogisen ristiriidan mielessä ja jonka voisimme hylätä, vaan

---

48 Kosmologinen antinomia: Teesi A: Maailmalla on alku ajassa, ja se on avaruudeltaan rajallinen, ja Teesi B: Maailmalla ei ole alkua eikä rajoja avaruudessa, vaan se on sekä ajallisesti että avaruudellisesti ääretön, Kant 1781/1787, A 426-433 / B 454-461, ja jotka Kantin mukaan ovat molemmat epätosia, *ibid*. A 522-527 / B 550-555.

49 Saarnio 1969, 454, 455.

50 Kant 1781/1787, A 528-532 / B 556-560.

51 Teoreemat *A* ja *B* tulisi Saarnion mukaan siten tulkita tietoteoreettisesti samoin kuin Kant ratkaisee ensimmäisen kosmologisen antinomiansa seuraavasti: Kantin mukaan ymmärrys voidaan käsittää kyvyksi tehdä arvostelmia, Kant 1781/1787, A 69 / B 94. Kun arvostelmasta abstrahoidaan kaikki sisältö ja huomio kiinnittyy pelkästään ymmärryksen muotoon, niin arvostelmien kvantiteetissa ajattelu sisältää kolme momenttia: universaalinen, partikulaarinen ja singulaarinen, *ibid*., A 70 / B 95. Kvantiteetti puolestaan muodostuu kolmesta puhtaasta synteettisestä käsitteestä, jotka sisältyvät ymmärrykseen *a priori*: ykseys, moneus ja kaikkeus, *ibid*., A 80 / B 106. Nyt kosmologinen antinomia seuraa, kun maailmaa ajatellaan rajoitetuksi kokonaisuudeksi, *kaikkeudeksi*, *ibid*., A 522-527 / B 550-555.

52 Saarnio 1969, 161, 162.

53 Saarnio 1969, 162. Tosin tässä kohden Saarnio kirjoittaa selvästi virheellisesti:"Idea ei perustu *kaikki*-kategoriaan, kuten joukon käsite, vaan se sisältää, kuten kaikki transsendentaaliset ideat tietyn antinomian."

tämä idea on meille välttämätön ja *a priori* antroposentriselle järjelle annettu transsendentaalinen idea. Vaikeus on tietoteoreettinen, joka ei koske itse asiaa, kuten kardinaali- tai järjestyslukujen matemaattista käsitettä, vaan ihmisen käsityskykyä (*Verstandesvermögen*) periaatteellisesti. Ihmisellä ei Saarnion mukaan ole muuta keinoa kuin käyttää Kantin kvantiteetin kategorian kaikkia kolmea momenttia, nimittäin *kaikkeus*, *moneus* ja *ykseys*.[54]

Näin Saarnion mukaan on todettava, että on olemassa "asioita" (*res*), jotka oikeastaan kuuluvat luvun käsitteen alaan ja jotka samalla eivät kuulu luvun käsitteen alaan; siis antinomia. On siis olemassa "asioita", jotka koskettavat voimakkaasti antroposentrisen tietokyvyn tietoteoreettista äärimmäistä rajaa ja jotka antavat meidän aavistaa jotakin transsendentaalisista tekijöistä. Samalla ne aina muistuttavat tietokykymme rajoista.[55]

LOPUKSI

Georg Cantorin alulle paneman joukko-opin synty ja Cantorin siinä löytämät paradoksit, jotka koskivat kaikkien kardinaali- ja järjestyslukujen "joukkoa", jota Cantor kutsui Absoluuttiseksi äärettömäksi, saa tietoteoreettisen ratkaisunsa sekä Cantorilta itseltään että Uuno Saarniolta. Cantorin tietoteoreettinen ratkaisu seuraa hänen joukon määritelmästään: "Joukko on mikä tahansa monta, joka voidaan ajatella yhdeksi," josta ristiriitaa ei seuraa; toisin sanoen, ei ole olemassa suurinta kardinaalilukua eikä myöskään järjestyslukua. Lisäksi, Cantorin mukaan Absoluuttinen ääretön on rinnastettavissa Jumalaan, eikä sen tutkiminen näin kuulu varsinaisesti enää matematiikan alaan.

Saarnion ratkaisu puolestaan pohjautuu Immanuel Kantin tietoteoriaan, jolloin kaikkien kardinaali- ja järjestyslukujen ideat perustuvat kaikki–kategoriaan, toisin kuin joukon käsite. Nämä ideat puolestaan ovat käsitteellisinä ideoina meille välttämättömiä ja a priori antroposentriselle järjelle annettuja transsendentaalisia ideoita, joita ei vastaa mikään joukko. Transsendentaalisina ideoina ne sisältävät tietyn antinomian, jotka ovat toisaalta ontologisia ja toisaalta tietoteoreettisia tosiasioita, joiden perusteella ihminen päättelee transsendentin olemassaolon.[56] [57]

---

[54] Saarnio 1969, 276.

[55] Saarnio 1969, 162. *Mitä tiedämme äärettömästä?* –teoksen Burali-Fortin antinomia koskevan luvun motoksi Saarnio on valinnut opettajansa Eino Kailan (1890–1958) sanoman: "Immanuel Kantin noumenonin käsitteen merkitys on siinä, että se aina muistuttaa meitä, että tietomme on rajoitettu," *ibid*., 450. On huomattava, kun Saarnio puhuu "antroposentrisestä puhtaan järjen ideasta" on kyseessä selvästi kantilainen tietoteoreettinen käsitys transsendentista. Kun Saarnio kirjoittaa äärettömän olemassaolosta, on kyseessä platonilainen ontologinen käsitys transsendentista.

[56] On huomattava, kun Saarnio kirjoittaa "antroposentrisestä puhtaan järjen ideasta," on kyseessä selvästi kantilainen tietoteoreettinen käsitys transsendentista. Kun Saarnio kirjoittaa "äärettömän olemassaolosta," on kyseessä platonilainen ontologinen käsitys transsendentista.

[57] Omistan tämän artikkelin matematiikan emeritusprofessori Magnus Steinbyn (1941-1921) muistolle. Olen kiitollinen häneltä saamistani rakentavista kommenteista, kannustuksesta ja ystävyydestä

Lähdeluettelo:

Akvinolainen, T., ca. 1273: *Summa Theologiae*. London: Eyre & Spottiswoode; New York: McGraw-Hill for Blackfriars. 1964.

Bolzano, B., 1851: *Paradoxien des Unendlichen*. Leipzig: Reclam.

Burali-Forti, C., 1897: "Una questione sui numeri transfiniti." *Rendiconte del Circolo mathematic di Palermo 11*, 154–164. Englanninkielinen käännös J. van Heijenoort: A question on transfinite numbers, teoksessa *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1870–1931*. Toim. J. van Heijenoort. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967, 104–111.

Cantor, G., 1932: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Toim. E. Zermelo. Berlin: Springer; uusinta painos vuonna 1962. Hildesheim: Olms.

Cross, R., 1999: *Duns Scotus*. New York, Oxford: Oxford University Press.

Dauben, J. W., 1979: *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of Infinity.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Galilei, G., 1914: *Dialogues Concerning Two New Sciences*. Kääntäneet italiasta ja latinasta englanniksi Henry Crew ja Alfonso de Salvio. Johdanto Antonio Favaro. Ensimmäinen julkaisu 1638. Ensimmäinen käännös englanniksi Macmillan, *1914*. New York: Dover.

Hallett, M., 1984: *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*. Oxford: Clarendon Press.

Jech, T., 2003: *Set Theory: The Third Millenium Edition, Revised and Expanded*. Berlin et al.: Springer.

Kampke, E., 1950: *Theory of Sets*. New York: Dover.

Kant, I., 1781/1787: *Puhtaan järjen kritiikki*. Suom. M. Nikkarla ja K. Ranta. Työryhmän johtaja O. Koistinen. Helsinki: Gaudeamus, 2013.

Menzel, C., 1984: *"Cantor and the Burali-Forti Paradox."* The Monist **67** (1):92-107.

Moore, G. H., 1982: *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, & Influence*. New York: Springer-Verlag.

Murdorch, J. E., 1982: *"Infinity and continuity."* The Cambridge History of Later Medieval Philosophy. Toim. N. Kretzmann, A. Kenny ja J. Pinnborg. Cambridge etc.: Cambridge University Press, 564–591.

Murdorch, J. E., 2009: "Beyond Aristotle: Indivisibles and Infinite Divisibility in the Later Middle Ages. "*Atomism in Late Medieval Philosophy and Theology*. Leiden, Boston: Brill, 15–38.

