# MURTOLUKUJEN LASKUTOIMITUSTEN ANKKUROIVA METAFORA

Martina Aaltonen

Helsingin yliopisto

## TIIVISTELMÄ

*Ankkuroivien metaforien avulla matematiikan abstraktit käsiteet voidaan palauttaa sellaisiin yleisiin kokemuksiin, joita jokaisella ihmisellä on omasta kehostaan ja sen toiminnasta ympäröivässä maailmassa. Tässä tutkimuksessa kehitetään puutikkukokoelmiin perustuva ja ihmisen näköaistia hyödyntävä ankkuroiva metafora murtoluvuille, joka on samaan aikaan yhteensopiva sekä murtolukujen ekvivalenssin, että kaikkien murtolukujen laskutoimitusten kanssa. Lakoff ja Núñez (2000) ovat esitelleet aritmetiikalle neljä perustavanlaatuista ankkuroivaa metaforaa, jotka toimivat kehitystyön perustana, mutta joista yksikään ei sovi sellaisenaan yhteen murtolukujen kerto- ja jakolaskun kanssa. Kehitystyön tavoitteena on tukea mahdollisuuksia eheän murtolukukäsitteen kehittymiselle.*

## JOHDANTO

Kognitiotieteen mukaan kokemukset oman kehon liikkeistä ja käsillä tekemisestä luovat pohjan kaikelle ajattelulle (Lakoff & Núñez, 2000; Soto-Andrade 2014). Matematiikastakin voi tulla käsitettävää, kun se riisutaan symboliikasta, tuodaan tuttuun ympäristöön ja palautetaan maailmassa vallitseviin yleisiin lainalaisuuksiin. Tässä tutkimuksessa lähestytään kysymystä siitä, miten murtoluvuista ja niiden laskutoimituksista voitaisiin muodostaa eheä käsitys.

Murtolukujen peruslaskutoimitukset voidaan suorittaa mekaanisesti noudattamalla murtolukujen laskusääntöjä. Tämä ei kuitenkaan varsinaisesti edellytä, eikä liioin osoita, että ihmiselle olisi muodostunut käsitys murtoluvuista. Sujuvan laskemisen sisältämä prosessitaito ja ymmärtämiseen liittyvän käsitetieto nähdään matematiikan didaktiikassa yleensä erillisinä matemaattisina kompetensseina (Kilpatrick ym., 2005). Matemaattisten kompetenssien näkökulmasta tässä tutkimuksessa keskitytään murtolukuihin liittyvän käsitetiedon muodostumiseen.

Matematiikan ainedidaktisessa tutkimuksessa murtolukuja pidetään yhtenä vaikeimmista koulumatematiikan käsitteistä (Boero ym., 2016; Joutsenlahti & Perkkilä, 2021; Siegler & Pyke, 2013), mikä tekee niiden opettamisesta erityisen kiehtovan tutkimusaiheen. Selityksiä murtolukujen oppimisen haasteille on matema-

VERTAISARVIOITU
KOLLEGIALT GRANSKAD
PEER-REVIEWED
www.tsv.fi/tunnus

tiikan ainedidaktisessa tutkimuksessa aiemmin etsitty muun muassa laskemiseen perustuvasta opetuksesta, joka ei tue käsiteenmuodostusta (Moss & Case, 1999; Ni & Zhou, 2005), mutta myös itse murtoluvun monitulkinnallisesta käsitteestä (Boero ym., 2016) sekä murtolukujen symboliesityksen monimutkaisesta suhteesta luonnollisten lukujen symboliesitykseen (Lamon, 1999; Ni & Zhou, 2005). Erityisen vaikeaksi on niin arkikokemusten kuin tutkimustenkin perusteella osoittautunut käsityksen saaminen murtoluvun jakolaskusta (Ball, 1990; Cramer & Wyberg, 2009).

