

OPISKELUN JOUSTAVUUDEN LISÄÄMINEN MATEMATIIKAN YLIOPISTO-OPINTOJEN TAITEKOHDASSA

Lasse Eronen & Janne Heittokangas

Itä-Suomen yliopisto

TIIVISTELMÄ

Matematiikan yliopisto-opintojen taitekohta sijoittuu opiskelujen vaiheeseen, jossa opiskelun pääpaino siirtyy laskennosta abstraktiin päättelyyn. Useimmissa yliopistossa tämä taitekohta kulminoituu reaalianalyysin opiskeluun, jonka haasteet ovat yleisesti tunnistetut. Itä-Suomen yliopistossa reaalianalyysin kurssin toteutukseen tehtiin muutoksia lukuvuonna 2021–2022, joilla tavoiteltiin opetusjärjestelyn joustavuuden ja kommunikoinnin lisäämistä, sekä kurssin läpimenoprosentin ja kurssiarvosanojen parantamista vaatimustasoa laskematta. Artikkelissa tarkastellaan toteutusta niin toteuman kuin siitä saatujen kokemusten suhteen. Opiskelijapalautteen perusteella kurssitoteutus oli hyvin onnistunut, joustava ja oppimista tukeva, vaikka kommunikaation lisääminen jäikin tavoitteesta. Opiskelijoiden kurssimenestys parani läpimenon ja kurssiarvosanojen osalta.

JOHDANTO

Moilanen ja Neittaanmäki (2021) ovat selvittäneet matematiikan, fysiikan ja kemian maisterintutkintojen ja auskultointien määrän muutosta 2010-luvulla. Selvityksen mukaan matemaattisten aineiden opettajiksi valmistuneiden määrä Suomen yliopistoissa on laskenut liki 40 prosenttia 2010-luvulla. Selvityksen johdopäätöksenä mainitaan, että ”MFK-alan opettajien ja osajien määrä tulevaisuudessa on vaarassa laskea tasolle, joka voi vaikuttaa Suomen kilpailukykyyn usealla kriittisellä alalla”. On siis ilmeistä, että yliopistomatematiikan opiskeluun päätyneistä opiskelijoista on pidettävä hyvää huolta, ja opiskelu on järjestettävä niin, että opiskelija voi käyttää maksimaalisesti omaa opiskelupotentiaalia.

Yliopistoon hakeutuvien opiskelijoiden opiskelutottumuksiin vaikuttaa vahvasti aikaisemmat kokemukset opiskelusta ja omasta osaamisesta. Osaamisen suhteen Julinin ja Rautopuron (2016) sekä Metsämuurosen ja Tuohilammen (2017) seurantatutkimukset osoittavat matematiikan oppimistulosten heikkenemistä, niin

perusasteen kuin lukion päättövaiheissa. Opiskelun suhteen opiskelumenetelmät lukiossa ja peruskoulussa ovat muuttuneet merkittävästi erityisesti 2010-luvulta lähtien. Opiskelumenetelmiin ovat vaikuttaneet teknologian käytön lisääntyminen laskinteknologian ja sähköisten ylioppilaskokeiden rantautuessa opiskeluun. Opiskelumenetelmiin on vaikuttanut voimakkaasti myös peruskoulun ja lukion opetussuunnitelmauudistukset ja niissä korostuva oppijakeskeisyys, joka näyttäytyy niin arvioinnin monipuolistumisena ja yksilöllistymisenä kuin yhteisöllisinä opiskelun toteutustapoina (Opetushallitus 2014, 2019). Edellä esitetyn perusteella voidaan ajatella, että yliopistomatematiikkaan hakeutuneiden opiskelijoiden opiskelutaustassa on tapahtunut muutoksia sekä opiskelukokemusten että osaamistaustan suhteen esimerkiksi 2000-luvun alkuun verrattuna.

Matematiikan opetussuunnitelmauudistukset ovat pohjautuneet oppimisen tutkimukseen. Vuorovaikutteisuuden lisäämisen peruste on tullut esiin keskusteluun pohjautuvan matematiikan opiskelun tutkimuksesta. Esimerkiksi Sfarid (2008) tiivistää, että ajattelu on pohjimmiltaan kommunikointia, yksilön sisäinen kommunikointitapa, joka ei eroa laadullisesti yksilöiden välisestä interpersoonaalisesta kommunikoinnista. Näin ollen omaa matemaattista ajatteluaan voi kehittää keskustelun kautta ja tämä osaltaan on vaikuttanut siihen, että matemaattisen ajattelun kielentämisen (ks. Joutsenlahti & Kulju, 2017) katsotaan edistävän matematiikan oppimista. Toisekseen opiskelijan matematiikan osaamiseen voidaan vaikuttaa arviointitavoilla, joissa prosessin aikainen jatkuva-arviointi, esimerkiksi oppimispäiväkirjatyyppisesti, on huomioitu (Clark, 2012; Reinholz, 2015). Myös oppijakeskeisyyteen, yhteistoiminnallisuuteen ja oppijoiden tarpeiden huomioimiseen liittyvät pedagogiset ratkaisut vaikuttavat myönteisesti opiskelijoiden asenteisiin matematiikan opiskelua kohtaan ja edistävän näin oppimista (Niemi ym., 2021). Myös erilaisilla tehtävätyypeillä on vaikutusta matematiikan opiskelukokemukseen. Erosen ja kollegoiden (2021) tutkimuksessa lukion pitkän matematiikan opiskelijat kokivat Etsi virhe- tehtävän mieluisaksi, vaihtelua tuovaksi ja opettavuudeltaan tehokkaaksi tavaksi erityisesti vaikeammaksi koetun matematiikan tarkastelussa. Edellä mainitut kohteet ovat nousseet keskusteluun myös yliopistomatematiikan opetuksen kehittämisessä (ks. Lahdenperä, 2022), mutta tarve yliopistomatematiikan opetuksen kehittämiseksi nousee myös sisältäpäin aikaisempien toteutuksien tarkastelusta.