Mühlenberg, E., 1961: *Die Unendlichkeit Gottes bei Gregor von Nyssa: Gregors Kritik am Gottesbegriff der klassischen Metaphysik*. Forschungen zur Kirchen- und Dogmengeschichte Band 16. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Palomäki, J., 2002a: "Uuno Saarnio – omintakeinen filosofi." *Tieteessä tapahtuu* **6**, 15–20.

Palomäki, J., 2002b: "Ääretön transsendentti Jumala". *Teologinen Aikakauskirja* **4**, 354-360.

Rittbeg, C. J., 2015: "How Woodin changed his mind: new thoughts on the Continuum Hypothesis."Archive for History of Exact Sciences **69**, No. 2., 125-151.

Rucker, R., 1982: *Infinity and the Mind: The Science and Philosophy of the Infinite*. Boston, Basel, Stuttgart: Birkhäuser.

Russell, R. J., 2008: *Cosmology: From Alpha to Omega*. Minneapolis: Fortress Press.

Saarnio, U., 1958: *Das System und Darstellung der transfiniten Ordnungszahlen mit hilfe der Höheren Rechenoperationen*. Mit Einführung von Prof. Dr. Heinrich Behmann. Helsinki: Gesellschaft für Logik und Ihre Anwendungen.

Saarnio, U., 1968: "Eine konstruktive Darstellung für die Richtigkeit der Kontinuumshypothese," *Mathematische Annalen* **178**, 335–353.

Saarnio, U., 1969: *Mitä tiedämme äärettömästä?* Porvoo: WSOY.
Wolter, A. B., 1947: "Duns Scotus on the Nature of Man's Knowledge of God," *Review of Metaphysics* 1, 3–36.

Woodin, W. H., 2001: "The Continuum Hypothesis, Part I & II," *Notices of the American Mathematical Society, Vol.* **48**, 567–576, 681–690.

Zermelo, E., 1908: "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I." *Mathematische Annalen 65*, 261-281. Englanninkielinen käännös Stefan Mauer-Mengelberg: Investigations in the foundations of set theory I, teoksessa *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1870–1931*. Toim. J. van Heijenoort. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967, 200–215.

TARVITAANKO JOUKKO-OPPIA (ENÄÄ)?

Jukka Tuomela
Fysiikan ja matematiikan laitos, Itä-Suomen yliopisto

JOUKKO-OPIN NOUSU JA ...

Georg Cantorin luoma joukko-oppi on tullut niin vakiintuneeksi osaksi matematiikkaa, että nykyään on ehkä vaikea kuvitella, miten joukko-oppi ja siihen liittyvät kysymykset aiheuttivat kovia riitoja matemaatikkojen keskuudessa 1800-luvun lopulla ja 1900-luvun alussa. Ennen Cantoria oli vältetty äärettömyyden käsitteen suoraa tutkimista, mutta kun Cantor osoitti, että on olemassa erilaisia äärettömyyden asteita, niin kysymystä ei enää noin vain voinut lakaista maton alle. Tunnetusti Cantorin teoriassa oli ongelmia, jotka myös joukko-opin kannattajat myönsivät. Jostain syystä ei puhuttu ristiriidoista, ehkä sitä pidettiin liian repivänä, vaan käytettiin termejä antinomi ja paradoksi.

Lopulta sitten Zermelo ja Fraenkl rakensivat aksioomasysteemin, joka on edelleen joukko-opin standardi versio: on tapana puhua ZFC-systeemistä, missä C viittaa valinta-aksioomaan. Äärettömien joukkojen asema jäi kuitenkin vaivaamaan. Yksi aksioomistahan sanoo, että äärettömiä joukkoja on olemassa. Perinteisesti aksioomien haluttiin olevan mahdollisimman ”itsestäänselviä”, mutta voiko mitään äärettömän käsitteeseen liittyvää pitää itsestäänselvänä? Tähän ongelmaan tarjottiin kahta vastausta: konstruktivisimi, johon palataan hiukan myöhemmin, ja etenkin David Hilbertin ajama näkemys, jota sitten ruvettiin kutsumaan formalismiksi.

Hilbertin idea oli, että pitäisi olla jokin systeemi, jossa ei suoraan vedottaisi äärettömyyteen, mutta jonka puitteissa kuitenkin voitaisiin käyttää niitä tuloksia ”joihin on totuttu” (Davis, P. , Hersh, R., 1980):

> The goal of my theory is to establish once and for all the certitude of mathematical methods […]. The present state of affairs where we run up against the paradoxes is intolerable. […] If mathematical thinking is defective, where are we to find truth and certitude?

Tavallaan matemaatikot yrittivät paroni von Münchhausenin esimerkkiä noudattaen vetää itsensä ylös suosta saappaanvarsista. Ehkä Münchhausenin tarinat olivat Hilbertin mielilukemistoa.

Joka tapauksessa Hilbertin unelma varmuudesta romahti, kun Kurt Gödel julkaisi kuuluisat epätäydellisyystuloksensa. Nämä tulokset osoittivat, että matematiikan perusteilta oli alun perin vaadittu aivan liikaa, ja piti tyytyä vähempään. Matematiikan perusteitten pohtiminen väheni merkittävästi, koska ei ollut oikein selkeää näkemystä, mihin suuntaan edetä. John (János) von Neumann kommentoi Gödelin tuloksia seuraavasti (von Neumann, 1947).

> I think that it [the controversy about foundations of mathematics] constitutes the best caution against taking the immovable rigour of mathematics too much for granted. This happened in our own lifetime, and I know myself how humiliatingly easily my own views regarding the absolute mathematical truth changed during this episode, and how they changed three times in succession!

Toisaalta Gödelin tulokset olivat erittäin hedelmällisiä matemaattisen logiikan kannalta, ja matemaattinen logiikkahan on edelleenkin aktiivinen tutkimusala. Siitä kuitenkin tuli ikään kuin normaali tutkimusala, kuten vaikkapa kommutatiivinen algebra. Gödelin jälkeisen ajan tyypillisen matemaatikon suhdetta matematiikan perusteisiin Davis ja Hersh kuvaavat näin (Davis, P. , Hersh, R., 1980):

> the typical working mathematician is a Platonist on weekdays and a formalist on Sundays. That is, when he is doing mathematics he is convinced that he is dealing with an objective reality whose properties he is attempting to determine. But then, when challenged to give a philosophical account of this reality, he finds it easiest to pretend that he does not believe in it after all.

Toisaalta Hilbert itsekin toimi näin: yllä olevassa lainauksessa Hilbert käytti sanaa totuus. Tämä sana on kuitenkin mielekäs vain Platonistisessa näkemyksessä.

Mielenkiintoinen tapaus on myös Bourbaki-ryhmän suhde joukko-oppiin. Voisihan kuvitella, että Bourbaki olisi pitänyt joukko-oppia erityisen tärkeänä, koska Bourbakin ideologiaan kuului, että lähdetään liikkeelle selkeistä aksioomista joiden päälle sitten matematiikka rakennetaan. Todellisuudessa joukko-oppi ei kiinnostanut Bourbakia (Mashaal, 2017):

> ce livre (théorie des ensembles) a été rédigé avec peine et sans plaisir, mais il fallait le faire.

Joukko-opin kirjoittaminen oli tuskallista, mutta se oli pakko tehdä.

Toisin sanoen ideologisista syistä kirjasarjalla piti olla jokin alkupiste, vaikka hyvin tiedettiin, että sillä ei ollut varsinaista merkitystä jatkon kannalta. Bourbakin joukko-oppi olikin alussa (1939) vain kokoelma tuloksia ja ”varsinainen” joukko-opin kirja julkaistiin vasta 1954. Bourbakin joukko-opin kirjaa onkin kritisoitu paljon, ja eräskin ranskalainen matemaatikko, joka ymmärrettävistä syistä halusi esiintyä nimettömänä, suositteli teoksen heittämistä roskikseen (Ces chapitres sont à jeter à la poubelle) (Mashaal, 2017).

Jean Dieudonné (yksi Bourbaki-ryhmän perustajajäsenistä), joka tunnetusti oli suorapuheinen, sanoo näin (Dieudonné, 1982):

> Les philosophes et logiciens ont une tendance, parfaitement naturelle et excusable, à croire que les mathématiciens s'interessent beaucoup à ce qu'ils font. Detrompez-les, ce n'est pas vrai: 95% de mathématiciens se moquent éperdumment de ce que peuvent tous les logiciens et tous les philosophes.

Filosofit ja loogikot luulevat, että matemaatikot olisivat kiinnostuneita heidän töistään. Tämä ei ole totta: 95% matemaatikoista ei voisi olla vähempää kiinnostuneita siitä, mitä loogikot ja filosofit tekevät.