Murtolukujen opettamiseen liittyvä ainedidaktinen tutkimus on pitkään keskittynyt teoreettisen mallin ympärille, jossa murtolukujen käsite tulkitaan koostuvan useammasta osakäsitteestä, joita ovat murtoluvun tulkinnat mittana (*measure*), suhteena (*ratio*), operaattorina (*operator*) ja osamääränä (*quotient*) (Kieren, 1976; 1988). Tämän teoreettisen mallin pohjalta on murtolukujen didaktisessa tutkimuksessa pohdittu erityisesti eri tulkintojen suhdetta murtolukujen eri laskutoimituksiin (Behr ym., 1983; Lamon, 2007). Murtolukujen eri tulkinnat vaikuttavat kuitenkin nykytutkimuksen valossa olevan kietoutuneita toisiinsa tavalla, joka tekee murtolukujen opettamisen pelkästään yhdestä tulkinnasta käsin mahdottomaksi (Lamon, 1999; 2007). Tässä tutkimuksessa murtolukujen konkreettisia malleja jäsennetään tästä syystä matematiikan ainedidaktisen tutkimuksen valtavirrasta poiketen, murtolukujen eri tulkintojen sijaan, ankkuroivia metaforia hyödyntäen (ks. Berggren, 2022).

Matematiikan ankkuroivat metaforat pohjautuvat Lakoffin ja Núñezin (2000) esittelemään teoriaan. Lakoffin ja Johnsonin (1980) mukaan ankkuroivat metaforat ovat tiedonsiirtomekanismeja, joiden avulla abstrakti käsite voidaan ymmärtää sellaisten konkreettisten kokemusten kautta, joita jokaisella ihmisellä on omasta kehostaan tai sen toiminnasta ympäröivässä maailmassa. Teknisellä tasolla matematiikan ankkuroivat metaforat ovat kuvauksia (Lakoff & Núñez, 2000). Tässä tutkimuksessa ankkuroivia metaforia lähestytään kuvauksina matematiikan sisältä sen ulkopuolelle. Tämän tutkimuksen tavoitteena on kehittää murtoluvuille (positiivisille rationaaliluvuille) mahdollisimman yksinkertainen ankkuroiva metafora, joka on universaali ja yhteensopiva kaikkien murtolukujen laskutoimitusten kanssa.

Teoriaosuudessa perehdytään ensin murtolukuihin matematiikan didaktiikan näkökulmasta. Sen jälkeen esitellään ankkuroivat metaforat matematiikan tiedonsiirtomekanismeina ja käsitellään kysymystä ankkuroivien metaforien luokittelusta. Teoriaosuuden jälkeen esitellään murtolukujen ankkuroivan metaforan kehitystyön vaiheet ja tulokset.

## MURTOLUKUJEN HAVAINNOLLISTAMINEN

Tallin (2004) mallin mukaan matematiikkaa voi lähestyä kolmen maailman kautta, jotka ovat ilmenevä, symbolinen ja formaali maailma. Tässä kappaleessa tarkastellaan murtolukuja ilmenevästä ja symbolisesta maailmasta käsin. Lopuksi verrataan luonnollisten lukujen ja murtolukujen symboliesitysten sekä laskutoimitusten suhdetta toisiinsa.

**Murtolukujen ilmenevästä ulottuvuudesta**

Carbonneaun ja hänen kollegoidensa (2013) mukaan murtolukujen havainnollistaminen konkreettisten välineiden avulla tukee murtolukujen oppimista (ks. Butler ym., 2003). Tästä syystä murtolukuja lähestytään tyypillisesti tarkastelemalla erilaisten joukkojen, tilavuuksien, pinta-alojen ja pituuksien suhteita (Häggblom, 2013).

Joukkojen avulla murtolukuihin voidaan tutustua osana kokonaisuutta. Tähän voidaan käyttää erilaisia esineitä kananmunista pieniin värikuutioihin (Häggblom, 2013). Joukkomallilla on kuitenkin selkeät rajoitukset ja ne tulevat vastaan jo siinä vaiheessa, kun pitäisi siirtyä käsittelemään murtolukujen ekvivalenssia (Cramer & Wyberg, 2009). Kolme kananmunaa neljästä näyttää esimerkiksi harvan silmään samalta kuin kuusi kanamunaa kahdeksasta. Sen vuoksi on joukkomallin puitteissa vaikea vakuuttaa ketään ajattelemaan, että kolme neljäsosaa on ekvivalentti kuuden kahdeksasosan kanssa.

Murtolukujen ekvivalenssin havainnollistamiseen on sen vuoksi parempi käyttää joko tilavuus-, pinta-ala- tai pituusmallia, jossa murtolukujen yhtäsuuruus on mahdollista liittää näköhavaintoon siitä, että tietyt osat niiden havainnollistuksissa ovat yhtä suuret tai yhtä pitkät (Häggblom, 2013). On helppoa vakuuttua kokeilemalla siitä, että kolme neljäsosaa kakusta on täysin sama määrä kakkua kuin kuusi kahdeksasosaa kakusta. Murtolukujen havainnollistamiseen pinta-alamallin avulla käytetään tyypillisesti sektoreihin perustuvaa ympyrämallia tai ruutuihin perustuvaa suorakaiteen muotoista mallia (Häggblom, 2013), joihin liittyen on tuotettu valmiita välineitä, kuten murtokakkuja (Ikäheimo ym., 2021).

