NRO 1/2023

FYSIIKAN JA MATEMATIIKAN AIKAKAUSLEHTI
TIDSKRIFT FÖR FYSIK OCH MATEMATIK

ARKHIMEDES

JOUKKOJEN JA FUNKTIOIDEN ERITYISPISTEISTÄ

DigiPhysLab: KOKEELLISTA FYSIIKKAA KÄNNYKÄLLÄ

KONFORMINEN SOBOLEV-KOHOMOLOGIATEORIA

ARKHIMEDES 1/2023

Julkaisijaseurat
Suomen Fyysikkoseura ry:
https://www.fyysikkoseura.fi
Fysikersamfundet i Finland rf:
https://www.physics.helsinki.fu/~fysif/
Suomen matemaattinen yhdistys ry:
https://www.matemaattinenyhdistys.fi/

Yhteystiedot
toimitus@arkhimedes.fi

ARTIKKELIT

KOLUMNI

JOUKKOJEN JA FUNKTIOIDEN ERITYISPISTEISTÄ

Raimo Voutilainen

JOUKOT

Jos joukolla ei ole algebrallista tai topologista rakennetta, sille on hieman vaikea kuvitella erityispisteitä. *Algebrallinen struktuuri* tuo mukanaan laskutoimituksen tai parikin laskutoimitusta, ja niiden avulla voidaan määritellä joukon laskutoimituksen suhteen neutraalialkio, jota voidaan hyvin kutsua erityispisteeksi. Tunnetusti *nolla* on yhteenlaskun neutraaliako ja *ykkönen* kertolaskuin neutraalialkio, kunhan 0/1 kuuluvat annettuun joukkoon. Yhteenlasku on määritelty mm. puoliryhmässä, ryhmässä ja Abelin ryhmässä laskutoimituksen ominaisuuksien lisääntyessä tässä järjestyksessä, ja toisena laskutoimituksena mukaan tulee kertolasku mm. renkaissa ja kunnissa, ja sen ominaisuudet lisääntyvät edellisestä jälkimmäiseen siirryttäessä. Nolla on oikeastaan myös kertolaskun erityispiste, vaikka ei olekaan neutraalialkio. Nollahan ”mitätöi” eli nollaa toisen kerrottavan, on se mikä hyvänsä.

Topologinen struktuuri johtaa lukuisiin joukon erityispisteisiin. Ne perustuvat avoimen joukon käsitteeseen, joka on topologian peruskäsite. Erityispisteitä ovat mm. joukon sisäpiste, ulkopiste, reunapiste, kasautumispiste, kosketuspiste ja erakkopiste. Piste on joukon (tarkemmin sanottuna topologisen avaruuden osajoukon) *sisäpiste*, jos sillä on avoin ympäristö, joka kokonaisuudessaan sisältyy joukkoon. Piste on taas joukon *ulkopiste*, jos sillä on avoin ympäristö, joka kokonaisuudessaan sisältyy joukon komplementtiin. Piste on joukon *reunapiste*, jos se ei ole sen sisä- eikä ulkopiste. Joukon *kasautumispisteellä* tarkoitetaan sellaista pistettä, jonka jokaisessa ympäristössä on jokin toinen joukon piste. Topologisen avaruuden X osajoukon A *kosketuspisteellä* tarkoitetaan sellaista pistettä $x \in X$, että kaikki pisteen x ympäristöt sisältävät ainakin yhden A:han kuuluvan pisteen. Pisteen x ei ole välttämätöntä kuulua A:han. Jokainen kasautumispiste on samalla kosketuspiste, mutta joukolla saattaa olla myös *erakkopisteitä*, jotka kuuluvat joukkoon ja ovat myös sen kosketuspisteitä, mutta eivät kasautumispisteitä. Tämän osoittaminen on helppo harjoitustehtävä lukijalle.

Sumeiden joukkojen teoriassa joukkoon täydellisesti kuuluvien pisteiden (kuulumisaste 1) ja täysin kuulumattomien pisteiden (kuulumisaste 0) voidaan katsoa olevan ko. joukon erityispisteitä.

FUNKTIOT

Seuraavassa käsitellään funktioiden erityispisteitä, joita voidaan määritellä todella lukuisasti. Otamme esille seuraavat: Ääriarvopisteet, käännepisteet, jatkuvuuspisteet, derivoituvuuspisteet, singulaaripisteet, analyyttiset pisteet, kiintopisteet ja tasapainopisteet.

Yhden muuttujan funktioiden *ääriarvopisteitä* (maksimit ja minimit) ja *käännepisteitä* käsitellään lukion matematiikan kurssissa. Oleellinen kysymys minimin tai maksimin haussa on se, onko löydetty piste lokaali vai globaali ääriarvokohta vai ei kumpaakaan. Ensimmäisen derivaatan nollaantuminen ja toisen derivaatan merkkitarkastelu tulevat avuksi, jos funktio on ko. pisteessä ylipäänsä derivoituva eli differentioituva. Toinen derivaatta paljastaa tällöin myös käännepisteen olemassaolon. Ääriarvotehtävä monimutkaistuu, jos funktio ei ole jossakin pisteessä *jatkuva* tai *derivoituva*. Yhden muuttujan skalaarifunktion tapauksessa ääriarvojen haku perustuu paljolti derivaatan nollakohtien hakuun. Funktio voi tunnetusti olla jossakin pisteessä jatkuva, mutta ei derivoituva. Käyvän alueen reunat ym. erityispisteet tutkitaan erikseen. Ääriarvojen hakuun on myös numeerisia menetelmiä, kuten Newtonin menetelmä. Newtonin algoritmi suppenee (mahdollisesti lokaaliin) ääriarvopisteeseen yleensä hyvin nopeasti.

Pistettä, jossa funktio ei ole rajoitettu eli jossa funktio saavuttaa mielivaltaisen suuren tai pienen arvon, kutsutaan usein funktion *singulaaripisteeksi*. Kompleksimuuttujan funktion tapauksessa piste on myös erityispiste, kun funktio on siinä derivoituva, ts. kompleksinen derivaatta on olemassa ko. pisteessä.

Useamman muuttujan funktioiden ääriarvojen haku kuuluu yliopiston matematiikan opintoihin. Skalaarifunktion tapauksessa funktion derivaatan yleistyksenä toimii vektoriarvoinen *gradientti*, joka koostuu funktion osittaisderivaatoista. Gradientin yhtyessä nollavektoriin on löydetty ehdokas ääriarvoksi siististi käyttäytyvän funktion tapauksessa. Käyvän alueen reunat ym. erityispisteet tutkitaan tässäkin tapauksessa erikseen. Toisen derivaatan yleistyksenä on *Hessen matriisi*. jonka ominaisuuksista voidaan tehdä päätelmiä mahdollisen ääriarvon luonteesta. Useamman muuttujan vektoriarvoisen funktion tarkastelu mutkistuu edelleen. Ääriarvotehtävä on tällöin monitavoite-optimointitehtävä. Gradientin yleistyksenä toimii nyt *Jacobin matriisi*, joka koostuu funktion kaikkien osakomponenttien kaikista osittaisderivaatoista. Jacobin matriisia käytetään ääriarvojen haun lisäksi monissa muissa numeerisen matematiikan sovelluksissa kuten esim. yhtälöryhmien ratkaisemisessa. Useinkaan sellaista pistettä (vektoria) ei löydy, joka olisi haettu ääriarvokohta kaikkien optimoitavan funktion komponenttien osalta. Tällöin joudutaan tyytymään kompromissiin.

Olkoon f kuvaus joukolta A joukolle A. Piste $x \in A$ on funktion f *kiintopiste*, jos $f(x) = x$. Kiintopiste ei ole aina yksikäsitteinen, vaan kiintopisteitä voi olla jopa ääretön määrä. Toisaalta kiintopisteitä ei yleisessä tapauksessa tarvitse olla lainkaan. Kiintopistelauseet kertovat kiintopisteen tai -pisteiden olemassaolosta tiettyjen ehtojen vallitessa. Kiintopiste määritellään usein Euklidista avaruutta yleisemmissä avaruuksissa kuten Banachin avaruudessa tai Hilbertin avaruudessa, joskus jopa yleisessä topologisessa avaruudessa, jossa ei ole määritelty etäisyyttä (Raj ja Piramatchi, 2020).

Olkoon edelleen H reaalinen Hilbertin avaruus ja olkoon C epätyhjä, suljettu ja konveksi H:n osajoukko. Olkoon B kuvaus $C \times C \rightarrow R$, missä R on reaalilukujen joukko. Tasapainoprobleemassa kuvaukselle $B : C \times C \rightarrow R$ on löydettävä joukon C piste x, jolle toteutuu $B(x, y) \geq 0 \ \forall \ y \in C$. Jos tällainen x löytyy, sitä kutsutaan B:n *tasapainopisteeksi*.