Tässä tapaustutkimuksessa tarkastelun kohteena oleva reaalianalyysin sisältö muodostaa yliopistomatematiikan kulmakiven, ja se mielletään yleisesti vaikeaksi opiskelijoille (Oikkonen, 2009; Tall, 1994; Tao, 2014). Tao (2014) tiivistääkin, että kurssi on opiskelijoista yksi kaikkein vaikeimmista matematiikan kursseista johtuen kurssilla korostuvasta matematiikan täsmällisyyden ja tinkimättömyyden vaateista, uusista abstrakteista käsitteistä sekä täsmällisestä päättelystä. Itä-Suomen yliopistossa järjestettävä reaalianalyysin opintojakso on kahdeksan opintopisteen laajuinen matematiikan aineopintoihin kuuluva pakollinen kurssi, joka on tarkoitettu opiskeltavaksi toisen opintovuoden syksyllä. Kurssi kestää 12

luentoviikkoa. ”Kurssin tavoitteena on tutustua reaalianalyysin keskeisiin käsitteisiin lukiomatematiikasta huomattavasti eroavalla eksaktilla tavalla. Kurssin suoritettuaan opiskelija osaa itsenäisesti tuottaa analyysin keskeisiin määritelmiin perustuvia todistuksia. Kurssin alkuosassa tutustutaan reaalityöjien aksiomien ja sen keskeisiin sisältöön on raja-arvon käsite, jota tarkastellaan reaalityöjien ja reaalityöiden tapauksessa. Raja-arvon määritelmä liittyy myös funktioiden jatkuvuuden ja derivoituvuuden tarkkaan käsittelyyn” (Reaalianalyysin opetussuunnitelma, 2021). Sisällöstä ja tavoitteista johtuen kurssin keskeisin työskentelytapa on matemaattinen todistaminen ja kurssi luo pohjan matemaattisen analyysin opinnoille.

Itä-Suomen yliopistossa on kurssin pitkäaikaisen vastuunopettajan kirjanpidon mukaan viiden edellisen lukuvuoden toteutuskerroille ilmoittautunut lähes 300 opiskelijaa. Heistä hieman alle puolet on saanut suoritettua kurssin hyväksytysti ja silloinkin tyypillisesti arvosanalla 1. Puolet hyväksytyistä arvosanoista on ollut arvosanoja yksi ja kaksi. Lisäksi noin kymmenesosa kurssille ilmoittautuneista saa suoritettua kurssin erinomaisella arvosanalla (5/5). Koronalukuvuoden 2020–2021 etäjärjestelyt nostivat kurssille osallistujien läpikäymistä siten, että noin kolme neljästä kurssille osallistuneesta suoritti kurssin hyväksytysti. Tämä muutos ei kuitenkaan näyttäytynyt hyväksytyjen suoritusten arvosanajakaumassa. Muutos selittyi sekä kurssin keskeyttäneiden määrän pienenemisellä noin 10 prosenttiyksikköä ja toinen yli 10 prosenttiyksikön pieneneminen tapahtui niiden opiskelijoiden määrässä, jotka suorittivat molemmat välikokeet, mutta heidän suorituksensa tuli hylätyksi. Kurssi on mahdollista suorittaa itsenäisesti lopputentin avulla, mutta tämä suoritustapa on koettu vaikeaksi. Kurssin aikaisempi toteutus ja sen kurssimuotoinen suorittaminen on pohjautunut välikokeiden ja arvosteltavien viikkotehtävien tekemiseen. Lisäksi opiskelija on voinut osallistua laskuharjoituksiin, joiden tehtäviä tekemällä hän on ansainnut lisäpisteitä kurssisuoritukseensa. Kurssilla on käytetty luennoitsijan laatimaa luentomonistetta, jonka mukaisesti luennot ovat edenneet ja sisällöllisesti kurssi on säilynyt oleellisesti samanlaisena 2015 vuodesta lähtien. Myös kurssin välikokeet ovat säilyneet vaikeustasoltaan samanlaisina vuodesta 2015 lähtien. Kurssin toteutus on ollut kokonaisuudessaan lähiopetuksessa, poikkeuksena lukuvuosi 2020–2021, jolloin kurssi toteutettiin etäopetuksena välikokeet mukaan lukien.

Kurssitoteutuksen kehittämistyön lähtökohdaksi asetettiin tinkimättömyys matemaattisesta täsmällisyydestä ja kurssisisällöstä. Kehittämistyön tavoitteita ovat (T1) *opetusjärjestelyn joustavuuden ja kommunikoinnin lisääminen*, sekä (T2) *kurssin läpimenoprosentin ja kurssi-arvosanojen parantaminen*. Joustavuutta ja kommunikointia parannettiin lisäämällä valinnaisuutta arvioitavien moduulien suhteen, monipuolistamalla toteutus- ja työskentelytapoja sekä tehtäviä. Kurssin matemaattinen sisältö säilytettiin ennallaan, mutta joustavuuden ja kommunikoinnin lisäämisen myötä opiskelun toivottiin muuttuvan vastaamaan enemmän opiske-

lijoiden odotuksia matematiikan opiskelusta peruskoulussa ja lukiossa tapahtuvaan matematiikan opettamiseen nähden. Muutosten oletettiin parantavan opiskelijoiden opintomenestystä niin läpimenoprosentin kasvamisen kuin kurssiarvosanojen suhteen. Tässä artikkelissa tarkastellaan lukuvuoden 2021–2022 uudistunutta kurssitoteutusta opiskelijoiden kurssikokemusten ja -suoritteiden avulla.

TOTEUTUSRATKAISUT OPETUSJÄRJESTELYN JOUSTAVUUDEN PARANTAMISEKSI

Lukuvuoden 2021–2022 kurssitoteutuksen luennot järjestettiin lähiopetuksena. Välikoekäytänteitä monipuolistettiin siten, että ensimmäinen välikoe järjestettiin lähitoteutuksena ja toinen etänä tarjoten lisää vapausasteita sekä suorituspaikan että suoritusajan suhteen. Etätentin saattoi suorittaa opiskelijan itsensä valitsemassa kolmen tunnin aikaikkunassa tenttipäivänä klo 8–16 välillä. Laskuharjoituksissa oli etä- ja lähiosallistumismahdollisuus. Palautettavat viikkotehtävät toteutettiin vertaisryhmätyöskentelynä ja yleiselle keskustelulle luotiin keskustelukanava kurssin Moodle-ympäristöön.

Viikkotehtävät

Kirjallisesti palautettavat viikkotehtävät olivat ensimmäistä kertaa käytössä syksyllä 2020, jolloin ne tehtiin itsenäisesti ja arvosteltiin henkilökohtaisesti. Viikkotehtävät muuttuivat 3–4 hengen yhteistoiminnallisiksi (Roschelle & Teasley, 1995) ryhmätehtäviksi. Yhteistoiminnallisuuden hengen mukaisesti ryhmä vastasi yhdessä tehtävien tekemisestä ja saivat siitä yhteisen arvioinnin. Ryhmät määritettiin satunnaisesti luennoitsijan toimesta kurssin alussa. Viikkotehtävien arvostelu toteutettiin Moodle-ympäristössä, jonka kautta jokainen ryhmän jäsen sai saman palautteen ja saman pistesuorituksen. Aiempaan verrattuna tällä järjestelyllä lisättiin opiskelijoiden ryhmätyöskentelyä ja kommunikaation mahdollisuuksia.