Dieudonnén kirjoituksen nimi on muuten Mathématiques vides et mathématiques significatives, jonka voisi kääntää vaikkapa seuraavasti: Tyhjänpäiväistä matematiikkaa ja merkityksellistä matematiikkaa. Lukija varmaan tässä vaiheessa jo arvaa kumpaan kategoriaan logiikka ja joukko-oppi sijoittuu. Kuitenkin jos unohdetaan Dieudonnén provosoiva sävy, niin mielestäni hän vain toteaa saman, minkä jo edellä sanoin: matemaattisesta logiikasta on tullut ”tavallinen” tutkimusala, jonka tuloksilla ei automaattisesti ole merkitystä oman alan ulkopuolella.

Dieudonné antaa kaksikin syytä sille, että joukko-oppi ei ole niin tärkeää kuin voisi kuvitella. Ensinnäkin eihän tutkimuksissa oikeasti lähdetä liikkeelle matematiikan perusteista vaan aivan jostain muusta. Jos sitten havaitaan, että jokin asia ei toimi ZFC-systeemin puitteissa, niin sitten voikin olla järkevää muokata joukko-oppia siten, että haluttu tulos saadaan voimaan. Esimerkkinä Dieudonné antaa mitattomat joukot $\mathbf{R}^n$:ssä, jotka ovat pelkkä tekninen kiusa. Olisi paljon kätevämpää, jos kaikki joukot olisivat mitallisia; näin voidaankin olettaa, jos luovutaan yleisestä valinta-aksioomasta. Numeroituva valinta voidaan kuitenkin olettaa, ja Dieudonnén mielestä tämä riittää kaikkeen järkevään matematiikkaan. Tim Gowers ilmaisee asian näin (Gowers):

> Not every function is measurable but all the ones that you might actually want to integrate are.

Toisin sanoen mitattomat joukot ja funktiot ovat vain seurausta valinta-aksiooman ”holtittomasta” käytöstä, eikä niitä esiinny missään ”luonnollisessa” ongelmassa. Gowers antaa myös esimerkin Ramseyn teoriaan liittyvästä lauseesta, jossa esiintyy samantyyppinen tilanne.

> The statement is false […] because it is quite easy to use the axiom of choice to build a counterexample. But there are many mathematical contexts [… where …] the result is true. In fact, there is a precise theorem […] which comes close to saying that the only counterexamples are ridiculous ones cooked up using the axiom of choice.

Toinen syy on, ettei ole pelkästään yhtä joukko-oppia, vaan voidaan helposti rakentaa erilaisia joukko-oppeja, ehkä jopa äärettömän monta erilaista. Mikä näistä olisi "luonnollisin"? Dieudonné ottaa esimerkiksi kontinuumihypoteesin. Gödel ja Paul Cohen osoittivat, että kontinuumihypoteesi on riippumaton muista joukko-opin aksioomista, joten se voitaisiin lisätä sinne, tai jokin sen "negaatioista". Dieudonnén mielestä tämä ei kuitenkaan ole kiinnostavaa, vaan tuloksen merkitys on nimenomaan siinä, ettei matemaatikkojen enää tarvitse vaivata päätään tällä karsealla (abominable) ja lopulta merkityksettömällä ongelmalla. Gowers puolestaan kertoo, että hänen viaton Platonisminsa päättyi tähän:

> I can date my own conversion from an unthinking childhood Platonism from the moment when I learnt that the continuum hypothesis was independent of the other axioms of set theory.

KONSTRUKTIVISMI, EPÄSTANDARDI ANALYYSI JA KATEGORIAT

ZFC-standardista on muutamia muunnelmia, jotka ovat omalla tavallaan tärkeitä. Edellä jo oli puhetta, että äärettömyyden ongelmaan tarjottiin toisenlaista ratkaisua, jota on tapana kutsua konstruktivismiksi. Tässä siis äärettömiä joukkoa ei sallittu, ja kuten Hilbert ja muut huomasivat, niin hyvin monet asiat, joihin oli totuttu, olisi pitänyt joko hylätä tai ainakin muotoilla hyvin eri tavalla kuin ennen. Konstruktivismin tunnetuin edustaja oli alussa L. E. J. Brouwer. Errett Bishop sitten 60-luvulla julkaisi tunnetun kirjan konstruktiivisestä analyysistä (Bishop, 1967) , mutta konstruktivismin asema on ollut matematiikassa marginaalinen. On ajateltu Hilbertin tavoin, että kaikenlaisesta kivasta pitäisi luopua, jos ruvettaisiin tekemään matematiikkaa konstruktiivisesti. Asia ei kuitenkaan taida olla näin yksioikoinen. Mielenkiintoisesti Andrej Bauer (Bauer, 2017) kääntää asetelman toisinpäin: hänen mukaansa konstruktivismi ei sulje ovia vaan päinvastoin avaa uusia mahdollisuuksia. Esimerkkinä hän antoi tapauksen, jossa tietyssä joukossa ei ollut pisteitä mutta siellä oli mestoja (locale)[58]. Perinteisen joukko-opin kannalta siis kyseessä oli tyhjä joukko. Mutta toisenlaisen joukko-opin mukaan se vain oli "asumaton" (uninhabited). Mestojen avulla voidaan myös ratkaista mitallisuusongelma:

> if we use locales instead of spaces, we can have both, the axiom of choice and an isometry-invariant measure on all sublocales of Rn, which agrees with the Lebesgue measure on the measurable sets.

Myös epästandardi analyysi voidaan tulkinta eräänlaiseksi ZFC-systeemin muunnelmaksi. Erityisen selvä tämä on Nelsonin muotoilemassa sisäjoukko-opissa (internal set theory) (Nelson, 1977). Nelson yksinkertaisesti lisää ZFC-aksioomiin muutaman lisäaksiooman, joitten avulla infinitesimaalit voidaan ottaa käyttöön. Tämän jälkeen voidaan osoittaa, että jos ZFC-systeemi on ristiriidaton, niin myös sisäjoukko-oppi on ristiriidaton. Toisin sanoen infinitesimaaleja voidaan käyttää siinä missä reaalilukujakin.

Tunnetusti myös kategoriateoriassa tavallinen joukko-oppi ei riitä vaan pitää lähteä muulta pohjalta liikkeelle. Kuitenkin ehkä päällisin puolin voisi ajatella, että kategoriateoriassa vain "vähän" laajennetaan joukon käsitettä, mutta tämä laajennus on pikemminkin tekninen riesa eikä itse kategoriateorian keskeinen asia.

Kaiken kaikkiaan siis joukko-oppi, tai tarkemmin ZFC-systeemi, on säilyttänyt ase-

[58] En tiedä mitä locale on tai pitäisi olla suomeksi, mutta minusta mesta kuulostaa hyvältä.

mansa tai ainakin maineensa eräänlaisena matematiikan perustana, vaikka hyvin tiedetään, että sen merkitys ei ole lopulta niin iso kuin voisi kuvitella. Tietysti alkeisjoukko-opin merkinnät ja käytännöt ovat sinänsä hyödyllisiä, ja kun vuosikymmenien aikana niihin on totuttu, niin tuntuisi vaikealta luopua niistä. Miten muuten asiat sitten voisi ilmaista kuin joukko-opin avulla? Olkoon $x \in \subset \mathbf{R}^n$; tämäntapaisia kaavoja esiintyy lukemattomissa yhteyksissä. Entä jos $\mathbf{R}^n$ ei olisikaan joukko, miten tämä ajatus pitäisi ilmaista? Gowers sanoo näin:

> Is the set-theoretic language dispensable to an ordinary mathematician? I think it often is, but I wouldn't want to go too far - after all, I would certainly feel hampered if I couldn't use it myself.

Luonnollisesti tärkeämpi kysymys on miksi joukko-opista ja sen merkinnöistä ylipäätään pitäisi luopua, jos ei ole mitään erityistä tarvetta siihen? Voevodskyn mielestä tarvetta kuitenkin oli.

VOEVODSKYN EREHDYS JA HUOLI

Vladimir Voevodsky sai Fieldsin mitalin vuonna 2002 homotopiateorioihin liittyvistä töistä. Voevodsky kiinnostui 90-luvun lopulla todistusassistenteista, koska tietyissä hänen tutkimuksensa kannalta tärkeissä todistuksissa oli virheitä ja epäselvyyksiä. Voevodsky kertoo kiinnostuksensa taustoista seuraavasti (Voevodsky, 2014):

> The field of motivic cohomology was considered at that time [1991] to be highly speculative and lacking firm foundation. The groundbreaking 1986 paper (Bloch, 1986) was [...] found [...] to contain a mistake in the proof of Lemma 1.1. The proof could not be fixed, and almost all of the claims of the paper were left unsubstantiated.
>
> A new proof, which replaced one paragraph from the original paper by thirty pages of complex arguments, was not made public until 1993, and it took many more years for it to be accepted as correct.
>
> The approach to motivic cohomology that [...] circumvented Bloch's lemma by relying instead on (Voevodsky, 2000) which was written [...] in 1992–93. Only in 1999–2000 [...] did I discover that the proof of a key lemma [...] contained a mistake [...]. A corrected sequence of arguments was published in 2006.