ERÄITÄ ERITYISPISTEIDEN SOVELLUKSIA

Aluksi käsittelemillämme joukkojen algebrallisilla ja topologisilla erityispisteillä ei ole suoria sovelluksia. Ne ovat sen sijaan täysin fundamentaalisia elementtejä matematiikassa.

Funktioiden erityispisteistä ääriarvojen haulla on lukemattomia sovelluksia eri toimialoilla, kuten arvata saattaa. Lineaarisella optimoinnilla on runsaasti sovelluksia mm. tuotannon suunnittelun alalla, ja viimeisen parinkymmenen vuoden aikana epälineaarisen optimoinnin tutkimus on lisääntynyt ja sovelluskohteet laajentuneet.

Käytännössä ääriarvojen haussa voidaan harvoin edetä laskemalla funktion derivaattoja tai osittaisderivaattoja, ja funktion arvojakaan ei välttämättä tunneta kaikissa pisteissä. Tällöin on käytettävä numeerisia menetelmiä. Niitä on sovellettu moniin tieteellisiin ja teknisiin ongelmiin. Esimerkkejä ovat silta- ja lentokonerakenteet (laskennallinen fysiikka ja laskennallinen nesteiden dynamiikka), sääennustukset, ilmastomallit, molekyylianalyysi ja molekyylien suunnittelu (laskennallinen kemia) ja öljyesiintymien etsintä. Itse asiassa supertietokoneita käytetään jatkuvasti numeerisen analyysin sovelluksiin.

Tämän seurauksena tehokkuudella on suuri merkitys, ja teoreettisesti täsmällisen menetelmän voi joskus korvata nopeampi heuristinen menetelmä. Hyvänä esimerkki on kauppamatkustajan probleema, jonka todistettavasti oikean ratkaisun etsiminen on lähes varmasti mahdotonta kohtuullista kokoa suuremmilla lähtötiedoilla. Kauppamatkustajan probleema onkin kuuluisa esimerkki ongelmista, joita kutsutaan NP-täydellisiksi. Näiden ongelmien polynomisen ratkaisun olemassaolo on yleisessä tapauksessa teoreettisesti avoinna mutta sen löytymistä pidetään äärettömän epätodennäköisenä (Voutilainen, 1981, 1982). Yleisesti numeerisessa analyysissä käytetään empiirisiä tuloksia uusien menetelmien ja ongelmien tutkimiseen, mutta tietenkin siinä myös sovelletaan matemaattisia aksioomia, lauseita ja todistuksia.

Kiintopisteprobleemassa on ensinnäkin selvitettävä, onko annetulla funktiolla kiintopiste tai kiintopisteitä, ja jos on, mikä tai mitkä ne ovat. Samoin määritellään tasapainoprobleema.

Kiintopisteprobleemoilla ja tasapainoprobleemoilla on eräänlainen dualistinen suhde, sillä ratkaisemalla tasapainoprobleeman ratkaisee usein samalla vastaavan kiintopisteprobleeman (Voutilainen, 2023a). Nash on käyttänyt legendaarisissa peliteoriaa käsittelevissä töissään (Nash 1950, 1951) todistuksissa Browerin ja Kakutanin kiintopistelauseita.

Kiintopisteteorialla on runsaasti mielenkiintoisia sovelluksia sekä vakuutusalalle että yleisemmin finanssialalle, ks. Voutilainen (2023b). Näitä ovat mm.

- riskiteoreettiset arviot ja riskimallinnus
- vakuutusmarkkinoiden dynamiikka
- talletusvakuutus
- säästövakuutuksen hinnoittelu
- vakuutuksen säätöteoreettiset aspektit
- hoivavakuutus

- vahinkovakuutuksen hinnoittelu
- optimointikysymykset kotitaloudessa
- jälleenvakuutuspeli
- finanssisysteemit
- dynaamiset systeemit
- pankkiverkostot
- sovellukset rahoituksen teorioihin

Kiintopistelauseet ovat tärkeitä sekä matematiikan teorian että sovellusten kannalta. Kiintopistealgoritmit, jotka perustuvat kiintopisteen etsinnälle, ovat tärkeitä numeerisessa matematiikassa ja mm. optimoinnissa. Kiintopistealgoritmeja voidaan käyttää mm. epälineaarisen optimoinnin gradienttimenetelmän tukena, kuten Jung (2017) on osoittanut.

Tasapainomalleilla on myös runsaasti vakuutussovelluksia (ks. Voutilainen, 2022), mm. vakuutusmarkkinoiden tasapaino, jälleenvakuutus, asymmetrisen informaation asettamat haasteet vakuutusmarkkinoilla, epäsuotuisa vakuutettavien riskien valikoituminen, monopolistiset / kilpaillut vakuutusmarkkinat, talletusvakuutus, moraalikato, Internet, signalointi, mainekysymykset, lineaarinen tasapaino ja Nashin tasapaino. Taloudellisia tasapainomalleja käytetään toki muillakin kuin vakuutusmarkkinoilla. Tasapainoteoria on läheistä sukua ja oikeastaan osittain jopa päällekkäinen peliteorian kanssa. Peliteoria on myös velkaa kiintopisteteorialle (esim. Nash, 1950, 1951)

Seuraava teoreema on kiintopisteteorian ja samalla tasapainoteorian kulmakiviä:

Banachin kiintopistelause. (Banach, 1922.) Olkoon (X, d) epätyhjä täydellinen metrinen avaruus ja olkoon $f : X \to X$ avaruuden X kontraktio, toisin sanoen on olemassa reaaliluku $0 \le q < 1$ siten, että $d(f(x), f(y)) \le q d(x, y)$ kaikilla $x, y \in X$. Tällöin kuvauksella f on täsmälleen yksi kiintopiste a. Lisäksi kyseinen kiintopiste voidaan löytää seuraavasti: Olkoon x_0 avaruuden X mielivaltainen piste. Määritellään lukujono $x_n = f(x_{n-1})$, $n = 1,2,3,\ldots$ Tämä jono suppenee kohti kiintopistettä a.

Huomattava osa kiintopisteteorian tutkimuksesta viime aikoihin saakka on ollut matematiikan tutkimukselle tyypilliseen tapaan selvittää, kuinka paljon ja miten Banachin kiintopistelauseen oletuksia voidaan lieventää niin että kiintopisteen olemassaolo ja etsintäalgoritmin validiteetti säilyvät. Kontraktion olemassaoloa lievempiä käsitteitä luettelee mm. Voutilainen (2023a), s. 96. Iteroivat menetelmät Banachin kiintopistelauseen mallin mukaan ovat suosittuja kiintopiste- ja tasapainoprobleemojen ratkaisussa.

Lähdeviittaukset

Banach, S. (1922), Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales, *Fundamenta Mathematicae* 1922.

Jung, A. (2017), A Fixed-Point of View on Gradient Methods for Big Data, *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics* 3(18), 11 pp., DOI: 10.3389/fams.2017.00018

Nash, J. (1950). Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36(1), 48-49.

Nash, J. (1951) ‘Non-Cooperative Games’ *The Annals of Mathematics* 54(2), 286-295

Raj, V. and Piramatchi, T. (2020) Best proximity point theorems in topological spaces, *Journal* *of Fixed Point Theory and Applications* 22(2), doi.org/10.1007/s11784-019-0747-2

Voutilainen, R. (1981) Kauppamatkustajan probleema, lisensiaattitutkimus, Helsingin yliopisto, matematiikan laitos.

Voutilainen. R. (1982) Lineaarisen optimoinnin ellipsoidialgoritmi – teoreettinen läpimurto ei pure kauppamatkustajan probleemaan, *Arkhimedes* 34, 88-96.

Voutilainen, R. (2022) Insurance Equilibria – literature Survey, *Journal of Insurance and Financial Management* 7(3), 65-85.

Voutilainen, R. (2023a) On The Search for Solutions for Equilibrium Problems and Fixed Point Problems, *Journal of Insurance and Financial Management* 7(4), 88-99.

Voutilainen, R. (2023b) Remarks on Fixed Point Approaches to Insurance and Finance, *Journal of Insurance and Financial Management* 7(5), 10-23.

DIGIPHYSLAB — KOKEELLISTA FYSIIKKAA KÄNNYKÄLLÄ

Pekka Pirinen ja Antti Lehtinen
Jyväskylän yliopisto

Koronapandemia pakotti yliopistot ympäri maailman muuttamaan toimintatapojaan ja siirtymään etäopetukseen sukupolvelle ennennäkemättömässä laajuudessa. Erityisesti kokeellisen fysiikan kurssien osalta pakotettu etätyöskentely tuli useimmille fysiikan laitoksille puskista, eikä valmista toimivaa ratkaisua kokeellisen työskentelyn tekemiseen muualla kuin kampuksen laboratoriotilassa ollut.