Laskuharjoitukset

Laskuharjoituksia järjestettiin viikoittain kolme ryhmää, joista kaksi oli lähiopetuksena ja yksi etäopetuksena. Opiskelijat tekivät itsenäisesti laskuharjoitustehtäviä ennen jokaista 90 minuutin harjoituskertaa. Uudistuksen myötä etäryhmän opiskelijat varautuivat esittämään tekemänsä skannatut ratkaisut ohjatun etäkouksen aikana. Tehtävät tarkasteltiin opiskelijoiden esittämien ratkaisujen kautta. Lähiryhmissä harjoituskerta alkoi 10–15 minuutin pienryhmäkeskustelulla, joissa opiskelijat vertasivat ratkaisujaan keskenään. Tämän jälkeen jokainen pienryhmä esitti ainakin yhden tehtävän ratkaisun koko ryhmälle. Mahdollisuuksien mukaan tehtäviin etsittiin erilaisia ratkaisutapoja ja tarkasteltiin tehtävän alkuarvojen muutoksien vaikutusta ratkaisuihin. Lisäksi jokaisella kerralla

oli mahdollista tehdä yksi tehtävä ohjatusti ja ansaita siitä suorituspisteitä etukäteen ratkaistujen tehtävien tapaan.

Luennot ja viikkokatsausvideo

Luennot järjestettiin lähiopetuksena kaksi 90 minuutin luentokertaa viikoittain. Opiskelijoilla oli tiedossa luentokerran aihe etukäteen ja heitä kannustettiin tustutumaan siihen luentomonisteen avulla. Uudistuksen myötä jokaisen luennon alussa esiteltiin luennon sisältötavoitteet, joiden määrä vaihteli kolmesta viiteen. Jokaiselle luentokerralle lisättiin kaksi pohdiskelutehtävää, jotka oli määrä ratkaista pienryhmissä luentojen aikana, ja niiden ratkaisusta keskusteltiin koko ryhmän kanssa. Keskustelulle varattiin aikaa noin viisi minuuttia tehtävää kohden. Lisäksi luennoilla järjestettiin 1–2 minuutin mittaisia koko ryhmän keskusteluja sisältötavoitteita koskien. Luennoitsija tuotti jokaisen luentoviikon lopuksi erillisen viikkokatsausvideon. Katsauksessa käsiteltiin viikolla pidettyjen luentojen ja laskuharjoitusten sisältöjä ja niiden aikana syntynyttä keskustelua. Viikkokatsausvideoiden kesto oli keskimäärin 45 minuuttia.

Sisältö

Kurssilla käytetyn luentomonisteen matemaattinen sisältö ja kirjallisesti palautettavat viikkotehtävät (24 kpl) säilyivät ennallaan. Uudistuksen myötä jokaisen harjoituskerran tehtävät esitettiin 3–4 ryhmässä aihealueittain otsikoituna. Yksi näistä tehtäväryhmistä muodostui aihealueiden sijaan tehtävätyypin perusteella. Tehtävätyypin ryhmän tehtävät olivat ns. Etsi virhe -tyypin tehtäviä (ks. kuva 1). Tehtävässä on esitettyä matemaattinen päättely tai todistus, josta opiskelijan tehtävänä on ollut paikantaa (mahdolliset) virheelliset kohdat ja tehdä korjaus ehdotukset.

ETSI JA KORJAA VIRHEET

6. Olkoon (a_n) jono, jolle $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, ja olkoon (b_n) rajoitettu jono. Raja-arvon laskusääntöjen nojalla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \cdot b = 0.$$

Em. päättelyssä on siis virhe. Jos väite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ on kuitenkin yo. oletuksilla totta, niin todista tämä. Muussa tapauksessa anna vastaesimerkki.

Kuva 1. Esimerkki Etsi virhe -tyyppisestä laskuharjoitustehtävästä.

Oppimispäiväkirja

Opiskelijalle tarjottiin uudistuksen myötä mahdollisuus oppimispäiväkirjan hyödyntämiseen osana kurssin arviointia. Päiväkirjassa opiskelijan tehtävänä oli arvioida omaa opiskelua sisältöjen, menetelmien ja opiskeluun käytetyn ajan suhteen. Lisäksi päiväkirjassa raportoitiin kurssin aikana syntyneitä oivalluksia

ja opiskeluprosessin aikana tapahtuneita tunnetilan muutoksia. Päiväkirjan pituudeksi määrättiin viisi A4 sivua tietokoneella puhtaaksikirjoitettuna.

Arviointi

Kurssin arviointi muuttui moduulipohjaiseksi ja arviointi tapahtui lopulta niiden moduulien perusteella, jotka tuottivat opiskelijalle parhaimman menestymisen niiden yhteenlasketun maksimipistemäärän (100 pistettä) mukaisesti. Moduuleita olivat kaksi välikoetta (2 kertaa 30 pistettä), laskuharjoituksissa tehdyt tehtävät (20 pistettä), kirjallisesti palautettavat tehtävät (20 pistettä), luennoille osallistuminen (20 pistettä), sekä oppimispäiväkirja (10 pistettä). Opiskelijan oli näin ollen mahdollista saada esimerkiksi kurssiarvosana (100 pisteen suoritus) koostamalla se yhdestä välikokeesta, laskuharjoitustehtävistä, kirjallisesti palautettavista tehtävistä, osallistumalla luennoille ja tekemällä oppimispäiväkirja. Lisäksi opiskelijoilla oli mahdollisuus ansaita maksimissaan 10 bonuspistettä. Bonuspisteitä pystyi ansaitsemaan tekemällä ylimääräisiä suoritusmoduuleita, sekä aktiivisuudesta luennoilla ja laskuharjoituksissa. Aktiivisuutta pystyi osoittamaan osallistumalla keskusteluun esittäen kysymyksiä ja vastaamalla muiden esittämiin kysymyksiin.

TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

Kurssi uudistuksen tavoitteiden toteumaa selvitimme seuraavien tutkimuskysymysten avulla.