Blochin artikkelin julkaisemisen jälkeen kesti siis parikymmentä vuotta ennen kuin asiaan saatiin selvyys. Borgdin mielestä tämä on eräs esimerkki eräänlaisesta referointikriisistä (Borgd, 2021). Toinen tunnettu tapaus on abc-konjektuuri; vuonna 2012 Shinichi Mochizuki väitti todistaneensa konjektuurin käyttäen uutta matemaattista teoriaa, jota hän kutsui nimellä inter-universal Teichmüller theory. Konjektuurin status on edelleen kiistanalainen, ja lopulta Mochizuki päätti julkaista artikkelinsa lehdessä, jossa hän on itse päätoimittaja (Mochizuki, 2021). Joka tapauksessa Voevodsky päätti, että tämänkaltainen vuosikausia kestävä epämääräisyys ei käy vaan tarvitsisi tehdä jotain.

> I didn't have the tools to explore the areas where curiosity was leading me and the areas that I considered to be of value and of interest and of beauty.
>
> So I started to look into what I could do to create such tools. And it soon became clear that the only long-term solution was somehow to make it possible for me to use computers to verify my abstract, logical, and mathematical constructions.

Työkalu, jota Voevodsky tarvitsi, oli todistusassistentti; noihin aikoihin eräs tunnetuimmista oli Coq (The Coq proof assistant). Thierry Coquand ja Gérard Huet tekivät ensimmäiset versiot tästä ohjelmasta jo 80-luvulla (Coquand, T. , Huet, G., 1987). Voevodsky ryhtyi siis formalisoimaan matematiikaa Coqin avulla, ja jatkoi tätä työtä aina kuolemaansa saakka 2017. Voevodskyn työtä on jatketaan edelleen HoTT-projektissa (homotopy type theory) (HoTT).

TYYPPITEORIA

Tekninen ja myös psykologinen vaikeus formalisoinnissa oli, että Coq ei perustunut joukko-oppiin vaan tyyppiteoriaan. Joukko-opista ja kategoriateoriasta luopuminen oli Voevodskylle vaikeaa.

> It is extremely difficult to accept that mathematics is in need of a completely new foundation. [...] Overcoming the appeal of category theory as a candidate for new foundations of mathematics was for me personally the most challenging.

Kategoriateoria on siinä mielessä luonnollinen laajennus joukko-opille, että voidaan määritellä kategoria SET, jonka objektit ovat joukkoja ja morfismit kuvauksia; joukko-oppi ikään kuin upotetaan kategoriateoriaan.

Mutta miksi sitten todistusassistentit kannattaa rakentaa nimenomaan tyyppiteorian pohjalta? Voisihan ajatella, että todistuksia voisi formalisoida myös joukko-opin tai kategoriateorian avulla. Jossain määrin näin voidaankin tehdä, kuten Metamath osoittaa (Metamath). Mutta tavallaan intuitiivisesti voisi sanoa, että joukko-oppi on liian köyhä rakennelma, että sen varaan voisi rakentaa kunnollisia todistusassistentteja. Samoin kategoriateoria ei kelpaa, koska se ei tässä mielessä ole juuri sen parempi kuin joukko-oppi.

Tästähän ei sinänsä suoraan seuraa, että tyyppiteoria olisi sen parempi. On kuitenkin osoittautunut, että tyyppiteorian puitteissa voidaan sanoa, että todistukset ja laskenta vastaavat tietyllä tavalla toisiaan. Tämän asian tarkempi muotoilu tunnetaan nimellä Curry-Howard-isomorfismi (de Groote, 1995). Ne, kuten minä, jotka eivät ole tämän alan spesialisteja, voivat saada asiasta tarkemman tai ainakin jonkinlaisen käsityksen perehtymällä esitelmään Curry-Howard isomorphism for dummies (Pédrot, 2015). Tämän isomorfismin takia voidaan siis olla varmoja, että ainakin teoriassa tyyppiteorian avulla voidaan järkevästi ilmaista todistusassistenteissa vaadittavia rakenteita. Pédrot tiivistää asian näin:

> Proofs in a given subset of mathematics are exactly programs from a particular language.
>
> The statement of a theorem corresponds to the type of the corresponding program

Mutta mikä oikeastaan on tyyppiteoria? Hyvin intuitiivisella tasolla se on jopa helppo hahmottaa. Jokainen, joka on ohjelmoinut edes vähän tietää, että useissa ohjelmointikielissä pitää määritellä muuttujien tyyppi: esimerkiksi INTEGER, REAL (oikeastaan liukuluku) tai STRING. Tietyntyyppi-sille muuttujille on sallittu vain tietynlaisia operaatioita, eikä eri tyyppien sekoittaminen ole useinkaan mielekästä.

Matematiikassa kuitenkin usein implisiittisesti sallitaan, että erilaisia elementtejä voidaan pitää samoina (Grayson, 2018) :

> In set theory, the equation $\mathbf{N} = \{x \in \mathbf{Z} | x \geq 0\}$ is false, The statement is false because the elements of the two sets are different. The strongest thing that can be said is that there is an isomorphism $\mathbf{N} \simeq \{x \in \mathbf{Z} | x \geq 0\}$. Nevertheless, a mathematician may identify the two sets and expect not to get into trouble.

Tämänkaltaisia identifiointeja tehdään jatkuvasti: aina puhutaan L^2-funktioista eikä ekvivalenssi-luokista. Edelleen, kyseessä oleva ”funktio” samaistetaan sitä vastaavaan distribuutioon. Tyyppiteoriassa pitää olla tarkempi ja jos halutaan identifioida kaksi asiaa, niin tämä samaistus pitää sitten eksplisiittisesti konstruoida.

Joukko-opin kaavaa $a \in B$ vastaa tyyppiteoriassa ajatuksellisesti $a : B$ joka luetaan: termi a on tyyppiä B. Sen sijaan osajoukolle $A \subset B$ ei ole oikein mitään suoraa vastinetta vaan tässä tapauksessa pitäisi konstruoida upotus $A \to B$. Tämän takia myös operaatioilla $A \cap B$ ja $A \cup B$ ei ole mitään suoraa vastinetta tyyppiteoriassa. Tyyppiteorian sisällä voidaan kuitenkin määritellä tyyppi, jota voidaan kutsua joukoksi. Tämä ei tietysti ole täsmälleen sama asia kuin joukko-opin joukko, mutta ehkäpä *matemaatikko voi identifioida nämä kaksi asiaa joutumatta kovin pahoihin vaikeuksiin.*

Vaikeampi/ mielenkiintoisempi asia on, että samaa merkintää käytetään sekä funktiolle että implikaatiolle. Tästä saadaan (Grayson, 2018):

> If X and Y are types, there will be a type whose elements serve as functions from X to Y; the notation for it is $X \to Y$. This allows us to introduce the surprising mathematical pun $f : X \to Y$, which says that f is an element of the type $X \to Y$, and which can be read traditionally as saying that f is a function from X to Y.

Kaikkein tärkein tyyppi on Graysonin mukaan yhtäsuuruustyyppi (equality type tai identity type). Per Martin-Löf (Martin-Löf, 1971) huomasi 70-luvulla, että yhtäsuuruustyyppi voidaan määritellä induktiivisesti, hiukan samaan tapaan kuin Peanon systeemissä positiiviset kokonaisluvut määritellään induktiivisesti. Tämä kuulostaa tietysti varsin kummalliselta, mutta on osoittautunut, että Martin-Löfin idea on tärkeä tyyppiteoriassa. Graysonin artikkelissa (Grayson, 2018) asiaa selvitetään tarkemmin, mutta katsotaan tähän liittyvä esimerkki. Jos x ja y ovat tyyppiä B, niin Martin-Löfin mukaan on aina olemassa tyyppi $x = y$. Voidaan siis kirjoittaa $T : x = y$, ja tämä voidaan lukea: T on todistus sille, että x on y. Tässä siis $x = y$ on lause, ja T on todistus/ ohjelma, joka on lauseen tyyppiä.

Kuten jo näistä yksinkertaisista huomioista nähdään, niin tyyppiteoriassa asiat pitää ilmaista aivan eri tavalla kuin on totuttu. Vaikka Martin-Löf ei itse ollut kehittämässä todistusassistentteja, niin hän oli kiinnostunut tyyppiteorian ja laskennan vuorovaikutuksesta; hänen mielestään tyyppiteoriaa voidaan jopa pitää eräänlaisena hyvin korkean tason ohjelmointikielenä (Martin-Löf, 1982). Martin-Löfiin liittyy hauska muisto: osallistuin erääseen konferenssiin Mittag-Lefflerissä 80-luvulla, ja Martin-Löf oli yksi puhujista. Luulen, että hän puhui nimenomaan tyyppiteoriasta; esitelmä on kuitenkin jäänyt mieleen juuri sen takia, etten ymmärtänyt siitä mitään.