Vaivaan kehitettiin lääke: Erasmus+-hanke Developing Digital Physics Laboratory Work for Distance Learning (DigiPhysLab, 3/2021—2/2023, Kuva 1), jonka pääasiallisena tavoitteena oli kehittää ja julkaista 15 huolellisesti arvioitua etätyöskentelyyn sopivaa fysiikan laboratoriokoetta valmiina käyttöön yliopistoissa ympäri maailman. Jyväskylän yliopiston fysiikan laitoksen ja yliopistonlehtori Antti Lehtisen koordinoiman hankkeen yhteistyökumppaneina toimivat Göttingenin (Saksa) ja Zagrebin (Kroatia) yliopistot.

Moderneja digitaalisia apuvälineitä, kuten älypuhelimia, hyödyntävät laboratoriotyöt tarjoavat kustannustehokkaan ja saavutettavan ratkaisun kokeellisen työskentelyn etäjärjestelyihin, kuten myös Heikkinen ym. (2021) huomasivat korona-ajan haasteita käsittelevässä kirjoituksessaan Arkhimedeen numerossa 1/2021. Ennen kaikkea digilaitteet mahdollistavat oman aineiston keräämisen tutuilla välineillä perinteisen laboratorioympäristön ulkopuolella. Klein ym. (2021) havaitsivat, että kokeelliset työt, joissa käytettiin opiskelijan itse mittaamaa aineistoa, johtivat paremmaksi koettuun oppimiseen kuin työt, joissa annettiin jonkun muun mittaamaa dataa opiskelijan analysoitavaksi. Lisäksi älylaitteiden käyttö fysikaalisten mittauksien tekemiseen voi Hochbergin ym. (2018) mukaan lisätä opiskelijoiden kiinnostusta työskentelyyn sekä mielenkiintoa tutkittavaa ilmiötä kohtaan. Digitaalisen osaamisen vaatimukset yhteiskunnassa kasvavat jatkuvasti (ks. Carretero ym., 2017), joten digitaalisten taitojen opetteluun on järkevää panostaa fysiikan opetuslaboratoriois-

Kuva 1: DigiPhysLab-projektin väkeä projektin tapaamisessa Zagrebissa joulukuussa 2022. Vasemmalta lukien Ana Sušac, Pekka Pirinen, Lucija Rončević ja Simon Lahme.

sa muulloinkin kuin vain pakotetun pandemia-ajan etätyöskentelyn aikana.

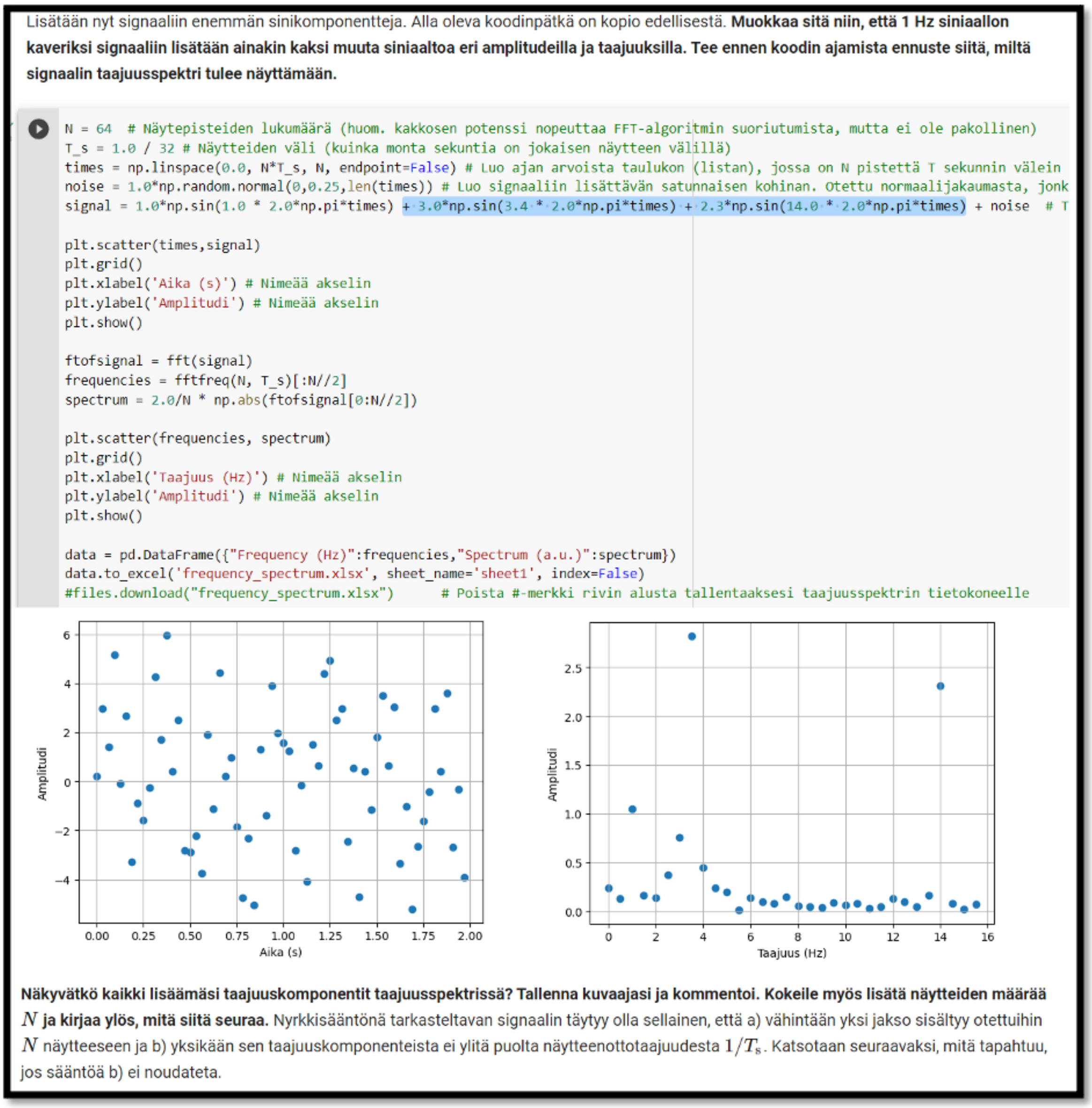
DigiPhysLab-HANKKEESSA KEHITETYT KOKEELLISET TYÖT

DigiPhysLab-hankkeessa kehitetyt kokeelliset työt seuraavat suuntausta, jossa fysiikan sisältöjen sijaan keskiöön nostetaan kokeellisen työskentelyn taidot. Esimerkiksi Walsh ym. (2022) ovat näyttäneet, että oppimistavoitteissaan eksplisiittisesti kokeellisen työskentelyn taitoihin keskittyvät laboratoriokurssit kehittävät opiskelijoiden kriittisen ajattelun taitoja sekä ohjaavat opiskelijoiden asenteita ja näkemyksiä kokeellisesta fysiikasta asiantuntijamaiseen suuntaan enemmän kuin kurssit, joilla keskitytään ensisijaisesti tai yhtäläisesti vahvistamaan fysiikan teoriasisällöllistä osaamista käytännön kautta. Jyväskylän yliopiston fysiikan laitos on kirjoitushetkellä uudistamassa perus- ja aineopintojen kokeellisen fysiikan opetustaan vastaamaan paremmin alan tuoreimman tutkimuksen viitoittamaa mallia. DigiPhysLab-hankkeen suunnittelemia laboratoriotöitä oli jo käytössä ensimmäisellä uuden kokeellisen fysiikan kokonaisuuden pilottikurssilla syksyllä 2022.

Suurin osa DigiPhysLab-hankkeen kokeellisista töistä on suunniteltu sellaisenaan toimivaksi osana yliopistofysiikan perusopintojen laboratoriokursseja ja useat ideat ovat helpohkosti muokattavissa myös lukio-opetukseen sopivaksi tai demonstraatioksi. Muutama työ vaatii hieman enemmän valmiita kokeellisen työskentelyn taitoja tai matemaattisia valmiuksia. Kaikki kehitetyt kokeelliset työt on pilotoitu opiskelijoiden kanssa, ja havaintojen pohjalta laadimme jokaisesta työstä erillisen opettajan version, johon on kerätty vinkkejä töiden toteutukseen sekä erilaisiin variaatioihin.