- 1) Millaisia olivat opiskelijoiden (a) kokemukset kurssin toteutuksesta, ja (b) näkemykset kurssin jatkokehittämiseksi?
- 2) Millaista oli opiskelijoiden opintomenestys läpipääsyn ja arvosanojen suhteen erityisesti ensimmäisestä välikokeesta saatuihin pisteisiin verrattuna?

Ensimmäisen tutkimuskysymyksen avulla etsimme vastausta tavoitteeseen (T1) ja aineisto muodostuu kurssin lopussa kerätystä opiskelijapalautteesta. Toinen tutkimuskysymys palvelee tavoitetta (T2) ja sen aineiston muodostavat opiskelijoiden pistemääräkertymät eri moduuleista, sekä aikaisempien toteutuskertojen arvosanaajakauma.

Kurssipalautteessa opiskelijat määrittivät tyytyväisyyttään kurssin eri osa-alueiden toteutukseen, sekä kokemuksistaan Etsi virhe -tehtävien soveltuvuudesta ja puhumisen mahdollistamisesta kurssin eri osa-alueilla. Opiskelijat antoivat vastauksena Likert asteikoilla (1=En lainkaan tyytyväinen / Etsi virhe -tehtävä soveltuisi selvästi huonommin / puhetta tulisi selvästi vähentää .. 5= Erittäin tyytyväinen / Etsi virhe -tehtävä soveltuisi selvästi paremmin / Puhetta tulisi selvästi lisätä). Opiskelijalta kysyttiin mihin pistemääräluokkaan (5-portainen) hänen ensimmäinen välikoesuorituksensa sijoittui. Lisäksi opiskelijoita pyydettiin

arvioimaan viikkokohtaiset kurssin opiskeluun käyttämänsä kokonaistuntimäärä. Palautelomakkeessa oli myös avoimia kysymyksiä, joissa opiskelijat pystyivät perustelemaan mielipiteitä. Opiskelijoilta pyydettiin kurssipalautte nimettömänä kurssin päätyttyä Forms-kyselyä käyttäen. Kaikkiaan 23 opiskelijaa vastasi kurssipalauttekyselyyn.

Pistemäärämatriisiin muodosti kurssin luennoitsija ja siihen merkittiin jokaisen opiskelijan (n=49) kohdalle hänen pistemääränsä kurssin eri moduulista. Tutkimuksessa käytetyssä matriisissa opiskelijoiden nimet olivat korvattu rivinumeroilla ja se valmistui tutkimuskäyttöön vasta kurssin päätyttyä.

Aineistonkeruussa meneteltiin Tutkimuseettisen neuvottelukunnan ohjeistusten (2019) mukaisesti. Ensiksi kurssin alussa opiskelijoille esiteltiin tutkimus ja heiltä pyydettiin tietoon perustuva suostumus osallistumiseen. Toisekseen kurssipalautetta ja pistemäärää ei yhdistetty opiskelijatasolla, vaan niiden yhdistäminen tapahtui opiskelijan itse ilmoittaman ensimmäisen välikokeen pistemääräluokan mukaisesti.

Kurssipalautteen avoimien kysymysten analysoinnissa käytettiin sisällön analyysiä (Elo & Kyngäs, 2008), pilkkomalla aineisto ensin ajatuksen mittaisiksi yksiköiksi, pelkistämällä ajatukset ja yhdistämällä ne luokiksi, jonka jälkeen aineisto raportoitiin tutkimuskysymyksittäin. Tilastollisia tunnuslukuja käytettiin opintomenestyksen (keskiarvo ja vastausten vaihteluväli), sekä kurssipalautteen (keskiarvo ja keskihajonta) osalta kuvaamaan ryhmätason ilmiöitä (Tähtinen, ym. 2020).

OPISKELIJOIDEN KOKEMUKSET KURSSIN TOTEUTUKSESTA

Kokonaisuutena opiskelijat olivat hyvin tyytyväisiä toteutukseen (KA=4.3; KH=0.8). Avoimien palautekenttien tarkastelu osoitti, että tyytyväisyyden taustalla oli kurssilla *koettu opiskelulle myönteinen ilmapiiri*. Opiskelijoiden palaute keskittyi tässä kolmeen alakäsitteeseen: *kurssin toteutusratkaisuihin, työskentelymenetelmiin* sekä *kurssin sisältöön*. Myönteistä ilmapiiriä toteutuksen suunnittelussa tuotti näkemys siitä, että opiskelijoita on kuunneltu opintojakson suunnittelussa.

Kurssin toteutusta oli erityisesti mietitty aikaisempien vuosien palautteen perusteella ja modifioitu sopivammaksi. Tämä on mielestäni huomionarvoista, sillä yleensä opiskelijoilla on sellainen tunne, ettei kurssipalautteita lueta, saati sitten viedä eteenpäin. Nyt kuitenkin kurssilla oli selkeästi huomioitu opiskelijoita! (r6)

Toteutuksen osalta keskeisimmät tyytyväisyyttä tuottavat tekijänä oli joustava arvioinnin toteutus, jonka mainittiin vähentävän opiskelusta aiheutuvaa stressin kokemusta. Lisäksi hyvinä toteutusvalintoina mainittiin viikkokatsaukset ja lähiopetus. Työskentelymenetelmistä opiskelulle myönteistä ilmapiiriä toivat ryh-

mätyöskentelyn tuottama tuki opiskelulle ”ryhmätyöt auttoi jaksamaan läpi pitkän ja vaikean kurssin. (r20)” ja laskuharjoitusten prosessinaikaista arviointia soveltanut työskentelymenetelmä ”Varsinki laskarit lähiopetuksessa olivat hyvät ja oli kivaa, että välillä sai rastin laskareissa, jos yhdessä saatiin pohdittua tehtävän ratkaisu kuntoon. Tämä motivoi tulemaan laskareihin paremmin. (r7)” Kurssin sisällöstä selkeäksi laadittu kurssimoniste tuotti osalle opiskelijoista opiskelua eteenpäin vievää myönteistä ilmapiiriä: ”etenkin ilahdutti moniste, joka oli sellainen, että siitä sai selkoa myös matemaattista tekstiä vähän lukenut. (r21)”

Opiskelijapalautteen perusteella tyytyväisyys toteutukseen perustuu oppijälähtöisyyden kokonaisvaltaiseen lisääntymiseen. Erityisesti arvioinnin monipuolisuus, vertaisten kanssa työskentely, sekä omasta työstä saatu palaute, sekä uuden tyyppiset tehtävät nousivat keskeisiksi tekijöiksi tyytyväisyyden takana.