Mielenkiintoista on myös, että tyyppiteoria ja todistusassistentit voidaan rakentaa enemmän tai vähemmän konstruktiiviseksi. Valinta-aksiooma voidaan ottaa käyttöön, jos halutaan. Voidaan siis hyvin tarkasti kontrolloida, millaisia asioita todistuksessa sallitaan tai ei sallita. Tämän avulla lauseiden sisältökin saa tarkemman muodon, kun pidetään kirjaa, mitä kaikkea todistuksessa tarvitaan.

Jotta asiat eivät olisi liian yksinkertaisia, niin tyyppiteorioita on tietysti erilaisia. Ehkäpä ensimmäinen tyyppiteoreettinen systeemi oli Alfred North Whiteheadin ja Bertrand Russellin yritys rakentaa matematiikan perusteita (Whitehead, A. N. , Russell, B., 1910). Teoksessa käytettiin tyyppiteoriaa muun muassa siihen, että päästiin eroon joukko-opin kiusallisista itseensä viittaavista kaavoista kuten $A \in A$. Tyyppiteoriassa $A : A$ ei ole syntaktisesti mahdollinen. Tämähän on luonnollista, jos ajattelee ohjelmointikieliä: jos a : INTEGER, niin tietenkään a itse ei voi olla INTEGER.

En tiedä tuliko Whiteheadille ja Russellille mieleen, että heidän työllään voisi olla merkitystä tietokoneitten kannalta. Tämä olisi ainakin teoriassa ollut mahdollista, koska Charles Babbage ja Ada Lovelace olivat jo 1800-luvun puolella selkeästi hahmotelleet tietokoneen idean, vaikka Babbagen yritys rakentaa tietokone (analytical engine) jäikin kesken (Babbage, C. , Lovelace, A., 1842).

Nykyään monet todistusassistentit, kuten Coq, Agda (Agda) ja LEAN (LEAN) , käyttävät ”riippuvaa” tyyppiteoriaa (dependent type theory), mutta kuitenkin Isabelle (Isabelle) käyttää “yksinkertaista” (simple) tyyppiteoriaa. En ole varma, kuinka merkittävä yksinkertaisen ja riippuvan tyyppiteorian ero on, mutta kaiketi yksinkertaisellakin versiolla aika pitkälle päästään (Bordg, A. , Paulson, L. , Li, W., 2021). RedPRL (RedPRL) puolestaan käyttää versiota, jonka nimi on Cartesian cubical computational type theory. Myös Voevodsky loi oman version riippuvasta tyyppiteoriasta; hän käytti näin syntyneestä systeemistä nimeä *Univalent foundations* (Grayson, 2018). Näyttäisi siis siltä, että tyyppiteorioita on jatkossakin monenlaisia, eikä kaiketi ole selvää alan spesialisteillekaan stabiloituuko tilanne lähiaikoina vai ei.

Todistusassistenttien avulla voidaan siis kirjoittaa "parempia" tai ainakin varmempia tai tarkempia (rigorous) todistuksia kuin muuten olisi mahdollista. Kaiketi on varsin selvää, että kun asiat tehdään huolellisesti, niin koneet tekevät vähemmän virheitä kuin ihmiset, joten matemaattisten tulosten luotettavuus kasvaa, jos todistusassistentit yleistyvät. Artikkelien referointikin voisi merkittävästi helpottua ajan myötä, ja näin myös vältyttäisiin Borgdin kuvaamalta referointikriisiltä. Ongelma on tietenkin se, että tulokset ja artikkelit pitäisi muotoilla tyyppiteorian mukaisesti, siis tavallisille matemaatikoille aivan uudella ja vieraalla tavalla, joten tietysti tämä ei ole vielä käytännössä mahdollista pitkään aikaan. Periaatteessa kuitenkin tämä voisi olla jonain päivänä toimiva systeemi.

LEAN

Katsotaan tarkemmin LEANia. Leonardo de Moura aloitti tämän systeemin kehittämisen Microsoftilla vuonna 2013. Systeemin tarkoituksena oli tarkistaa, että tietokoneohjelmissa ei ole virheitä, eikä sitä mitenkään alun perin ollut tarkoitettu matemaatikoille. Mutta itse asiassa ohjelman osoittaminen virheettömäksi on oikeastaan hyvin lähellä lauseen todistamista; ehkäpä Curry-Howard-isomorfismin ansiosta voidaan jopa sanoa, että ne ovat sama asia; tai ainakin että matemaatikko voi identifioida nämä kaksi asiaa joutumatta kovin pahoihin vaikeuksiin. Matemaatikot siis huomasivat, että LEAN soveltuisi hyvin myös todistusassistentiksi, ja jonkin ajan kuluttua siitä tehtiin versio nimenomaan matematiikan tarpeita ajatellen. Tämän jälkeen ohjelmiston ympärille on kasvanut yhteisö, joka pikkuhiljaa formalisoi kaikkea matematiikkaa lähtien perusasioista liikkeelle (Hartnett, 2020).

Luonnollisesti tehtävä on valtava, mutta asiat etenevät ja esimerkiksi perusreaalianalyysiä on formalisoitu niin paljon, että tyyppiteoriaa voitaisiin jo käyttää opetuksessa. Toisin sanoen joukko-oppi voitaisiin unohtaa yliopistojen peruskursseilla, ja lähteä opiskelemaan matematiikkaa LEANin avulla. Kevin Buzzard[59] on jo jonkin verran kokeillut tällaista Imperial Collegessa, samoin Patrick Massot Université Paris-Sudissä.[60] Buzzard kertoo tästä, ja muutenkin matematiikan formalisoinnista esitelmässä, jonka hän piti Microsoftilla (Buzzard, 2019). Buzzard kiinnostui todistusassistenteista osittain samasta syystä kuin Voevodsky: eräät tulokset, joita hän halusi käyttää tutkimuksessa, olivat epäselviä ja epävarmoja.

Todistusassistenttien ja tyyppiteorian käyttö opetuksessa herättää mielenkiintoisia kysymyksiä. Mitä matematiikkaa pitäisi opettaa ja miksi? Vaikka tyyppiteoria tuntuu nyt vieraalta, niin luulisin, että opiskelijan näkökulmasta se ei ole sen vaikeampi tai helpompi kuin joukko-oppi. Todistus-assistenttien avulla opiskelijat pystyisivät tekemään

[59] https://www.imperial.ac.uk/people/k.buzzard
[60] https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~pmassot/index.html

tarkkoja todistuksia, mutta todistukset olisivat hyvin erilaisia kuin mitä nykyään opetetaan. Mutta haittaisiko se? Ja jos ei haluta opettaa mahdollisimman tarkkoja todistuksia, niin mitä oikeastaan halutaan?

LEANiin voi jokainen helposti tutustua Buzzardin ja Mohammad Pedramfarin suunnitteleman Natural number gamen avulla (Buzzard, Natural number game). Tässä lähdetään liikkeelle ilman mitään esitietoja, ja minusta se oli kiinnostavasti tehty. Helppojen tehtävien avulla saa ainakin jonkinlaisen kuvan, miten formalisointi toimii. Luonnollisesti tässä tulee vastaan ne tavanomaiset turhautumiset, kun pitää opetella uusi syntaksi. Mielenkiintoista on, että prosessi etenee vaiheittain. Kun todistus jotenkin on saatu alkuun, niin **LEAN** automaattisesti etenee mahdollisimman pitkälle, ja kertoo sitten käyttäjälle, mitä seuraavaksi pitäisi tehdä. Siis käyttäjän ei tarvitse etukäteen pilkkoa lausetta ”pienemmiksi” lemmoiksi, vaan ohjelma tekee tämän. Tätä on ehkä vaikea hahmottaa, jos ei ole itse kokeillut tuollaista systeemiä, joten suosittelen Natural number gamen testaamista!

Katsotaan sitten vielä toinen esimerkki, jossa todistusassistenttia on käytetty aivan lähiaikoina huippututkimuksessa; tätä varten käännytään toisen Fields-mitalistin puoleen

TIIVISTETTY MATEMATIIKKA

Peter Scholze sai Fieldsin mitalin vuonna 2018 aritmeettiseen algebralliseen geometriaan liittyvistä töistä. Viime aikoina hän on Dustin Clausenin kanssa ruvennut luomaan uudenlaista matematiikan alaa: tiivistettyä matematiikkaa (condensed mathematics) (Scholze). Tässä keskeinen käsite on tiivistetty joukko (condensed set) (Scholze, 2021).