Pituusmallin puitteissa murtolukuja voidaan havainnollistaa esimerkiksi valmiiden värisauvojen avulla (Ikäheimo ym., 2021). Värisauvojen käyttö mahdollistaa sen, että muutamia esimerkkejä murtoluvuista voidaan esittää ja vertailla pituusmallissa niin, että yksikkö pysyy koko ajan samana samaan tapaan kuin esimerkiksi ympyrämallissa. Tämä on tärkeää, koska esimerkiksi Lamonin (2007) ja Behrin sekä hänen kollegoidensa (1983) mukaan yksiköllä on aivan olennainen merkitys murtolukuihin liittyvän käsitteellisen ymmärryksen kehittymisessä. Valmiiden värisauvojen avulla ei kuitenkaan kaikkia murtolukuja voida pituusmallin puitteissa esittää samassa yksikössä (rikkomatta välineitä). Muovailuvahasta voi kuitenkin kuka tahansa muovata tähän tarkoitukseen joustavampia värisauvoja tai askarrella niitä tikuista.

**Murtolukujen havainnollistamiseen liittyvistä valinnoista**

Havainnollistamiseen liittyy aina valintoja, jotka vaikuttavat käsitteen muodostukseen. Cramer ja Wyberg (2009) ovat koonneet listan asioita, joihin opettajan olisi heidän mukaansa hyvä kiinnittää huomiota tehdessään valintaansa eri vaihtoehtojen välillä, kun tarkoituksena on havainnollistaa murtolukua osana kokonaisuutta. He kiinnittävät muun muassa huomion siihen, miten havainnollistamisväline tukee mielikuvien syntyä murtoluvuista, murtolukujen suuruuden hahmottamista sekä murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskun ymmärtämistä. Cramer ja Wyberg (2009) kiinnittävät lisäksi erityistä huomiota siihen, millainen yhteys yhteen- ja vähennyslaskuun liittyvillä konkreettisilla toiminnoilla on murtolukujen yhteen- ja vähennyslaskualgoritmeihin. Tähän liittyen he nostavat ansiokkaasti esiin sen, että havainnollistamisvälineillä yhteenlaskua ja vähennyslaskua vastaavat konkreettiset toiminnot voidaan laskualgoritmeista poiketen usein suorittaa ilman, että murtolukuja ensin lavennetaan samannimisiksi, ja että tietoa nimittäjien tulosta tarvitaan vasta vastauksen tulkitsemisessa. Näiden näkökulmien pohjalta Cramer ja hänen kollegansa (2008) pitävät ympyrämallia kaikista vahvimpana mallina murtoluvuille.

Gabriel ja hänen kollegansa (2013) pyysivät lapsia piirtämään kuvan annetusta murtoluvusta. Tutkimukseen osallistuneista belgialaisista lapsista valtaosa piirsi ympyrän tai suorakaiteen muotoisen pinta-alamallin joukkomallin sijaan. Yleisin piirros esitti ympyrää, mikä ei sinänsä ole yllättävää. Eheän murtolukukäsitteen näkökulmasta on mielestäni keskeistä kysyä, millaisten mielikuvien rakentuminen tukee eheyttä parhaiten. Pelkkään pituusmalliin perustuvassa opetuksessa mielikuvat olisivat varmasti erilaisia. Murtolukuihin liittyvässä tutkimuksessa on lisäksi tähän liittyen havaittu, että pituusmallin käytöllä on myös selkeitä hyötyjä pinta-alamalliin verrattuna (Hamdan & Gunderson, 2017; Sydney ym., 2019).