Opiskelijoiden kokemus Etsi virhe -tehtävien soveltuvuudesta

Opiskelijoiden mielestä Etsi virhe -tehtävät ovat yhtä soveltuvia luento- (Ka=3.0, KH=0.9) ja laskuharjoitustehtävinä (KA=3.2, KH=1.0), mutta jonkin verran soveltuvampia ryhmätyöskentelytehtävinä (KA=3.7, KH=0.8), kun soveltuvuutta verrataan muihin kurssilla käytettyihin tehtäviin. Opiskelijoiden esittämät perustellut tehtävien ominaisuuksista jakaantuivat tehtävätyypin laadun ja soveltamiskohteen arviointiin. Tehtävän laatua kuvasi niiden opettavaisuus (2) ja koettu vaikeus (4).

Laskuharjoitustehtävänä ne olivat mielestäni haastavia, sillä yksin virheen havaitseminen ei ole niin helppoa. Nämä tehtävät soveltuisivat hyvin ryhmätehtäviksi luennoille tai palautettavaan tehtäviin. (r18)

Etsi virhe -tehtävien ratkomisessa olisi opiskelijoiden mielestä hyötyä muista opiskelijoista. Opiskelijoiden mainitsemat soveltamiskohteet olivat joko luennot (3) tai vertaisryhmä (7,) koska tehtävä katsottiin vaativan ryhmän tukea ja keskustelua. Toisaalta neljä opiskelijaa katsoi tehtävän soveltuvan huonosti vertais työskentelyyn, koska tehtävä vaatii läpikäymisen, mielellään opettajan kanssa, jotta virhe varmasti paikantuisi oikein.

Tehtävätyyppi on haastava sen suhteen, että aihe tulisi syväymmärtää siinä onnistuakseen. Eli hyvä kun paikalla on opettaja, huono jos ollaan vertaisryhmässä. (r15)

Opiskelijoiden kokemus kurssin keskustelutehtävistä

Opiskelijoiden mielestä puhumisen mahdollistavien aktiviteettien määrä oli toteutuksessa hyvä. Viisi opiskelijaa mainitsi perusteluina sen että, mahdollisuuksia puhumiselle oli, mutta se oli omasta tahdosta kiinni” Mielestäni kaikissa tapauksissa sai puhua, jos tahtoi. Mahdollisuuksia siihen annettiin paljon. Puhetta ei tarvitse lisätä pakottamalla (r28).” Puhetta luennoilla ei kuitenkaan juuri ollut. Seitsemän opiskelijan mielestä tämä johtui siitä, ettei opiskelijat osanneet puhua

matematiikasta tai se oli heille vierasta. ” ...onhan siinä [matematiikasta puhuminen] tottumuskysymyksen. Ei sellaiseen ole totuttu.(r23)”

Opetuksen muoto, jossa puheen mahdollisuudet olisivat otollisimmat, jakoi opiskelijoiden mielipiteitä. Kolme opiskelijaa oli sitä mieltä, että luennot olisivat paras paikka koska luennoitsija voisi viedä keskustelua oikeaan suuntaan, sitä vastoin yhden opiskelijan mielestä keskusteluun tuhraantuu liiaksi luentoaikaa. Yksi opiskelijoista toivoi, että vertaisryhmätyöskentelyn ohjeistusta kehitettäisiin siten, että siellä saataisiin opiskelijat puhumaan matematiikasta. Sitä vastoin toinen opiskelija korosti, että juuri vertaisten kokoontumisissa oli ollut hyvää keskustelua tehtävistä. Kontaktiopetuksena pidetyt laskuharjoitukset olivat kahden opiskelijan mielestä keskustelulle pohjautuvaa yhteistä pohdintaa. Yksi opiskelijoista olisi toivonut etälaskuharjoituksiin enemmän puhetta todeten sen kuitenkin hankalaksi konseptiksi.

Kun opiskelijoilta kysyttiin syitä siihen, miksi reaalianalyysin kurssin yhteydessä matematiikasta puhuminen koetaan vaikeaksi, keskeisimmäksi syyksi 11 opiskelijaa ilmoitti epäonnistumisen pelon ja oman osaamattomuuden näyttämisen. ”Todella vaikeaa ymmärtää, joten ei halua puhua, jotta ei puhu ihan väärin, jolloin saattaisi vaikuttaa tyhmältä. (r6)” Neljä opiskelijaa lisäsi tähän vielä sen, että reaalianalyysi on vaikeaa ja osalla myös aikaisemmat negatiiviset matematiikan opiskelukokemukset estävät puhumisen.

Opiskelijoiden esiin nostamat kurssin kehittämisajatukset

Opiskelijoiden kehittämisajatuksien yläkäsitteeksi määrittyi oikeudenmukaisuus. Luentojen osalta etäsuorittamismahdollisuus nähtiin kolmen opiskelijan mielestä oikeudenmukaisuutta kehittäväenä toimenpiteenä. Vastaavasti kolmen opiskelijan luentoihin kohdistuva kehittämisajatus koski luentojen keskustelukulttuurin kehittämistä.

Luentojen osallistavaa osuutta voisi kehittää jatkossa. Olisi hyvä, mikäli luennoilla saataisiin aikaan keskustelua, mutta keskusteluun osallistuminen tuntuu vaikealta. (r26)

Laskuharjoitusten suhteen oikeudenmukaisuuden kehittämisestä löytyi yhden opiskelijan ajatus. Hän mainitsi, että laskuharjoitus ja viikkotehtävien olleen samanlaisia kuin edellisenä vuonna ja tämä vaikuttaa oikeudenmukaisuuden kokemukseen, sillä ainakin osalla kurssille osallistujista voi olla valmiita ratkaisut tehtäviin.

Ilmeisesti kurssin laskuharjoitustehtävät ja ryhmätyöt ovat olleet samoja kuin viime vuonna. Nämä varmaan olisi hyvä vaihtaa ensi vuodelle, varsinkin jos moduulimuotoinen kurssi on käytössä. (r9)

Vertaisryhmätyöskentelyn oikeudenmukaisuuden kokemukset muutoin liittyivät ryhmän muodostamiseen ja sen toimintaan. Kaksi opiskelijaa toivoi itsevalittavia ryhmiä, jotta ryhmäläiset voisivat olla yhtä sitoutuneita työskentelyyn.

Opettajan määräämät ryhmät saivat myös tukea kahdelta opiskelijalta, joskin arvottujen ryhmien välillä myönnettiin olevan eroja.