> **Määritelmä**. Condensed sets *are sheaves on the pro-étale site of a point*.

Palataan hiukan myöhemmin siihen, miten tämä pitäisi ymmärtää, koska ainakaan minulle itse määritelmä ei juuri valaise asiaa. Joka tapauksessa tiivistettyyn matematiikkaan liittyy joitain joukko-opillisia ongelmia:

> [There are] set-theoretic problems. […] Let me gloss over this point here; it is not essential for any of the following discussion.

Toisin sanoen ZFC-systeemi ei riitä tässä, mutta Scholzen mielestä tämä on oikeastaan epäoleellista. Scholzen rakennelmassa oli muutama erittäin tekninen lause, jotka hän luuli todistaneensa, mutta hälventääkseen viimeiset epäilyt, hän päätti ryhtyä projektiin, jossa nämä keskeiset tulokset formalisoitaisiin ja todistettaisiin LEANin avulla. Scholze ei itse ruvennut ohjelmoimaan LEANilla, vaan luotiin Johan Commelinin johtama ryhmä tätä tarkoitusta varten. Scholze oli kuitenkin jatkuvasti yhteydessä ryhmään. Projektin nimeksi tuli *Liquid tensor experiment*, kaiketi kahdesta syystä: toisaalta nesteet varmaankin ovat jonkinlainen kontrasti tiiviydelle, ja toisaalta Scholzen ja Commelinin suosikkibändi on nimeltään *Liquid tension experiment*.[61] Ryhmä aloitti työt loppuvuonna 2020, ja jo

[61] https://www.wikiwand.com/en/Liquid_Tension_Experiment

kesällä 2021 projekti oli edennyt jo niin pitkälle, että Scholze jo siinä vaiheessa piti projektia onnistuneena (Castelvecchi, 2021). Esimerkiksi ne tekniset tulokset, jotka Scholzea erityisesti huolestutti, oli saatu pakettiin.

Siis varsin lyhyessä ajassa pystyttiin formalisoimaan ja todistamaan tuloksia, jotka ovat hyvin monimutkaisia, joten selvästi todistusassistenteilla voidaan tehdä jotain järkevää aivan matematiikan tutkimuksen eturintamassa. Lisäksi todistusassistenttien laatu koko ajan paranee, koska kaikki uudet formalisoidut käsitteet ja tulokset ovat ikään kuin valmiina kirjastossa tulevaa käyttöä varten, joten käytössä olevien työkalujen määrä kasvaa koko ajan.

Tuloksen formalisoinnissa tiivistetty joukko ei tietysti ole joukko, vaan tyyppi, tai termi, joka on tiettyä tyyppiä. Uskoisin kuitenkin, että tästä huolimatta Scholze ja Clausen käyttävät jatkossa joukko-opin merkintöjä tavallisissa matemaattisissa teksteissä. Tässä siis siirretään tuloksia kahden erilaisen matemaattisen maailman välillä, käyttäen jo hyväksi havaittua filosofiaa, että matemaatikko (toivoo, että hän) voi sopivasti identifioida kaksi eri asiaa joutumatta kovin pahoihin vaikeuksiin.

Mutta miksi nämä tiivistetyt joukot sitten ovat niin tärkeitä? Itse asiassa Scholze väittää, että niillä voisi olla laajempaakin käyttöä matematiikassa. Lause johon Scholze seuraavassa viittaa on juuri se tulos, joka piti formalisoida.

> With this theorem, the hope that the condensed formalism can be fruitfully applied to real functional analysis stands or falls. I think the theorem is of utmost foundational importance, so being 99.9% sure is not enough.

Jos nyt katsoo uudelleen tuota tiivistetyn joukon määritelmää, niin voisi varsin helposti tulla siihen johtopäätökseen, että sillä ei ole mitään tekemistä reaalisen funktionaalianalyysin kanssa. En tiedä miten Scholze ja Clausen aikovat tehdä tuloksensa ymmärrettäviksi sellaisille matematiikoille, jotka tuntevat funktionaalianalyysiä, mutta eivät ole perehtyneet algebralliseen geometriaan ja kategoriateoriaan. Ehkäpä heillä on tekeillä teos *Condensed sets for dummies*. Mutta itse asiassa tiivistetyn joukon merkitys on Scholzen mukaan vieläkin suurempi:

> I want to make the strong claim that in the foundations of mathematics, one should replace topological spaces with condensed sets. […] This claim is only tenable if condensed sets can also serve their purpose within real functional analysis.

Kun nyt on jo totuttu ajatukseen, että joukko-opista luovutaan tai ainakin voitaisiin luopua, niin kukaan ei kai enää järkyty, kun topologiset avaruudetkin pitää korvata paremmalla rakenteella, siis tiivistetyillä joukoilla. Jäänkin odottamaan Scholzen ja Clausenin kirjaa niin voin sitten muuttaa kurssini *Johdatus topologiaan* kurssiksi *Johdatus tiivistettyihin joukkoihin*.

TULEVAISUUS

Charles Hoskinson opiskeli nuorempana matematiikkaa mutta innostui sitten kryptovaluutoista, ja rikastui niitten avulla. Viime syksynä hän lahjoitti 20 miljoonaa dollaria Carnegie Mellon -yliopistolle, jotta sinne perustettaisiin Hoskinson center for formal mathematics. Yksikön johtajaksi tulee Jeremy Avigad, joka on ollut aktiivisesti mukana LEANissa. Avigad kertoo yksikön tavoitteista seuraavasti (Avigad, 2021):

> The center's mission is to support the work being done by the LEAN community, to promote the use of LEAN and its libraries, and to seek out ways of using the technology to make mathematics accessible and enjoyable to as wide an audience as possible.

Tähän mennessä LEAN on toiminut yhteisönä varsin epämuodollisesti. Hoskinson center todennäköisesti varmistaa toiminnan jatkuvuuden siinä mielessä, että yhteisö ei pääse jotenkin ”vahingossa” hajoamaan.

Kuten on nähty, niin LEAN on tietysti vain yksi mahdollinen systeemi. Angelika Koutsoukou-Argyraki on kerännyt erilaisia ajatuksia ja mielipiteitä matematiikan formalisoinnista ja sen merkityksestä tulevaisuudessa, riippumatta siitä mitä todistusassistenttia käytetään (Koutsoukou-Argyraki, 2022). Lopuksi ehkä on vielä syytä mainita, että luonnollisesti tarkoitus ei ole korvata kaikkea matematiikkaa formalisoidulla matematiikalla, vaan ideana on, että todistusassistenttien ja tyyppiteorian käyttö on eräs mahdollinen ja mielenkiintoinen tapa tehdä matematiikkaa. Massot ilmaisee asian näin (Massot, 2021):

> I think a key point is that formalized mathematics brings a lot of fun. […] Of course fun is not the only reason why people collaborate on building libraries of formalized mathematics. This is also an exhilarating experience where contributors feel they could have a real impact on the mathematical community, without removing anything we love, only adding new possibilities.

Lähdeluettelo

Agda. (ei pvm). Noudettu osoitteesta https://wiki.portal.chalmers.se/agda/pmwiki.php

Avigad, J. (2021). Noudettu osoitteesta https://leanprover-community.github.io/blog/posts/hoskinson-center-announced/

Babbage, C. , Lovelace, A. (1842). The sketch of the analytical engine. Noudettu osoitteesta https://www.fourmilab.ch/babbage/sketch.html

Bauer, A. (2017). Five stages of accepting constructive mathematics. Bulletin of AMS, 481-498. doi: https://doi.org/10.1090/bull/1556

Bishop, E. (1967). Foundations of constructive analysis. McGraw Hill.

Bloch, S. (1986). Algebraic cycles and higher K-theory. Adv. in Math., 267-304.

Bordg, A. , Paulson, L. , Li, W. (2021). Simple Type Theory is not too Simple: Grothendieck's Schemes without Dependent Types. arXiv. doi:10.48550/ARXIV.2104.09366

Borgd, A. (2021). A replication crisis in mathematics? Math. Intelligencer, vol. 43, 48-52. doi:10.1007/s00283-020-10037-7

Buzzard, K. (2019). The Future of Mathematics? Noudettu osoitteesta https://www.youtube.com/watch?v=Dp-mQ3HxgDE

Buzzard, K. (ei pvm). Natural number game. Noudettu osoitteesta https://www.ma.imperial.ac.uk/~buzzard/xena/natural_number_game/

Castelvecchi, D. (2021). Mathematicians welcome computer-assisted proof in ‘grand unification’ theory. Nature. doi:https://doi.org/10.1038/d41586-021-01627-2

Coquand, T. , Huet, G. (1987). Concepts mathématiques et informatiques formalisés dans le calcul des constructions. Teoksessa Logic colloquium '85 (Orsay, 1985) (ss. 123-146). North-Holland.