Esittelemme tässä artikkelissa kaksi esimerkkiä DigiPhysLab-töistä. Digitaalinen signaalinkäsittely (Digital Signal Processing) -nimellä kulkeva kokeellinen työ perehdyttää digitaalisen signaalinkäsittelyn perusteisiin ja erityisesti diskreetin Fourier-muunnoksen käyttöön kiihtyvyysanturipohjaisen värinäanalyysin kautta. Työssä opiskelija valitsee tutkittavaksi jonkin oletettavasti jaksollisesti värähtelevän signaalin, suunnittelee ja toteuttaa puhelimen kiihtyvyysanturilla sopivat mittaukset ja määrittää signaalissa esiintyvät taajuuskomponentit. Tutkittava signaali voi olla esimerkiksi puhelimen värinähälytys, pesukoneen linkous, sydämen syke tai jokin muu opiskelijan itse keksimä kohde.

Oleellinen osa Digitaalinen signaalinkäsittely -työtä on vuorovaikutteinen Jupyter notebook -työohje, joka esittelee esimerkkien ja pienten



Lisätään nyt signaaliin enemmän sinikomponentteja. Alla oleva koodinpätkä on kopio edellisestä. **Muokkaa sitä niin, että 1 Hz siniaallon kaveriksi signaaliin lisätään ainakin kaksi muuta siniaaltoa eri amplitudeilla ja taajuuksilla. Tee ennen koodin ajamista ennuste siitä, miltä signaalin taajuusspektri tulee näyttämään.**

```
N = 64  # Näytepisteiden lukumäärä (huom. kakkosen potenssi nopeuttaa FFT-algoritmin suoriutumista, mutta ei ole pakollinen)
T_s = 1.0 / 32 # Näytteiden väli (kuinka monta sekuntia on jokaisen näytteen välillä)
times = np.linspace(0.0, N*T_s, N, endpoint=False) # Luo ajan arvoista taulukon (listan), jossa on N pistettä T sekunnin välein
noise = 1.0*np.random.normal(0,0.25,len(times)) # Luo signaaliin lisättävän satunnaisen kohinan. Otettu normaalijakaumasta, jonk
signal = 1.0*np.sin(1.0 * 2.0*np.pi*times) + 3.0*np.sin(3.4 * 2.0*np.pi*times) + 2.3*np.sin(14.0 * 2.0*np.pi*times) + noise  # T

plt.scatter(times,signal)
plt.grid()
plt.xlabel('Aika (s)') # Nimeää akselin
plt.ylabel('Amplitudi') # Nimeää akselin
plt.show()

ftofsignal = fft(signal)
frequencies = fftfreq(N, T_s)[:N//2]
spectrum = 2.0/N * np.abs(ftofsignal[0:N//2])

plt.scatter(frequencies, spectrum)
plt.grid()
plt.xlabel('Taajuus (Hz)') # Nimeää akselin
plt.ylabel('Amplitudi') # Nimeää akselin
plt.show()

data = pd.DataFrame({"Frequency (Hz)":frequencies,"Spectrum (a.u.)":spectrum})
data.to_excel('frequency_spectrum.xlsx', sheet_name='sheet1', index=False)
#files.download("frequency_spectrum.xlsx")      # Poista #-merkki rivin alusta tallentaaksesi taajuusspektrin tietokoneelle
```


Näkyvätkö kaikki lisäämäsi taajuuskomponentit taajuusspektrissä? Tallenna kuvaajasi ja kommentoi. Kokeile myös lisätä näytteiden määrää N ja kirjaa ylös, mitä siitä seuraa. Nyrkkisääntönä tarkasteltavan signaalin täytyy olla sellainen, että a) vähintään yksi jakso sisältyy otettuihin N näytteeseen ja b) yksikään sen taajuuskomponenteista ei ylitä puolta näytteenottotaajuudesta $1/T_s$. Katsotaan seuraavaksi, mitä tapahtuu, jos sääntöä b) ei noudateta.

Kuva 2: Kuvakaappaus Digitaalinen signaalinkäsittely -työn notebook-työohjeesta (muokattu hieman tilan säästämiseksi). Opiskelijalle osoitetut ohjaavat tehtävät on esitetty lihavoidulla fontilla ja tehtävässä pyydetty muokkaus koodiin on korostettu sinisellä. Kuvaajissa esitetty kolmen eri taajuudella ja amplitudilla heilahtelevan sinifunktion ja satunnaisen kohinan muodostamasta signaalista otettu tarkastelujakso (vasemmalla) ja siitä diskreetin Fourier-muunnoksen avulla määritetty taajuusspektri (oikealla).

tehtävien kautta tarvittavat digitaalisen signaalinkäsittelyn peruskäsitteet, antaa välineitä datan käsittelyyn Python-ohjelmointia hyödyntäen sekä ohjaa aineiston analyysiin diskreetin Fourier-muunnoksen avulla. Pyrimme rakentamaan työohjeen siten, että aiempaa ohjelmointikokemusta ei tarvita, vaan notebook-työohje (Kuva 2) selittää esitetyt koodinpätkät auki rivi riviltä, kun niitä käytetään ensimmäisen kerran. Työssä ei keskitytä matemaattisiin tai ohjelmointiteknisiin yksityiskohtiin, vaan tavoitteena on saavuttaa intuitiivinen ymmärrys siitä, mitä diskreetin Fourier-muunnoksen avulla voidaan tehdä. Lisäksi opiskelija pääsee käyttämään diskreettiä Fourier-muunnosta helposti ymmärrettävän arkipäivän ilmiön mittaamiseen.

Toinen esimerkki liittyy fysikaalisten mallien testaamiseen. Kun pullon suuaukon yli puhalletaan sopivalla tavalla, saadaan aikaan tasainen soiva ääni, jonka taajuutta voidaan muuttaa lisäämällä pulloon vettä. Miten tätä ilmiötä tulisi mallintaa? Usein puoliavoimeen putkeen muodostuvista seisovista aalloista puhuttaessa annetaan esimerkkinä pullosta puhaltamalla saatava ääni. Toisaalta pulloa voidaan mallintaa myös Helmholtzin resonaattorina, jossa pullon kaulassa oleva ”ilmakorkki” värähtelee tietyllä resonanssitaajuudella pullon vatsassa olevan ilman joustavuutta vasten.

Pullon mallinnus (How to model a bottle?) -työssä opiskelijoille annetaan puoliavoin putki -mallista ja Helmholtzin resonaattori -mallista johdetut lausekkeet pullosta puhaltamalla saatavan äänen taajuudelle. Tehtävänä on verrata mallien antamia ennusteita puhelimen avulla mitattuihin taajuuksiin sekä pohtia erityisesti mallien rajoja. Huomionarvoista työssä on, että tutkimuksen tulos ei ole minkään tunnetun arvon mittaaminen, vaan pikemminkin perusteltu havainto siitä, miten juuri sinun valitsemaasi pulloa ja siitä saatavaa ääntä voidaan mallintaa. Työtä pilotoidessamme havaitsimme, että opiskelijat usein kyseenalaistavat ennemmin omat mittauksensa ja menetelmänsä kuin mallin antamat ennusteet. Työn kautta voidaan alustaa hyviä keskusteluja mallien roolista kokeen suunnittelemisessa ja tulosten tulkitsemisessa sekä mallien rajojen ja rajoitteiden tunnistamisesta.

Kaikki DigiPhysLab-hankkeen julkaisemat 15 kokeellista työtä, digitaalisia apuvälineitä hyödyntävien laboratoriotöiden kehittämiseksi laadittu arviointikysely sekä modernien fysiikan kokeellisten töiden suunnittelun tueksi kehitetty viitekehys löytyvät projektin verkkosivuilta osoitteesta https://jyu.fi/digiphyslab.

Viitteet

Carretero, S., Vuorikari, R. & Punie, Y. (2017). DigComp 2.1: The Digital Competence Framework for Citizens. With eight proficiency levels and examples of use. Luxembourg: Publications Office of the European Union.

Heikkinen, L., Kontro, I., Koskinen, P., Maunuksela, J., Saarelainen, M., Tuominen, K. (2021). Arkhimedes 1/2021, s. 16–26.

Hochberg, K., Kuhn, J. & Müller, A. (2018). Journal of Science Education and Technology 27, 385–403.

Klein, P., Ivanjek, L., Dahlkemper, M. N., Jeličić, K., Geyer, M.-A., Küchemann, S. & Sušac, A. (2021). Phys. Rev. Phys. Educ. Res. 17, 010117.

Walsh, C., Lewandowski, H. J. & Holmes, N. G. (2022) Phys. Rev. Phys. Educ. Res. 18 1, 010128.