Eheän murtolukukäsitteen tukemisen näkökulmasta kiinnitän Cramerin ja Wybergin (2009) neuvojen kohdalla itse erityisesti huomiota siihen, ettei siinä lainkaan pohdita sitä, miten hyvin mallin puitteissa voidaan myöhemmin havainnollistaa murtolukujen kerto- tai jakolaskua. Murtolukuihin liittyvän tietorakenteen eheyden tukemisen näkökulmasta tätä voi perustellusti pitää mallin tärkeänä ominaisuutena (Lehtinen & Merenluoto, 2004). Mielestäni ympyrämallia ei esimerkiksi voida Cramerin ja kollegoiden (2008) ja Cramerin ja Wybergin (2009) tutkimusten perusteella pitää suoraan parhaana mallina eheän murtolukukäsitteen opettamiseen ennen kuin sitä ja sen vaihtoehtoja on arvioitu myös kerto- ja jakolaskun havainnollistamisen näkökulmasta.

### Murtolukujen symbolisesta ulottuvuudesta ja suhteesta luonnollisiin lukuihin

Luonnollisten lukujen symbolisessa esityksessä vastaa jokaista luonnollista lukua oma yksikäsitteinen symboliesitys. Tämä lukujen ja symboliesitysten yksi-yhteen vastaavuus tuo lukukäsitteeseen paljon selkeyttä. Tämän vuoksi on kenties hyvinkin huomionarvoista didaktisesta näkökulmasta, ettei yhdelläkään murtoluvulla ole yksikäsitteistä esitystä symbolisessa muodossa, kuten Van Dooren (2015) nostaa esille. Esimerkiksi symbolit 3/4 ja 6/8 viittaavat samaan murtolukuun. Murtolukuun voidaan siis viitata symbolimuodossa vain sen edustajan kautta. Tämä tarkoittaa myös sitä, että yhteen ja samaan murtolukuun liitetään useita erilaisia symboliesityksiä. Murtolukujen yhtäsuuruutta ei esimerkiksi tästä syystä voi ratkaista pelkästään symbolisia esityksiä vertaamalla kuten luonnollisten lukujen kohdalla.

Havainnollistaen voidaan ajatella, että murtoluku on kuin perhe, jolla ei ole yhteistä sukunimeä. Tällöin perheeseen voidaan viitata vain sanomalla, että se on jonkin siihen kuuluvan perheenjäsenen perhe. Matin perhe ja Maijan perhe voivat toki oikeassakin elämässä olla yksi ja sama perhe. Tällaisessa viittaustavassa voi kuitenkin tulla helposti myös sekaannuksia. Kiinnittäisin tässä kohtaa huomion siihen, että eheän murtolukukäsitteen kehittymisen näkökulmasta voi olla haasteellista, ettei murtoluvuilla ole luonnollisten lukujen tapaa yksikäsitteistä symboliesitystä tai nimeä.

Murtolukujen symbolinen esitys on yhteydessä luonnollisten lukujen symboliesitykseen. Tämä yhteys on kuitenkin monimutkainen ja paikoitellen jopa harhaanjohtava kuten Ni ja Zhou (2005) nostavat esille. Tällaisia ongelmia kutsutaan tutkimuskirjallisuudessa luonnollisten lukujen harhaksi (*natural number bias*). Murtolukujen laskutoimitusten suorittamisessa on havaittu erityisiä ongelmia siinä, että oppilaat luottavat murtoluvuilla operoidessaan liikaa luonnollisten lukujen parissa saamaansa intuitioon. Tämä voi aiheuttaa haasteita esimerkiksi tehtävissä, joissa murtoluvut $1/2$ ja $1/3$ pitäisi laittaa suuruusjärjestykseen tai laskea yhteen (Van Hoof ym., 2015). Tällä hetkellä ei ole selvyyttä siitä, voidaanko sen murtolukujen oppimiselle aiheuttamia haasteita kokonaan voittaa (Boero ym., 2016).

Haluan vielä kiinnittää erityistä huomion siihen, että, vaikka luonnollisiin lukuihin liittyvä väärä intuitio näyttää olevan yhteydessä sekä murtolukujen symboliesitykseen (Van Dooren, 2015), että siihen, miten sen on yhteydessä luonnollisten lukujen symboliesitykseen (Ni ja Zhou, 2005), on käsitteiden tasolla kuitenkin olemassa ainakin yksi olennainen ero, jossa luonnollisten lukujen parissa saatu intuitio voi helposti johtaa harhaan. Luonnollisten lukujen kohdalla kertolasku palautuu aina yhteenlaskuksi, eli kertolaskun suorittamisen sijaan voidaan laskea kertojan verran yhteen kerrottavia. Murtolukujen kohdalla näin ei kuitenkaan ole. Tästä seuraa, että murtolukujen jakolasku ja kertolasku eivät noudata samoja sääntöjä kuin luonnollisten lukujen vastaavat laskutoimitukset. Van Doorenin (2015) mukaan tämä voi olla monen murtolukuihin liittyvän virhekäsityksen taustalla.