[Viikkotehtävä]ryhmien arpominen on kaikille tasa-arvoista, mutta ei välttämättä oikeudenmukaista. Minulle sattui hyvä onni ryhmäläisten kanssa, mutta olen kuullut, että kaikilla ei käynyt yhtä hyvä tuuri. (r14)

Oikeudenmukaisuus arvioinnissa näyttäytyi moduulien pisteytyksien kehittämisenä. Esimerkiksi oppimispäiväkirjasta saatavien pisteiden pisteytyksenä. Oppimispäiväkirjasta sai täydet 10 pistettä jos siinä oli vastattu esitettyihin kysymyksiin ja se oli mitaltaan viisi sivua. Yksi opiskelija olisi kaivannut tähän tarkempia kriteerejä.

Kurssitoteutus moduulimuotoisena on järkevä, kuitenkin esimerkiksi oppimispäiväkirjamoduulia voisi tarkastaa tiukemmin (toisilla varmasti todella hyviä pohdiskelevia kirjoituksia ja toisilla vasemmalla kädellä tehtyjä ja silti saa 10% kurssiarvosanasta jos muutamiin kysymyksiin on vastattu). (r9)

Myös arvosanojen neljä ja viisi saavuttamisen oikeudenmukaisuus herätti ajatuksia. ”Arvosanoja 4 tai 5 ei saisi liian helposti saavuttaa, muttei niiden pitäisi olla mahdottomiakaan, jos joku niihin pyrkii. Tämä on ehkä ikuista hienosäätöä. (r8)”. Sisällön suhteen oikeudenmukaisuuden kehittäminen näyttäytyi toiveena mahdollisuuksista tarkastella omaa aikaisempaa osaamista suhteessa kurssin vaatimukseen esimerkiksi erilaisilla formatiivisen arvioinnin keinoilla.

OPISKELIJOIDEN OPINTOMENESTYS

Lukuvuoden 2021–2022 osallistujamäärä (49) vastaa hyvin vuosittaista kurssille osallistuvien opiskelijoiden määrää. Taulukossa 1 on esitettyä opiskelijoiden opintomenestys syksyn 2021 toteutuskerralla.

Taulukko 1: Reaalianalyysin kurssille osallistuneet opiskelijat

Opiskelijamäärät	2021
Kurssille ilmoittautuneet	49
Ensimmäiseen ja toiseen välikokeeseen osallistuneet (%)	38 (78 %) ja 34 (69 %)
Hyväksytyn arvosanan saaneet (%)	36 (73 %)
Välikokeisiin osallistuneet ja hylätyn arvosanan saaneet	1 (2 %)
Kurssin keskeyttäneet	12 (24 %)
Arvosanajakauma (5,4,3,2,1)	10, 6, 11, 7, 2

Lukuvuonna 2021 toteutukseen osallistuneista 49 opiskelijasta 36 (73 %) sai suoritettua kurssin hyväksytysti. Määrä on selvästi enemmän kuin aikaisemmissa lähiopetuksena järjestetyissä toteutuksissa ja vastaa suhteellisesti koronavuoden etäjäestelytoteutuksesta saatuja hyväksytyjä suorituksia. Huomattavaa on

myös, että välikokeisiin osallistuneista opiskelijoista ainoastaan yksi ei saanut kurssia suoritettua hyväksytysti.

Selvin muutos aikaisempaan on havaittavissa arvosanjakaumassa. Tyypillisin arvosana ja hyväksytyjen arvosanojen mediaani ovat nousseet arvosanaan kolme. Edelleen on nähtävissä, että lukuvuonna 2021 erinomaisen arvosanan saaneita opiskelijoita on 10 eli yli 20 prosenttia kurssille ilmoittautuneista.

Opiskelijoiden opintomenestys ensimmäisen välikokeen suhteen

Ensimmäinen välikoe tarjosi opiskelijalle tilaisuuden saada tietoa oman osaamisen kehittymisestä summatiivisesti kurssin aikana ja siinä menestyminen on vaikuttanut vahvasti kurssimenestykseen aikaisemmilla toteutuskerroilla. Taulukon 2 tarkasteluun on otettu mukaan kaikki ne opiskelijat (n=43), jotka saivat pisteitä vähintään yhdestä kurssin suoritukseen kuuluvasta moduulista.

Taulukko 2. Opiskelijoiden pistemäärät eri tehtävämoduuleista, kokonaispistemäärät ja arvosanat, sekä viikossa opiskeluun käytetty tuntimäärä ensimmäisen välikokeen pistemääräluokittain esitettynä. Moduulin suorittaneiden määrä (n), keskiarvo (KA), sekä luokan pienin (MIN) ja suurin (MAX) arvo.

vk1 pis- teet		vk1 (30)	vk2 (30)	LH (20)	PAL (20)	LUE (20)	OPK (10)	BON (10)	Pist (100)	AS (5)	h/vko*
Ei osal- listunut (n=5)	n	5	5	1	5	4	0	0	5	5	0
	KA	-	-	6.5	19.0	2.0	-	-	21.9	0	-
	Min	-	-		18.0	1	-	-	19.0	0	-
	Max	-	-		20	5	-	-	27.5	0	-
[0,6) (n=8)	n	8	8	5	8	8	4	6	8	8	4
	KA	3.5	14.2	13.5	18.8	15.0	10	3.4	65.3	2.3	11 h
	Min	1.5	10.5	0.5	17.0	3.0	10	2.0	42.0	0	10 h
	Max	5.5	20.0	20	20	20	10	4.0	84.5	4	12 h
[6,12) (n=7)	n	7	7	6	7	7	3	6	7	7	3
	KA	9.4	10.0	10.6	18.9	14.2	10	3.8	64.7	2.3	10.7 h
	Min	6.5	0	3.5	17.5	3.0	10	1.0	31.0	0	8 h
	Max	11.5	20.0	17.0	20	20	10	6.0	75.5	3	12 h
[12,18) (n=11)	n	11	11	11	11	10	6	10	11	11	6
	KA	14.5	16.8	13.5	19.1	14.5	10	4.0	74.6	3.1	9.1 h
	Min	12.0	9.0	1.5	17.5	3.0	10	2.0	60.0	2	5 h
	Max	17.0	22.0	19.5	20	20	10	6.0	97.5	5	12 h
[18,24) (n=5)	n	5	5	5	5	5	3	4	5	5	5
	KA	20.5	18.0	12.2	18.7	14.8	10	6.0	84.5	4.0	10.6 h
	Min	19.0	0	1.5	17.5	4.0	10	6.0	70.0	3	6 h
	Max	21.5	26.0	20	20	20	10	6.0	96.5	5	14.5 h
[24,30] (n=7)	n	7	7	7	7	7	3	6	7	7	5
	KA	26.4	22.9	19.4	18.7	12.6	10	4.3	94.8	5.0	12.7 h
	Min	24.0	0	18.5	17.5	1.0	10	2.0	90.0	5	9 h
	Max	30	30	20	20	20	10	6.0	100	5	20 h