Konforminen Sobolev-kohomologiateoria ja sen sovelluksia

Ilmari Kangasniemi

Kvasisäännöllisten ja muiden avaruutta rajoitetusti vääristelevien kuvausten tutkimuksessa on jo pitkään yhdistelty analyysin ja topologian työkaluja. Yhtenä ilmentymänä tästä olen viime aikoina päätynyt soveltamaan konformista Sobolev-de Rham -kohomologiaa alan tutkimukseen. Konformisen kohomologian perusideat on tunnettu jo Donaldsonin ja Sullivanin kvasikonformisista 4-monistoista kirjoittamassa artikkelissa [3], mutta konformikohomologian suora käyttö on silti ollut rajallisempaa ennen teorian viimeaikaisia sovelluksia. Esittelen tässä kirjoitelmassa lyhyesti, mistä konformisessa kohomologiassa oikein on kyse ja mitä sen avulla on lähivuosina saavutettu.

De Rhamin lause

Algebrallinen topologia pyrkii erottelemaan topologisia avaruuksia algebran keinoin. Tässä ideana on esimerkiksi yhdistää jokaiseen topologiseen avaruuteen X ryhmä $G(X)$, ja jokaiseen jatkuvaan kuvaukseen $f\colon X \to Y$ homomorfismi $f_*\colon G(X) \to G(Y)$ siten, että konstruktio säilyttää funktioiden yhdistämisen ja identtiset kuvaukset. Konstruktiosta seuraa, että homeomorfismi $h\colon X \to Y$ indusoi isomorfismin $h_*\colon G(X) \to G(Y)$. Jos siis jotenkin saadaan pääteltyä, että $G(X)$ ja $G(Y)$ eivät ole isomorfiset, saadaan osoitettua, että X ja Y eivät ole keskenään homeomorfiset.

Yksi tunnetuimpia esimerkkejä tämänlaisesta konstruktiosta ovat *singulaariset homologia- ja kohomologiaryhmät* $H_k(X;\mathbb{K})$ ja $H^k(X;\mathbb{K})$, missä k on ei-negatiivinen kokonaisluku ja $\mathbb{K}$ on kerroinrengas, kuten esimerkiksi $\mathbb{Z}$ tai $\mathbb{R}$. Nämä ryhmät ovat $\mathbb{K}$-moduleja, jotka tietyssä mielessä laskevat k-ulotteisia reikiä annetussa avaruudessa X. Eritoten tapauksessa $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ryhmät $H_k(X;\mathbb{R})$ ja $H^k(X;\mathbb{R})$ ovat vektoriavaruuksia, joiden dimensio vastaa avaruuden X k-ulotteisten reikien määrää. Esimerkiksi jos $X = \mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_l\}$, missä pisteet x_i ovat erillisiä, niin $H_{n-1}(X;\mathbb{Z}) \cong H^{n-1}(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^l$ ja $H_{n-1}(X;\mathbb{R}) \cong H^{n-1}(X;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^l$.

Jokaiseen jatkuvaan kuvaukseen $f\colon X \to Y$ voidaan liittää homologiaryhmien välinen kuvaus $f_*\colon H_k(X;\mathbb{K}) \to H_k(Y;\mathbb{K})$. Kohomologian tapauksessa sen sijaan saadaan vastakkaissuuntainen kuvaus $f^*\colon H^k(Y;\mathbb{K}) \to H^k(X;\mathbb{K})$. Indusoitujen kuvausten ominaisuuksista seuraa, että jos avaruuksien X ja Y homologia- tai kohomologiaryhmät eivät ole keskenään isomorfisia, niin tällöin X ja Y eivät ole homeomorfiset. Kohomologia-avaruuksilla voidaan lisäksi määritellä nk. *kuppitulo* $\cup$, joka tekee $H^*(X;\mathbb{K})$:sta renkaan.

Klassinen *de Rhamin lause* kertoo, että jos avaruus X on sileä monisto M, niin kohomologiaryhmät $H^k(M;\mathbb{R})$ voidaan myös itse asiassa konstruoida täysin analyysin avulla. Tätä varten olkoon $C^\infty(\wedge^k T^*M)$ sileiden k-differentiaalimuotojen avaruus M:llä. Tällöin differentiaalimuotojen ulkoderivaatta antaa kuvausjonon

$$\{0\} \to C^\infty(\wedge^0 T^*M) \xrightarrow{d} C^\infty(\wedge^1 T^*M) \xrightarrow{d} \dots,$$

missä $d \circ d = 0$. Moniston M k:nnes *de Rhamin kohomologia* on tällöin tekijävektoriavaruus

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) = \ker(d_k)/\operatorname{im}(d_{k-1}),$$

missä d_i:llä merkitään sileiden i-muotojen ulkoderivaattaa. Lisäksi kohomologian kuppitulo saadaan itse asiassa muotojen ulkotulosta kaavalla $[\omega_1] \cup [\omega_2] = [\omega_1 \wedge \omega_2]$, ja jos $f\colon M \to N$ on sileä kuvaus, niin kuvaus $f^*\colon H^k(N;\mathbb{R}) \to H^k(M;\mathbb{R})$ saadaan suoraan differentiaalimuotojen pullback-kuvauksesta kaavalla $f^*[\omega] = [f^*\omega]$.

De Rhamin lauseen mukaan $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ ja $H^k(M;\mathbb{R})$ ovat siten luonnollisella tavalla isomorfiset sekä vektoriavaruuksina että renkaina. Näin ollen analyysin avulla konstruoitu $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ oikeasti laskeekin avaruuden topologista ominaisuutta.

Siirtyminen Sobolev-teoriaan

De Rhamin kohomologia soveltuu erinomaisesti sileiden kuvauksien topologisten ominaisuuksien tutkimiseen. Mutta entä jos kuvaus f ei olekaan sileä?

Osoittautuu, että vastaavanlaisen teorian pystyy konstruoimaan myös Sobolev-säännöllisille differentiaalimuodoille. Nimittäin jos ω on lokaalisti integroituva mitallinen k-muoto n-monistolla M, niin sen *heikko ulkoderivaatta* $d\omega$ voidaan määritellä vaatimalla, että

$$\int_M d\omega \wedge \eta = (-1)^{k+1} \int_M \omega \wedge d\eta$$

kaikilla kompaktikantajaisilla sileillä $(n-k-1)$-testimuodoilla η.

Heikon ulkoderivaatan avulla saadaan aikaiseksi muodoille Sobolev-avaruus: määrittelemme, että $\omega \in W^{d,p,q}(\wedge^k T^*M)$ (tai $\omega \in W^{d,p,q}_{\mathrm{loc}}(\wedge^k T^*M)$), jos funktio $|\omega|$ on (lokaalisti) L^p-integroituva, ja ω:lla on heikko ulkoderivaatta $d\omega$ jolle $|d\omega|$ on (lokaalisti) L^q-integroituva. Heikoille ulkoderivaatoille pätee aina $dd\omega = 0$, ja siten voimme muodostaa samanlaisen ketjukompleksin kuin sileässä tapauksessa:

$$\{0\} \to W^{d,p_0,p_1}_{\mathrm{loc}}(\wedge^0 T^*M) \xrightarrow{d} W^{d,p_1,p_2}_{\mathrm{loc}}(\wedge^1 T^*M) \xrightarrow{d} \dots,$$

missä eksponentit p_k ovat jotain reaalilukuja väliltä $[1,\infty]$.

Osoittautuu, että Sobolev-versio tästä de Rhamin kompleksista tuottaa tiettyjen ehtojen toteutuessa täysin identtiset kohomologia-avaruudet kuin sileä versio. Tämän taustalla on sama koneisto joka todistaa alkuperäisen de Rhamin lauseen: nimittäin lyhteet ja lyhdekohomologia, joiden yksityiskohtiin emme suuremmin ehdi paneutua tässä kirjoitelmassa. Koneisto vaatii muutamia ehtoja avaruuksiltamme, joista yksi on se, että jonomme avaruudet ovat oleellisesti lokaalisti määriteltyjä. Globaalien avaruuksien $W^{d,p_k,p_{k+1}}(\wedge^k T^*M)$ käyttäminen näet johtaa täysin erilaiseen teoriaan, jossa kohomologia-avaruuksien laskeminen on huomattavasti hankalampaa, jos M on epäkompakti.

Toinen kriittinen ehto sille, että saataisiin samat kohomologia-avaruudet kuin sileässä tapauksessa, palautuu lopulta siihen, että eksponenteille p_k pätee differentiaalimuotoversio *Sobolev-Poincarén epäyhtälöstä*:

$$\|\omega - \omega_D\|_{L^{p_k}(D)} \leq C_{p_k,p_{k+1},D} \|d\omega\|_{L^{p_{k+1}}(D)},$$

missä D on riittävän sileä rajoitettu $\mathbb{R}^n$:n alue, $\omega \in W^{d,p_k,p_{k+1}}(\wedge^k D)$ ja $\omega_D \in dW^{d,p_k,p_k}(\wedge^{k-1} D)$ on ω:sta riippuva muoto. Tämä epäyhtälö pätee eksponenteille $p_k, p_{k+1} \in (1,\infty)$, jos ne toteuttavat ehdon $p_k^{-1} + n^{-1} \geq p_{k+1}^{-1}$. Rajaeksponenteilla $p_k = \infty$ ja $p_{k+1} = 1$ kuitenkin vaaditaan hieman vahvempi ehto $p_k^{-1} + n^{-1} > p_{k+1}^{-1}$. Yksityiskohtainen käsittely muotojen Sobolev-Poincarén epäyhtälöstä löytyy mm. artikkelista [5].