Davis, P. , Hersh, R. (1980). Mathematical experience. Birkhäuser.

de Groote, P. (Toim.). (1995). The Curry-Howard isomorphism. Cahiers du Centre de Logique. vol. 8. Academia-Erasme, Louvain-la-Neuve.

Dieudonné, J. (1982). Mathématiques vides et mathématiques significatives. Teoksessa Penser les mathématiques (ss. 15-38). Éditions du Seuil.

Gowers, T. (ei pvm). Does mathematics need philosophy? Noudettu osoitteesta https://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/philosophy.html

Grayson, D. (2018). An introduction to univalent foundations for mathematicians. Bulletin of AMS, 427-450. doi: https://doi.org/10.1090/bull/1616

Hartnett, K. (2020). Building the Mathematical Library of the Future. Quanta Magazine . Noudettu osoitteesta https://www.quantamagazine.org/building-the-mathematical-library-of-the-future-20201001/

HoTT. (ei pvm). Noudettu osoitteesta https://homotopytypetheory.org/

Isabelle. (ei pvm). Noudettu osoitteesta https://isabelle.in.tum.de/

Koutsoukou-Argyraki, A. (2022). What Can Formal Systems Do For Mathematics? A Discussion Through The Lens Of Proof Assistants: Some Recent Advances. Noudettu osoitteesta https://www.researchgate.net/publication/359592051_What_Can_Formal_Systems_-Do_For_Mathematics_A_Discussion_Through_The_Lens_Of_Proof_Assistants_Some_Recent_Advances

LEAN. (ei pvm). Noudettu osoitteesta https://leanprover-community.github.io/index.html

Martin-Löf, P. (1971). Hauptsatz for the intuitionistic theory of iterated inductive definitions. Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium (ss. 179-216). North-Holland.

Martin-Löf, P. (1982). Constructive mathematics and computer programming. Teoksessa Logic, methodology and philosophy of science, VI, (Hannover 1979) (ss. 153-175). North-Holland.

Mashaal, M. (2017). Bourbaki, Une société secrète de mathématiciens. Éditions Belin.

Massot, P. (2021). Why formalize mathematics? Noudettu osoitteesta https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~pmassot/en/exposition/

Metamath. (ei pvm). Noudettu osoitteesta http://us.metamath.org/

Mochizuki, S. (2021). Inter-universal Teichmüller theory, 1 - 4. Publ. Res. Inst. Math. Sci., 3 -723.

Nelson, E. (1977). Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis. Bulletin of AMS, 1165-1198. doi:10.1090/S0002-9904-1977-14398-X

Pédrot, P.-M. (2015). Curry-Howard isomorphism for dummies. Noudettu osoitteesta https://www.pédrot.fr/slides/inria-junior-02-15.pdf

RedPRL. (ei pvm). Noudettu osoitteesta https://redprl.org/

Scholze, P. (ei pvm). Noudettu osoitteesta http://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Notes.html

Scholze, P. (2021). Liquid tensor experiment. Experimental mathematics. doi: 10.1080/10586458.2021.1926016

The Coq proof assistant. (ei pvm). Noudettu osoitteesta The Coq proof assistant: https://coq.inria.fr/

Whitehead, A. N. , Russell, B. (1910). Principia mathematica. Cambridge Univ. Press.

Voevodsky, V. (2000). Cohomological theory of presheaves with transfers. Teoksessa Cycles, transfers, and motivic homology theories (ss. 87-137). Princeton Univ. Press.

Voevodsky, V. (2014). The Origins and motivations of univalent foundations. Noudettu osoitteesta https://www.ias.edu/ideas/2014/voevodsky-origins

von Neumann, J. (1947). The mathematician. Teoksessa The Works of the Mind (ss. 180-196). University of Chicago Press.

MIKÄ IHMEEN AKATEMIAN JALKAVÄKI?

Akatemian jalkaväki on monen kirjoittajan muodostama blogiyhteisö. Yhteistä kirjoittajille on ollut työskentely tieteen parissa. Yhteisö on julkaissut yhden tai useamman kirjoittajan blogeja tieteen ruohonjuuritasolta ja tieteenteon arjesta lähes viikoittain vuodesta 2015 alkaen. Tällä hetkellä blogiin kirjoittaa seitsemän kirjoittajaa, jotka ovat kaikki eri tavoin tekemisessä tieteen kanssa.

Kirjoitusten aiheet valikoituvat kirjoittajien omien mielenkiinnon kohteiden mukaan. Viimeisen vuoden aikana blogissa on kirjoitettu esimerkiksi rahoituksen hakemisesta [1,2], uupumisesta [3], palkka-avoimuudesta [4], vanhemmuudesta [5] ja miesselittämisestä [6].

Elina Palmgren on kirjoittanut lyhyen historiikin Akatemian jalkaväen vuosista [7]. Akatemian jalkaväki sai alkunsa syksyllä 2015, kun Olli-Pekka (Opa) Tikkasalo oli saamassa Pro Gradu -tutkielmaansa valmiiksi ja aloittamassa väitöskirjatutkijana. Tutkielman tekemisen aikana Opa oli huomannut, että kirjoittaminen tuntui hankalalta. Samaan aikaan uunituoreen Sipilän hallituksen nimittämisen myötä Opasta tuntui, että julkisessa keskustelussa ei hahmoteta, millaista tutkijan arki on. Näiden tuntemusten johdosta syntyi ajatus aloittaa blogi tieteenteon arjesta. Mukaan kirjoittajaksi Opa pyysi Tommi Tenkasen, joka on aikaisemmin kirjoittanut kolumneja myös Arkhimedekseen. Blogin nimi puolestaan on saanut innoituksensa Kari Enqvistin Iltalehdessä ilmestyneestä blogikirjoituksesta, joka valitettavasti on poistunut jo internetistä.

Blogiyhteisön muodostumisen kannalta merkittävin muutos tapahtui syksyllä 2016, kun Tommi piti hetken taukoa kirjoittamisesta ja Elina pyydettiin tuuraamaan Tommia. Tommin palattua takaisin myös Elina jatkoi kirjoittamista blogiin vakituisena kirjoittajana. Ensimmäisinä vuosina uusia kirjoittajia rekrytoitiin omien verkostojen kautta, mutta nykyään blogi hakee uusia kirjoittajia avoimilla kutsuilla. Myös tällä hetkellä kirjoittajakutsu on auki [9]. Blogiin etsitään sekä vakituisia että vierailevia kirjoittajia.

Tänä syksynä alkoi Akatemian jalkaväen kahdeksas vuosi. Kuluneen seitsemän vuoden aikana blogiin on kirjoittanut yli 20 kirjoittajaa erilaisista taustoista. Akatemian jalkaväen aivan ensimmäisen kirjoituksen alku kuvaa edelleen hyvin blogin tarkoitusta [8]:

“Monet yliopistolaiset törmäävät ennemmin tai myöhemmin esimerkiksi vanhempiensa tai ennen yliopistoa muodostuneiden ystäväpiiriensä kysymyksiin siitä, millaista työnteko yliopistossa on. – – Tämä blogi on pidemmänpuoleinen vastaus tuohon kysymykseen.“

Akatemian jalkaväen nykyiset kirjoittajat:

Fanny Johansson-Stockford, Marja Lindholm, Tuuli Miinalainen, Kalle Nordling, Pirjo Ovaskainen, Elina Palmgren, Havu Pellikka, Suvi Saarelainen, Juha Tiihonen ja Olli-Pekka Tikkasalo

Viitteet

[1] https://akatemianjalkavaki.fi/2021/10/08/ensimmainen-hakemukseni-suomen-akatemialle/

[2] https://akatemianjalkavaki.fi/2021/09/17/vaadi-pyyda-ja-anele-rakatauteja-ja-rahoitusuhmaa/

[3] https://akatemianjalkavaki.fi/2021/11/05/tutkijan-uupumus-ja-tutkimuksen-kadotettu-merkitys/

[4] https://akatemianjalkavaki.fi/2021/11/19/palkka-avoimuus-tutkijana/

[5] https://akatemianjalkavaki.fi/2022/01/14/raskaus-tutkimuksen-ehdoilla-vai-toisinpain/

[6] https://akatemianjalkavaki.fi/2022/06/17/konferenssien-miesselittajat/

[7] https://akatemianjalkavaki.fi/2021/06/18/a-brief-history-of-akatemian-jalkavaki/

[8] https://akatemianjalkavaki.fi/2015/09/25/akatemian-jalkavaki/

[9] https://akatemianjalkavaki.fi/2022/09/09/akatemian-jalkavaen-syyskausi-alkaa/

MATEMAATIKKO LEVITTI HYVÄÄ SANOMAA

Tauno Metsänkylä

David E. Rowe, Mechthild Koreuber: *Proving it her way. Emmy Noether, a Life in Mathematics.* Springer 2020, 241 s.