*Perustuen opiskelijapalautekyselyyn

Taulukko 2 paljastaa, että opiskelijat, jotka eivät osallistuneet ensimmäiseen välikokeeseen, eivät osallistuneet toiseenkaan välikokeeseen, eivätkä läpäisseet kurssia, vaikka muista moduuleista saivatkin pisteitä. Tällä ryhmällä on keskimäärin kaksi luentoläsnäolopistettä ja ainoastaan yksi on palauttanut harjoitustehtäviä. Nämä pistekertymät viittaavat siihen, että opiskelijat ovat keskeyttäneet opiskelun kurssin alkuvaiheissa, vaikka kaikki saivatkin palautettavista viikkotehtävistä korkeat pisteet. Ensimmäisen välikokeeseen osallistuneet pistemääräluokan [0–6) opiskelijat osallistuivat myös toiseen välikokeeseen ja yhtä lukuun ottamatta saivat hyväksytyyn kurssisuorituksen. Tämän ryhmän opiskelijoista yksi ylsi kiitettävään 4/5 arvosanaan. Pistemääräluokan [6–12) opiskelijoista yksi keskeytti opiskelun ensimmäisen välikokeen jälkeen, mutta kaikki muut opiskelijat läpäisivät kurssin. Ryhmän läpipäässeistä opiskelijoista viiden arvosana oli 3/5 ja yhden 1/5.

Pistemääräluokkaan [12–18) kuuluneet opiskelijat osallistuivat kaikki toiseen välikokeeseen. Yksi opiskelijoista ylsi arvosanaan 5/5, sillä ensimmäinen välikoe moduuli jäi pois arvostelusta, muiden moduulien tuottaessa hänelle paremman lopputuloksen. Pistemääräluokan [18–24) opiskelijoiden joukossa oli opiskelijoita, jotka eivät juuri tehneet laskuharjoitustehtäviä. Kaikki ylsivät kurssiarvosanoissa välille 3–5. Sen sijaan ensimmäisen välikokeen pistemääräluokan [24–30] opiskelijat suorittivat kaikki kurssin arvosanalla 5/5, tekivät suorituksia lähes kaikista moduuleista ja käyttivät keskimäärin eniten aikaa opiskeluunsa viikoittain (12,7 tuntia).

Kun taulukon 2 tarkastelu suoritetaan moduuleittain, havaitaan, että kaikki opiskelijat palauttivat pakolliset viikkotehtävät ja minimipistemäärä tästä osiosta oli (17,5/20 pistettä). Laskuharjoitusmoduuliin osallistuivat kaikki yli 12 pistettä ensimmäisestä välikokeesta saaneet opiskelijat. Kaikkiaan 47 opiskelijaa osallistui vähintään yhdelle luennolle. Luento-osallistumisen vaihteluväli oli samanlaista kaikissa pistemääräluokissa, joskin osallistumisen keskiarvolla tarkasteltuna ensimmäisestä välikokeesta pistemääräluokkaan [0,6) sijoittuneilla osallistuminen oli uutterinta (ka 15,0 pistettä). Vähäisintä luento-osallistuminen oli pistemääräluokkaan [24–30] kuuluneilla (ka 12,6 pistettä). Oppimispäiväkirjan palautti kaikkiaan 19 opiskelijaa ja se oli moduuleista vähiten käytetty, mutta sen käyttäminen oli yhtä suosittua kaikissa pistemääräluokissa. Kaikki päiväkirjan palauttaneet opiskelijat saivat suorituksesta 10/10 pistettä, sillä päiväkirjoissa tarkasteltiin kattavasti niille annettua tehtävänkuvausta.

Bonuspisteitä keräsi valtaosa opiskelijoista. Suurin arvosanan vaihteluväli oli neljä hyväksyttyä arvosanaa ja se löytyi ensimmäisen välikokeen [0,6) pistemääräluokasta. Arvosanaan 5/5 ylsi opiskelijoita [12,18) pistemääräluokasta alkaen.

POHDINTA

Joustavuus näyttäytyy tärkeänä opiskelijoiden kokemuksissa. Opiskelijapalautteen perusteella kurssin suorittamisen joustavuus parani. Erityisesti arvioinnin joustavuus mainittiin useasti. Joustavuus arvioinnissa ja työskentelytavoissa onkin välttämätöntä yksilön kehittämisessä haastavissa tilanteissa (ks. Tao, 2014). Toisaalta kurssin joustamattomuus luento-osallistumisen ja vertaisryhmän satunnaisen muodostamisen suhteen saivat kritiikkiä. Vertaisryhmätyöskentelystä ansaitsi muutama opiskelija paljon pisteitä, vaikka muiden näyttöjen perusteella työskentely näyttäytyi vähäiseltä. Löydökset osoittavat sen, että yhteistoiminnallinen työskentely voi olla haasteellista myös yliopisto-opiskelijoille.

Kommunikoinnin monipuolistaminen osoittautui haastavaksi. Opiskelijoiden mukaan kommunikointimahdollisuuksia oli tarjolla riittävästi, mutta niitä hyödynnettiin vähän. Matematiikasta keskustelu koettiin vaikeaksi koska käsitteitä ei ymmärretty riittävän hyvin. Sfardin (2008) esittämän ajattelun ja ihmisten välisen keskustelun yhteyden avulla tämä tarkoittaisi sitä, että opiskelijan tulisi kehittää kysymisen taitoa. Oppimispäiväkirja tarjoaisi tähän hyvän mahdollisuuden, jos jatkossa sen sisällössä keskityttäisiin kurssin keskeisten asioiden sanalliseen esittämiseen ja tätä luotua esitystä tarkasteltaisiin reflektiivisesti kurssin edetessä. Samalla se kiinnittäisi oppimispäiväkirjan ja reflektion tiiviimmin osaksi kurssin sisällöllistä tarkastelua ja mahdollistaisi kriteeripohjaisen arvioinnin. Jälkimmäinen vastaisi omalta osaltaan opiskelijoiden esiin tuomaan oikeudenmukaisuuden kehittämisen haasteeseen. Kommunikointimahdollisuuksia ja ajattelun kielentämistä voidaan fasilitoida osin tehtävävalinnoilla, kuten Etsi virhe -tehtävien sijoittamisella luennoille tai vertaistyöskentelyyn (ks. Eronen ym. 2021). Esitettyjen tulosten perusteella kurssin uudistaminen onnistui sille asetetuissa tavoitteissaan. Kurssiarvosanat paranivat ja läpipääsy parani verrattuna aikaisempiin toteutuksiin. Moduulijärjestelmä näytti kannustavan jatkaamaan opiskelua, vaikka ensimmäisestä välikokeesta tulikin vaatimattomat pisteet. Havaintoa puoltaa myös se, että tammikuun 2022 rästitenttiin ei ilmoittautunut opiskelijoita.