Konforminen kohomologia ja kvasisäännölliset kuvaukset

Jos M, N ovat reunattomia suunnistettuja Riemannin n-monistoja, niin jatkuva Sobolev-kuvaus $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(M,N)$ on *kvasisäännöllinen*, jos se toteuttaa epäyhtälön

$$|Df|^n \leq KJ_f$$

melkein kaikkialla, missä $K \in [1,\infty)$ on vakio. Ehto on yleistys holomorfisuudesta ja johtaa teoriaan, jossa on vastineita useille kompleksianalyysin lauseille. Differentiaalimuotojen kannalta kriittisin kvasisäännöllisten kuvausten ominaisuus on, että jos $f\colon M \to N$ on kvasisäännöllinen ja $\omega \in L^{n/k}_{\mathrm{loc}}(\wedge^k N)$, niin $f^*\omega \in L^{n/k}_{\mathrm{loc}}(\wedge^k M)$. Lisäksi jos $\omega \in W^{d,n/k,n/(k+1)}_{\mathrm{loc}}(\wedge^k T^*N)$, niin $f^*d\omega = df^*\omega$. Siten luonnollisimmin kvasisäännöllisiin kuvauksiin sopiva Sobolev-de Rham -kohomologiateoria käyttää eksponentteja $p_k = n/k$.

Nämä eksponentit $p_k = n/k$ toteuttavat juuri ja juuri edellämainitun Sobolev-Poincarén epäyhtälön kun $k \in \{1, \dots, n-2\}$. Rajaeksponenteilla $p_0 = \infty$ ja $p_n = 1$ epäyhtälö ei kuitenkaan aivan toimi. Tätä ongelmaa voi kuitenkin halutessaan ryhtyä korjaamaan hyödyntämällä kvasisäännöllisten kuvausten korkeampaa integroituvuutta: jos f on kvasisäännöllinen, niin itse asiassa $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(M,N)$ jollekin $p > n$. Tämän avulla on mahdollista laajentaa tai supistaa joitakin L^p-integroituvuusehtoja kompleksissa hieman, ja silti pysyä luokassa joka säilyy kvasisäännöllisten kuvausten pull-backissa. Esimerkkejä tällaisista muokkauksista löytyy artikkeleista [3] ja [9]. Artikkelin [3] muokkaukset säilyttävät myös sen ominaisuuden, että kohomologian kuppitulo $\cup$ saadaan laskettua muotojen ulkotulolla $\wedge$. Toisaalta artikkelin [9] muokkaukset säilyttävät $W^{d,n/k,n/(k+1)}_{\mathrm{loc}}$-avaruudet muuttumattomina mahdollisimman suuressa osassa kompleksia.

Näitä muokattuja Sobolev-de Rham -kohomologiateorioita voidaan kollektiivisesti kutsua *konformisiksi kohomologiateorioiksi*, ja niiden yhteispeli kvasisäännöllisten kuvausten kanssa on suunnilleen yhtä sujuvaa kuin alkuperäisen de Rhamin kohomologian yhteispeli sileiden kuvausten kanssa.

Erittelemme nyt tämän kohomologian sovelluskohteita kvasisäännöllisten ja muiden samankaltaisten kuvausten tutkimuksessa.

Kvasisäännöllinen elliptisyys

Jos kvasisäännöllinen kuvaus $f\colon M \to N$ on *ankara* (engl. "proper"), eli jos $f^{-1}K$ on kompakti jokaiselle kompaktille $K \subset N$, niin pull-backille $f^*\colon L^{n/k}_{\mathrm{loc}}(\wedge^k N) \to L^{n/k}_{\mathrm{loc}}(\wedge^k M)$ voidaan määritellä toispuoleinen käänteiskuvaus $f_*\colon L^{n/k}_{\mathrm{loc}}(\wedge^k M) \to L^{n/k}_{\mathrm{loc}}(\wedge^k N)$ siten, että $f_* d = d f_*$ ja $f_* f^* = \mathrm{id}$. Tällöin erityisesti $f^*\colon H^*(N;\mathbb{R}) \to H^*(M;\mathbb{R})$ on injektiivinen. Huomattavaa on, että jos M and N ovat suljettuja monistoja (eli kompakteja reunattomia monistoja), niin f on automaattisesti ankara. Teoria antaa siten välittömän rajoitteen suljettujen monistojen välisille kvasisäännöllisille kuvauksille: sellainen kuvaus $f\colon M \to N$ voi olla olemassa vain, jos $H^*(N;\mathbb{R})$ on isomorfismia vaille $H^*(M;\mathbb{R})$:n aliavaruus.

Teorian soveltaminen tulee kuitenkin huomattavasti hankalammiksi kun M on epäkompakti, sillä tällöin kuvauksesta f^* ei pysty suoraan sanomaan mitään samankaltaista kuin suljettujen monistojen tapauksessa ilmenevä injektiivisyys. Tässä kontekstissa eniten tutkittu kysymys on, että mille yhtenäisille kompakteille suunnistetuille monistoille N on olemassa vakiosta poikkeava kvasisäännöllinen kuvaus $f\colon \mathbb{R}^n \to N$. Tällöin N:n sanotaan olevan *kvasisäännöllisesti elliptinen*.

Merkittäviä kohomologisia rajoitteita kvasisäännöllisesti elliptisille monistoille ovat osoittaneen ensin Bonk ja Heinonen [2], ja sittemmin Prywes [11]. Prywesin vihdoin saavuttama tulos on, että jos N on kvasisäännöllisesti elliptinen, niin kohomologia-avaruus $H^*(N;\mathbb{R})$ on $H^*(\mathbb{T}^n;\mathbb{R})$:n vektorialiavaruus, missä $\mathbb{T}^n$ on n-torus. Näissä tuloksissa ei ole suoraan käytetty Sobolev-kohomologiateorioita, mutta Sobolev-kohomologian perusideat ovat silti huomattavassa roolissa todistuksissa.

Tasaisesti kvasisäännölliset kuvaukset

Sobolev-kohomologian hyödyt tulevat selvemmin ilmi tutkittaessa tasaisesti kvasisäännöllisiä kuvauksia. Kvasisäännöllinen itsekuvaus $f\colon M \to M$ on *tasaisesti kvasisäännöllinen*, jos sen jokainen iteraatti $f \circ f \circ \cdots \circ f$ on K-kvasisäännöllinen samalla K:n arvolla. Tämä on huomattavasti tavallista kvasisäännöllisyyttä vahvempaa, sillä tavallista kvasisäännöllistä kuvausta iteroidessa parhaan mahdollisen K:n arvo yleensä kasvaa.

Jos M on suljettu suunnistettu yhtenäinen Riemannin n-monisto, niin sanomme sen olevan *tasaisesti kvasisäännöllisesti elliptinen*, jos löytyy vakiosta poikkeava epäinjektiivinen tasaisesti kvasisäännöllinen $f\colon M \to M$. Tämä ominaisuus on läheisesti kytköksissä kvasisäännölliseen elliptisyyteen: jokainen tasaisesti kvasisäännöllisesti elliptinen monisto on kvasisäännöllisesti elliptinen.

Konformisen kohomologian soveltaminen tasaisesti kvasisäännöllisen elliptisyyden tutkimiseen alkoi yhteisprojektissani Pankan kanssa [9], ja jalostui edelleen kahdessa myöhemmässä julkaisussa [7, 6]. Teorian kulminaationa löytyi ensimmäinen rajoite, joka osoittaa tasaisesti kvasisäännöllisen elliptisyyden olevan aidosti kvasisäännöllistä elliptisyyttä voimakkaampi ominaisuus. Rajoite, joka ratkaisi tämän, on seuraava [6]:

Lause 1. *Olkoon M suljettu yhtenäinen suunnistettu Riemannin n-monisto. Jos M on kvasisäännöllisesti elliptinen, niin $H^*(M, \mathbb{R})$ on algebraisomorfismia vaille $\mathbb{R}^n$:n ulkoalgebran $\wedge^* \mathbb{R}^n$ alialgebra. Lisäksi tämä alialgebra on suljettu $\mathbb{R}^n$:n standardin Cliffordin tulon suhteen.*

Viimeinen Cliffordin tuloon liittyvä ominaisuus osoittautuu suureksi erontekijäksi kvasisäännöllisen ja tasaisesti kvasisäännöllisen elliptisyyden välillä. Nimittäin Rickman [12] on osoittanut, että monisto $M = (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)\#(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$ on kvasisäännöllisesti elliptinen. Clifford-tuloon perustuva rajoite taas osoittaa, että M ei voi olla tasaisesti kvasisäännöllisesti elliptinen.