David E. Rowe: *Emmy Noether, Mathematician Extraordinaire,* Springer 2021, 339 s.

Baijerilaisen Erlangenin kaupungin pääkadulla tarkkaavainen turisti voi huomata kolmikerroksisen talon seinässä muistolaatan, jossa on teksti

Geburthaus der Mathematikerin

EMMY NOETHER

geb. 23.3.1882 Emigration 1933

gest. 24.4.1935 in Bryn Mawr USA

Jos turistimme kiinnostuu tästä toden teolla ja lähtee vierailulle pennsylvanialaiseen Bryn Mawrin pikkukaupunkiin, hän löytää sieltä yliopiston kampukselta pylväikön suojassa olevalta pihakiveykseltä yhden muita kookkaamman laattakiven, johon on kaiverrettu merkintä

$$E * N \quad 1882 - 1935$$

Paikkaan on haudattu Emmy Noetherin tuhka.

Albert Einsteinin laatimasta muistokirjoituksesta *The New York Timesissa* suuri yleisö sai lukea, että Emmy Noether oli *significant creative mathematical genius* ja edelleen että *in the realm of algebra, in which the most gifted mathematicians have been busy for centuries, she discovered methods which have proved of enormous importance.*

Tässä oli Noetherin lyhyen elämän luonnehdinta, tiivistettynä olennaisimpaan. Mutta tietysti noihin vuosiin mahtui monenlaisia vaiheita, onnellisia aikoja ja myös raskaita suruja. Kaikesta tästä kertovat käsillä olevat elämäkerrat. Noetherin elämästä on toki kirjoitettu ennenkin, mutta uudet teokset ovat aiempia laajempia ja perusteellisempia. Ne ovat myös hyvin elävästi kirjoitettuja.

Ensimmäisen kirjan nimi *Proving It Her Way* viittaa Noetherin tutkimustyössään käyttämään uudenlaiseen todistusmenetelmään, jossa aiemmat ”laskelmat” eli kaavojen manipulointi korvataan abstraktilla, käsitteellisellä päättelyllä. Tulos saa näin luonnollisemman selityksen ja on helpommin yleistettävissä.

Noetherin ensimmäisiä läpimurtoja olivat teoreettisen fysiikan piiriin kuuluvat tulokset, jotka ratkaisivat yleisessä suhteellisuusteoriassa tärkeän kysymyksen. Nykyisin ne tunnetaan nimellä *Noetherin säilymislait*. Sitä seuraavat tulokset lukeutuvat enimmäkseen algebraan. Kuvaavaa on, että myöhemmin algebrassa alkoivat nopeasti vakiintua monet hänen mukaansa nimetyt käsitteet, kuten *Noetherin rengas, Noetherin kuvaus, Noetherin avaruus*. Harva matemaatikko ylipäänsä on saanut nimensä yhtä moneen käsitteeseen.

Matematiikan tutkija kuvitellaan helposti henkilöksi, joka istuu työhuoneessaan kirjojen ja papereitten ympäröimänä ja miettii. Emmyyn tämä mielikuva ei sovi lainkaan. Hän oli hyvin seurallinen ihminen ja pohti ongelmia mieluiten yhdessä oppilaiden ja kollegoiden kanssa. Hän rakasti ”matematiikan puhumista”, niin kuin hän sanoi. Eikä pelkästään yliopistolla, vaan kaikkialla muuallakin, missä se vain kävi päinsä: kaupungilla kävellessä, pitkillä vaelluksilla maaseudulla, erilaisissa harrastuksissa, vaikkapa uimalaitoksella. Emmy harrasti uintia intohimoisesti.

1900-luvun alkuvuosikymmeninä naiset olivat vielä yliopistoissa jonkinlaisia kummajaisia. Naiset joutuivat käymään kovan taistelun saadakseen luvan opiskella yliopistossa sekä luvan suorittaa tutkintoja. Tämän taistelun vaativin aste saksalaisessa yliopistossa oli *venia legendi*, lupa opettaa. Sitä vastaa tavallaan suomalaisessa yliopistossa dosentin arvo.

Emmyltä tämä kaikki lopulta onnistui. Vuonna 1915 hän pääsi siirtymään kotikaupunkinsa yliopistosta Göttingeniin, jonka yliopiston matematiikan laitosta pidettiin Saksan parhaana. Sen opettajakunnassa oli useita suuria nimiä, kuten **David Hilbert** ja **Felix Klein**, ja Emmy Noether liittyi luontevasti joukkoon. Göttingeniin tuli vierailevia tutkijoita ja opiskelijoita monista maista, sekä Euroopasta että Yhdysvalloista ja Japanista, ja Emmyn uudet ideat vetivät nopeasti puoleensa lisää tutkijoita ja alkoivat levitä yliopistoihin kaikkialla maailmassa. Lukuisista hänen oppilaistaan tuli kuuluisia matemaatikkoja, jotka sitten veivät viestiä eteenpäin.

Suomalaisia Göttingenin-kävijöitä olivat ainakin **Lars Ahlfors**, joka mainitaankin toisessa kirjassa, ja **Rolf Nevanlinna**. Myöhempinä aikoina siellä kävi mm. **Kustaa Inkeri**.

Göttingenin kultakausi päättyi kuitenkin äkillisesti vuonna 1933 natsien tultua valtaan. Suuri joukko opettajia, Emmy Noether heidän joukossaan, erotettiin juutalaisina yliopistoista. Monet muuttivat Yhdysvaltoihin ja Noether seurasi esimerkkiä. Häntä ennen muuttaneet ehtivät täyttää parhaiden yliopistojen virat, ja Noetherille järjestyi paikka Bryn Mawrista naisia varten perustetusta yliopistosta. Se oli Göttingeniin verrattuna vaatimaton oppilaitos, mutta Emmy Noether sai onnekseen myös kutsun vierailla säännöllisesti läheisessä Princetonin yliopistossa.

Työskentelyä USA:ssa ei kuitenkaan kestänyt kauan. Emmy Noether kuoli vuonna 1935 hänelle tehdyn leikkauksen komplikaatioihin.

Miksi kaksi kirjaa lähes samanaikaisesti? Ensimmäinen kirja sai alkunsa vuonna 2019 Berliinissä pidetystä monitieteisestä seminaarista, jossa Mechthild Koreuber oli liikkeelle panevana voimana. Silloin oli kulunut sata vuotta Noetherille myönnetystä opetusoikeudesta Göttingenin yliopistossa.

Osanottajat tulivat monilta laitoksilta, fysiikasta, kulttuurintutkimuksesta, tieteenhistoriasta, sukupuolentutkimuksesta, ja tapahtuma saavutti suuren suosion. Yhtenä tavoitteena oli lisätä naisten kiinnostusta matematiikan opiskeluun. Tilaisuudessa mm. esitettiin sitä varten kirjoitettu näytelmä, *Spaziergänge mit Emmy Noether*, joka on sen jälkeen jatkanut elämäänsä muokatussa muodossa.

Toinen kirja syntyi David E. Rowen, matematiikan historian professorin, ajatuksesta esittää pääosa jo kirjoitetun kirjan materiaalista muodossa, jossa se sopii paremmin matemaatikkolukijalle. Kynnys on se, että lukijan olisi tiedettävä suunnilleen, mitä käsite *Noetherin rengas* tarkoittaa. Noetherin elämää sen sijaan käsitellään vähemmän.

Kummassakin kirjassa käytetään kyllä vapaasti matemaattisia käsitteitä ajatellen, ettei lukijan tarvitse ymmärtää niiden tarkkaa sisältöä. Niitä voi ehkä ajatella ”näytelmän henkilöinä”.

Jälkimmäisen kirjan loppuun on lisätty luku Emmyn Fritz-veljestä ja hänen perheestään. Myös Fritz oli matemaatikko. Hän emigroitui 1934 Siperiaan Tomskiin, hänet pidätettiin 1937 vakoilusta epäiltynä ja teloitettiin 1941. Vuonna 1988 hänet rehabilitoitiin.

Monissa hakuteostyyppisissä esityksissä, jotka mainitsevat Emmy Noetherin, häneen liitetään määre ”merkittävin naismatemaatikko”. Tämä on tavallaan vähättelevä ilmaus, sillä siinä sarjassa kilpailu ei ole ollut erityisen kovaa. Osuvampaa on sanoa Noetherista, että hän oli 1900-luvun merkittävimpiä matemaatikkoja. Siitä näyttää vallitsevan matemaatikkojen keskuudessa laaja yksimielisyys.