Tuloksia on tarkasteltava myös tinkimättömyyden periaatteen näkökulmasta. Tinkimättömyyden vaade toteutuu kurssisisällön osalta, sillä siihen ei tehty muutoksia. Sen sijaan moduuliarviointi tarjosi mahdollisuuksia hyötyä muiden työskentelystä yhteistoiminnallisuuden avulla, mutta pelkästään sen turvin ei kurssia voinut saada suoritetuksi. Tutkimuksen perusteella emme voi suoranaisesti osoittaa parantuneiden oppimistulosten ja tinkimättömyyden välistä muutumatonta yhteyttä. Taulukon 2 perusteella 7/10 korkeimman arvosanan saaneista opiskelijoista olisi saanut suorituksestaan 5/5 arvosanan myös perinteisen välikoearviointin perusteella. Tämä puoltaisi tinkimättömyyttä. Toisaalta järjestely myös passivoi kahden opiskelijan opiskelua, sillä he eivät osallistuneet toi-

seen välikokeeseen, koska arvosana 5/5 oli ansaittu jo aikaisemmin. Toteutusratkaisut näyttivät kannustavan erityisesti ensimmäisen välikokeen matalimpien pistemääräluokkien opiskelijoita. Moduuliratkaisu tarjosi yhä useammalle mielekkään kurssin suoritustavan.

Kurssin opettajan näkökulmasta kurssi työllisti enemmän aikaisempiin toteutuskertoihin verrattuna, erityisesti lisääntyneen kirjanpidon ja vaikeutuneen arvoskelun myötä. Toisaalta aikaa myös säästy yhteistoiminnallisuuden ansioista. Kurssin teknistä toteutusta, toimintojen tarkastelua ja rutiinotoimintojen automatisointia on kehitettävä edelleen, jotta toteutustavasta saataisiin varteenotettava haastaja totutuille matematiikan opetuksen toteutustavoille yliopistossa.

LÄHTEET

- Clark, I. (2012). Formative assessment: assessment is for self-regulated learning. *Educational Psychology Review*, 24(2), 205–249.
- Elo, S., & Kyngäs, H. (2008). The qualitative content analysis process. *Journal of Advanced Nursing*, 62(1), 107–115.
- Eronen, L., Viholainen, A., & Kolström, M. (2021). Matematiikan opiskelumotivien yhteys itse valittujen tehtävien tiedonalapainotukseen. *FMSERA Journal*, 4(1), 75–89. <https://journal.fi/fmsera/article/view/96044>
- Joutsenlahti, J. & Kulju, P. (2017). Multimodal languaging as a pedagogical model – a case study of the concept of division in school mathematics. *Education Sciences*, 7(1), 1–9. <https://doi.org/10.3390/educsci7010009>
- Julin, S., & Rautopuro, J. (2016). *Läksyt tekijäänsä neuvovat. Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten arviointi 9. vuosiluokalla 2015*. (Julkaisut 2016:20). Kansallinen koulutuksen arviointikeskus.
- Lahdenperä, J. (2022). *Supporting quality of learning in university mathematics: Contrasting students' approaches to learning, self-efficacy, and regulation of learning in two student-centred learning environments*. [Väitöskirja]. Faculty of Science, University of Helsinki.
- Metsämuuronen, J., & Tuohilampi, L. (2017). *Matemaattisen osaamisen piirteitä lukion koulutuksen lopussa 2015*. (Julkaisut 2017:3). Kansallinen koulutuksen arviointikeskus.
- Moilanen, H., & Neittaanmäki, P. (2021). *Matematiikan, fysiikan ja kemian maisteritutkinnot ja auskultointi 2010-luvulla*. (Informaatioteknologian tiedekunnan julkaisuja, 91). Jyväskylän yliopisto, Informaatioteknologian tiedekunta. <http://urn.fi/URN:ISBN:978-951-39-8972-9>
- Niemi, L., Metsämuuronen, J., Hannula, M. S. & Laine, A. (2021). Matematiikan parhaat osaajat lukion lopussa ja heidän matematiikka-asenteissaan tapahtuneet muutokset. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 9(1), 804–843. <https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.1.1609>

- Oikkonen, J. (2009). Ideas and results in teaching beginning maths students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(1), 127–138.
- Opetushallitus. (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. Haettu 25.8.2022 osoitteesta https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf
- Opetushallitus. (2019). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*. Haettu 25.8.2022 osoitteesta https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf
- Reinholz, D. L. (2015). The assessment cycle: a model for learning through peer assessment. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, 41(2), 1–15.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511499944>
- Tall, D. (1994). Cognitive difficulties in learning analysis. Haettu 25.8.2022 osoitteesta: <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1994h-analysis-talum.pdf>
- Tao T. (2014). *Analysis I*. (3. painos). Hindustan Book Agency.
- Tähtinen, J., Laakkonen, E & Broberg, M. (2020). *Tilastollisen aineiston käsittelyn ja tulkinnan perusteita*. (2. painos). Turun yliopiston kasvatustieteiden laitos.
- Tutkimuseettinen neuvottelukunta (2019). *Ihmiseen kohdistuvan tutkimuksen eettiset periaatteet ja ihmistieteiden eettinen ennakoarviointi Suomessa*. (Tutkimuseettisen neuvottelukunnan julkaisu 3/2019). TENK.
- Reaali-analyysin opetussuunnitelma 2021–2022. Itä-Suomen yliopisto. Haettu 5.8.2022 osoitteesta <https://opas.peppi.uef.fi/fi/opintojakso/3316432/86327>
- Roschelle, J., & Teasley, S. (1995). The construction of shared knowledge in collaborative problem solving. Teoksessa: C. O. Malley (toim.). *Computer-supported collaborative learning* (ss. 69–197). Springer-Verlag.