Tulokset perustuvat vahvasti siihen, että tutkitaan itsekuvauksen $f^* \colon H^k(M; \mathbb{R}) \to H^k(M; \mathbb{R})$ ominaisarvoja. Kohomologiaan indusoitu kuvaus f^* näet osoittautuu kompleksisesti diagonalisoituvaksi, ja siten kohomologia-avaruudelle löytyy kompleksinen kanta kuvauksen f^* ominaisvektoreita. Toinen avain todistukseen on tutkia muotoja, joilla on minimaalinen $L^{n/k}$-normi kohomologialuokassa; nämä muodot ovat p-harmonisia arvolla $p = n/k$. Eritoten jos minimointi tehdään oikean f-invariantin (mitallisen) metriikan g_f suhteen, niin f^* itse asiassa kuvaa minimoivat muodot toisille minimoiville muodoille. Seuraa, että jokainen kompleksinen konformikohomologian ominaisvektoriluokka $c \in H^k(M; \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$ tuottaa kompleksikertoimisen muodon $\omega \in L^{n/k}(\wedge^k T^* M \otimes \mathbb{C})$, jolle $f^* \omega = \lambda \omega$. Tulokset seuraavat näiden muotojen säännöllisyysominaisuuksien tutkimisesta.

Todistus itse asiassa johtaa lopulta tilanteeseen, jossa tasaisesti kvasisäännöllisesti elliptisellä monistolla metriikan g_f suhteen (n/k)-harmoniset k-muodot muodostavat algebran. Tämä on hyvin yllättävä ja rajoittavalta vaikuttava ominaisuus: muotojen (n/k)-harmoninen yhtälö on epälineaarinen kun $k \neq 2$, mutta tasaisesti kvasisäännöllinen kuvaus silti pakottaa ratkaisut säilymään yhteenlaskussa. Tämä myös paljastaa yhteyden Kotschickin [10] määrittelemiin *geometrisesti formaaleihin monistoihin*, jotka ovat monistoja, joilla on metriikka g, jonka suhteen harmoniset muodot muodostavat algebran. Koska todistetut kohomologiset rajoitteet seuraavat itse asiassa täysin näistä (n/k)-harmonisten muotojen säilymisominaisuuksista, ollaan siis päädytty jonkinlaiseen konformivastineeseen geometrisesti formaalien monistojen teorialle.

Äärellisen väännön kuvaukset

Alkuvuodesta valmistuneessa yhteisprojektissa Onnisen kanssa on myös löytynyt sovellus konformiselle kohomologialle äärellisen väännön kuvausten teoriassa [8]. *Äärellisen väännön kuvaus* $f \colon M \to N$ on kvasisäännöllisen kuvauksen yleistys, joka toteuttaa muutoin saman ehdon $|Df|^n \leq K J_f$ melkein kaikkialla, mutta tällä kertaa $K \colon M \to [1, \infty)$ on mitallinen kuvaus. Äärellisen väännön kuvauksien teoria on hyvin samankaltainen kuin kvasisäännöllisten kuvausten, mutta tulokset vaativat jonkin minimioletuksen K:n integroituvuudesta, kuten esim. $K^p \in L^1_{\text{loc}}(M)$ tai $\exp(pK) \in L^1_{\text{loc}}(M)$ jollakin tietyllä $p \in (0, \infty)$.

Sovelluksen mielenkiinto on kuitenkin siinä, että se avaa osan äärellisen väännön kuvausten teoriaa, jolle ei ole varsinaista kvasisäännöllisten kuvausten vastinetta. Keskitymme tuloksessa nk. monotonisiin äärellisen väännön kuvauksiin: jatkuva kuvaus $f\colon M \to N$ on *monotoninen*, jos $f^{-1}\{y\}$ on yhtenäinen kaikilla $y \in N$. Vakiosta poikkeava monotoninen kvasisäännöllinen kuvaus on aina homeomorfismi. Sama pätee monotonisille äärellisen väännön kuvauksille $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, jos $K^{n-1} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Tätä pienemmillä eksponenteilla kuitenkin herää seuraava kysymys: millaisia monotonisen äärellisen väännön kuvaukset pistealkukuvat $f^{-1}\{y\}$ voivat olla kun $K^p \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ jollakin $p < n-1$?

Alkupisteen tässä antaa Henclin ja Malýn tulos [4], jonka mukaan annetulla $q \in (0, n-1]$ saamme, että $f^{-1}\{y\}$:n Hausdorff q-mitta häviää, jos $K^{(n-q)/q} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Tämä ei kuitenkaan ole ainoa rajoitus. Nimittäin Bing [1] on konstruoinut $\mathbb{R}^3$:ssa monotonisen kuvauksen, jolla on lenkkejä muodostavia pistealkukuvia. Saimme Onnisen kanssa tarkistettua, että tällä kuvauksella on äärellisen väännön Lipschitz-edustaja, jolle $K^p \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ kun $p < 1/2$.

Henclin ja Malýn rajoitus yksinään sallisi huomattavasti korkeamman integroituvuuden tämän esimerkin K:lle. Sen sijaan konforminen kohomologia paljastaa, miksi esimerkki ei voi saavuttaa ehtoa $K^{1/2} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$. Tämä näet johtuu seuraavasta rajoitteesta [8]:

Lause 2. *Jos $f\colon \Omega \to \Omega'$ on ankara monotoninen surjektiivinen äärellisen väännön kuvaus $\mathbb{R}^n$:n yhtenäisten alueiden välillä, ja jos $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, niin jokaiselle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ on olemassa sellainen rajaeksponentti $p = p(n,k) \in [0, n-1)$, että jos $K^p \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, niin $H^k(f^{-1}\mathbb{B}^n(x,r); \mathbb{R}) \cong H^k(\mathbb{B}^n(x,r); \mathbb{R})$ aina kun $\overline{\mathbb{B}^n(x,r)} \subset \Omega'$.*

Kun $k \in \{0, n-1, n\}$, niin $p = 0$ täysin topologisista syistä. Kun $n = 3$ ja $k = 1$, niin rajaeksponentti on $p = 1/2$, ja tämän rajaeksponentin tarkkuus seuraa Bingin esimerkin Lipschitz-versiosta. Yleisesti todistuksen antamat rajaeksponentit noudattavat lainalaisuutta, jonka näkee seuraavasta taulukosta. Dimensioissa $n > 3$ emme tiedä ovatko saadut rajaeksponentit tarkkoja vai eivät.

$$\begin{array}{lcccccccccc}
n=2 & 0 & 0 & 0 \\
n=3 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
n=4 & 0 & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & 0 & 0 \\
n=5 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\
n=6 & 0 & \frac{4}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & 0 & 0 \\
n=7 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{4}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\
n=8 & 0 & \frac{6}{2} & \frac{5}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{3} & 0 & 0 \\
n=9 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{6}{3} & \frac{5}{4} & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} & \frac{5}{4} & \frac{6}{3} & 0 & 0
\end{array}$$

Kuva 1: Lauseen 2 antamia rajaeksponentteja eri n:n ja k:n arvoilla.

Miten tätä rajoitetta sitten voi soveltaa pistealkukuviin $f^{-1}\{y\}$? Esimerkiksi jos $f^{-1}\{y\}$ on sileästi upotettu $\mathbb{S}^1$, niin tällöin riittävän pienillä r joukolla $f^{-1}\mathbb{B}^n(y,r)$ täytyy olla epätriviaali 1-kohomologia, oleellisesti koska $\mathbb{S}^1$:llä on myös epätriviaali 1-kohomologia. Tämä on kuitenkin mahdotonta, jos $H^1(f^{-1}\mathbb{B}^n(x,r)) \cong H^1(\mathbb{B}^n(x,r))$. Näin ollen tulos rajoittaa sellaisten $f^{-1}\{y\}$:n topologioiden esiintymistä, joiden poikkeamat yksittäisestä pisteestä näkyvät myös $f^{-1}\{y\}$:n pienissä ympäristöissä.

Rajoitteen todistus myös tuo pari uutta vivahdetta konformikohomologian soveltamiseen. Ensinnäkin todistus perustuu siihen, että saadaan ensin kuvaus f_* tavalliselta de Rhamin kohomologialta konformiselle kohomologialle, ja sitten kuvaus f^* konformiselta kohomologialta $W^{d,1,1}_{\mathrm{loc}}$-avaruuksien kohomologialle. Rajaeksponentit ovet pienimmät mahdolliset arvot, joilla nämä kuvaukset toimivat, ja kuvausten f_* ja f^* toimiminen on itse asiassa hyvin riippuvaista siitä, että käytämme välissä juuri konformista kohomologiaa.

Toinen erikoisuus on, että sama todistus tehdään sekä tavallisella kohomologialla, että *kompaktikantajaisella kohomologialla*. Nimittäin käyttämällä kompaktikantajaisia muotoja de Rham-tyyppisissä komplekseissa, saadaan kohomologia-avaruudet $H^k_c(M;\mathbb{R})$, jotka yhtenäisillä suunnistetuilla M ovat itse asiassa isomorfiset avaruuksien $H^{n-k}(M;\mathbb{R})$ kanssa. Todistus kompaktikantajaisella kohomologialla antaa paremman rajan pienillä k, kun taas todistus tavallisella kohomologialla antaa paremman rajan suurilla k. Taulukkoon kerätyt rajaeksponentit ovat siten saatu valitsemalla näistä kahdesta rajasta parempi, mikä selittää taulukon nollasta poikkeavien lukujen keskeissymmetrian.

Viitteet

[1] R. H. Bing. Decompositions of E^3. Kokoelmassa *Topology of 3-manifolds and related topics*, editoinut M. K. Fort. Prentice-Hall, 1962.

[2] M. Bonk ja J. Heinonen. Quasiregular mappings and cohomology. *Acta Math.*, 186(2):219–238, 2001.

[3] S. Donaldson ja D. Sullivan. Quasiconformal 4-manifolds. *Acta Math.*, 163(1):181–252, 1989.

[4] S. Hencl ja J. Malý. Mappings of finite distortion: Hausdorff measure of zero sets. *Math. Ann.*, 324:451–464, 2002.

[5] T. Iwaniec ja A. Lutoborski. Integral estimates for null Lagrangians. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 125(1):25–79, 1993.

[6] I. Kangasniemi. Conformally formal manifolds and the uniformly quasiregular non-ellipticity of $(\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2)\#(\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2)$. *Adv. Math.*, 393, 2021.

[7] I. Kangasniemi. Sharp cohomological bound for uniformly quasiregularly elliptic manifolds. *Amer. J. Math*, 143(4):1079–1113, 2021.

[8] I. Kangasniemi ja J. Onninen. Fibers of monotone maps of finite distortion. *J. Geom. Anal.*, 2022. Verkkojulk. ennen painoa, https://doi.org/10.1007/s12220-022-01038-3.

[9] I. Kangasniemi ja P. Pankka. Uniform cohomological expansion of uniformly quasiregular mappings. *Proc. London Math. Soc.*, 118:701–728, 2019.

[10] D. Kotschick. On products of harmonic forms. *Duke Math. J.*, 107(3):521–531, 2001.

[11] E. Prywes. A bound on the cohomology of quasiregularly elliptic manifolds. *Ann. of Math.*, 189(3):863–883, 2019.

[12] S. Rickman. Simply connected quasiregularly elliptic 4-manifolds. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 31:97–110, 2006.

KOLUMNI

AKATEMIAN JALKAVÄKI:
JOHTAAKO KORONA-AIKA LÄPINÄKYVÄMPÄÄN JA AVOIMEMPAAN TIETEESEEN?

Kalle Nordling

vieraileva meritähti Norjassa suorittamassa ilmastotutkimusta

Maailman terveysjärjestö WHO ilmoitti hiljakkoin, että koronan aiheuttama terveyshätätila on nyt virallisti ohi. Lienee syytä pohtia miten tuo muutaman vuoden ajanjakso muutti tieteen tekemistä ja tiedeyhteisöjä. Palataan ajassa aikaan ennen koronaa. Tieteen tekemisessä korostuivat instituutiot, kuten yliopistot ja tutkimuslaitokset. Pääsääntöisesti tiedeyhteisöt kokoontuivat säännöllisesti noin kerran vuodessa yhteen esittelemään omia tutkimuksiaan ja keskustelemaan mitä tehtäisiin seuraavaksi. Kokousten välillä tutkija sai lukea muiden tutkijoiden artikkeleita ja pysyi näin kärryillä siitä mitä muut tutkijakollegat tutkivat. Tämänkaltainen yhteyden pito oli toki toimiva, mutta sangen hidas.

Sitten tuli korona ja tiedeyhteisön, kuten koko ympäröivän yhteiskunnan, piti muuttaa kommunikointitapojaan. Tuli etäkokoukset, etäkonferenssit ja etäseminaarit. Etäkonferenseissa oli hankala verkostoitua mutta esitysten kuuleminen onnistui usein yhtä hyvin zoomin välityksellä kuin paikanpäälläkin, sekä oli mahdollista esittää kysymyksiä siinä missä paikanpäälläkin. Jos tarkoituksena on esittää meneillään olevaa tutkimusta tai jo tehtyä tutkimusta, niin tämä on ihan kelpo formaatti. Voisiko tätä sitten soveltaa siihen, että meillä olisi täysin virtuaalisesti toimivia tutkimusyhteisöjä?

Koronan aikana ihmiset tottuivat etätyöskentelyyn, ja moni järjesti hyvät työkalut kotitoimistoihin, jossa oli mahdollista pitää hyviä etäkokouksia. Ehkäpä osittain tämän vuoksi tutkijoidenkin on ollut helpompi hyväksyä uusia tutkimuksen esitysfoorumeita. Pandemian alkuvaiheessa ilmastotieteessä esimerkiksi syntyi “ESC cloud feedback symposio”, joka on kerran kuukaudessa pidettävä seminaari, joka on täysin avoin kaikille. Seminaari eroaa perinteisistä tiedeseminaareista siten, että myös tutkimuskentän ulkopuoliset henkilöt voivat seurata seminaarisarjaa etänä. Kerran kuukaudessa tapahtuvat kokoontumiset mahdollistavat huomattavasti nopeamman tiedon jakamisen ja uusien tutkijoiden on huomattavasti helpompi alkaa muodostamaan omia verkostoja. Etäseminaarit ovat monesti helpompia järjestää kuin fyysistä läsnäoloa vaativat tapahtumat, ja sen vuoksi niiden voisi nähdä nopeuttavan tutkimustiedon ja ajatusten vaihtoa tieteilijöiden kesken.

Hypoteettisesti voisi myös ajatella, että tämän tyyppiset avoimet seminaarit ja esimerkiksi kansalaistieteen vahvempi rooli muuttavat tutkimuksen tekemisen raameja. Tarvitaanko sitten instituutioita esimerkiksi tieteellisten työkalujen kehityksessä? Tämäkin onnistuu nykyään maailmanlaajuisesti hajautettuna erilaisten versionhallinta työkalujen avulla. Avoimen tieteen utopiamaailmassa emme enää tarvitse yhtä instituutiota ylläpitämään esimerkiksi ilmastomallia, vaan tämän voi hoitaa yhteisö, samaan tapaan kuin LINUX-käyttöjärjestelmän ydintä on kehitetty alusta alkaen.

Todennäköisesti kuitenkin instituutioiden vahva rooli tutkimuksen tekemisessä tulisi säilymään. Esimerkiksi ilmastotutkimus ei onnistu kattavasti ilman ilmastomalleja, jotka vaativat supertietokoneinfrastruktuuria ympärilleen, että niitä voidaan ajaa. Instituutiot tarjoavat myös konkreettisen työ- ja kohtaamispaikan tutkijoille ja tästä tulevat edut, mikä usein on houkuttelevampi vaihtoehto tutkijoille verrattuna itsenäisen apurahatutkijan arkeen.

Korona-ajan voi nähdä omalla tavallaan kiihdyttäneen avoimen tieteen tekemistä, kun tutkijoiden ei enää tarvitse toimia vanhanaikaisesti pelkästään kasvotusten voidakseen jakaa keskeneräisiä tutkimustuloksia. Tieteen tekemisen siirtyminen läpinäkyviin ja avoimiin ympäristöihin on vain hyvä asia. Näin tutkimuksen läpinäkyvyys lisääntyy, tutkimuksien laadun varmistaminen on helpompaa, sekä tutkimusten toistettavuus on edes jollakin tapaa mahdollista. Ehkäpä seuraava edistysaskel avoimen tieteen osalta voisi löytyä kalliiden julkaisumaksujen saralta, jotka hidastavat avointa tutkimusta merkittävästi.

PIKKU-PINKKU

Julkisen avaimen salaus
Public-key cryptography

English in this color, let's see how it works ü

Perusidea

(tai no, melkein, yleensä epäluotettava viestinviejä ei saa protokollan lopussa sinappia)

The Basic Idea

(...almost, usually the eavesdropper does not get mustard in the end of the protocol)