**Murtoluvun osakäsitteet**

Tässä kappaleessa esitellään murtolukuihin liittyvät osakäsitteet ja kiinnitetään huomio muutamaan niihin liittyvään haasteeseen murtolukujen havainnollistamisen näkökulmasta.

Murtolukujen opettamiseen liittyvä ainedidaktinen tutkimus on pitkään keskittynyt teoreettisen mallin ympärille, jossa murtolukujen käsite tulkitaan koostuvan useammasta osakäsitteestä tai tulkinnasta, joita ovat murtoluvun tulkinnat mittana (*measure*), suhteena (*ratio*), operaattorina (*operator*) ja osamääränä (*quotient*) (Kieren 1976; 1988). Behr ja hänen kollegansa (1983) näkivät näiden kaikkien tulkintojen kumpuavan kokonaisen ja osan välisen suhteen ymmärtämisestä (*part-whole*) sekä taidosta jakaa kokonainen yhtä suuriin osiin (*partitioning*).

Behr ja hänen kollegansa (1983) liittivät murtoluvun ekvivalenssin murtoluvun tulkintaan suhteena, murtolukujen yhteenlaskun murtoluvun tulkintoihin mittana sekä kokonaisen ja osan välisenä suhteena sekä murtolukujen kertolaskun murtoluvun tulkintaan operaattorina. Murtoluvun tulkinnan osamääränä Behr ja hänen kollegansa (1983) yhdistivät vain murtolukuihin liittyviin ongelmanratkaisutehtäviin murtolukujen muiden tulkintojen ohella. Behrin ja hänen kollegoidensa (1983) mukaan eheä murtolukukäsite muodostuu lopulta siitä, että ymmärtää miten murtoluvun eri osakäsitteet ovat kietoutuneita toisiinsa. Kokonaiskäsityksen rakentuminen on kuitenkin monimutkainen prosessi, jonka vaiheita ei tunneta hyvin (Pitkethly & Hunting, 1996). Joutsenlahden ja Perkkilän (2021) mukaan luokanopettajaopiskelijoiden joukossa on jopa havaittavissa merkkejä siitä, ettei murtoluvuista ole ylipäätään muodostunut eheää kokonaiskäsitystä.

Murtolukujen didaktisessa tutkimuksessa on pohdittu laajasti erityisesti eri tulkintojen suhdetta murtolukujen eri laskutoimituksiin ja sitä, mistä tulkinnasta olisi parasta lähteä opetuksessa liikkeelle (Behr ym., 1983; Lamon, 2007). Näissä tutkimuksissa murtolukujen ekvivalenssin ja laskutoimitusten opettaminen pelkästään yhdestä osakäsitteestä käsin on erityisesti osoittautunut käytännössä mahdottomaksi (Lamon, 1999; 2007). Lamonin (2007) mukaan murtolukujen kertolasku näyttää esimerkiksi edellyttävän tavalla tai toisella murtoluvun ymmärtämistä operaattorina, mikä ei kuitenkaan ole riittävä pohja esimerkiksi murtolukujen yhteenlaskun näkökulmasta. Lamon (2007) nostaa esille myös sellaisen huomionarvoisen seikan, että vaikka murtolukujen tulkinta suhteena luo luontevan pohjan murtolukujen ekvivalenssin ymmärtämiselle, ei suhteita kuitenkaan voida laskea yhteen samoilla laskusäännöillä kuin murtolukuja (ks. Joutsenlahti & Perkkilä, 2021).

Tässä tutkimuksessa murtolukujen konkreettisia malleja jäsennetään matematiikan ainedidaktisen tutkimuksen valtavirrasta poiketen Berggrenin (2022) tapaan ankkuroivia metaforia hyödyntäen, koska tutkimuksen tavoitteena on kehittää malli, joka kietoo useampia murtolukujen osakäsitteitä yhteen.

## JOHDATUS METAFORATEORIAAN

Kognitiotieteessä tehtyjen havaintojen perusteella ihmisen kehon, aivojen ja jokapäiväisen toiminnan yksityiskohtainen luonne ohjaa ihmisen käsiteenmuodostusta ja päättelyä. Mekanismia, jolla abstrakti käsite ymmärretään konkreettisen kautta, kutsutaan yleisesti käsitteelliseksi metaforaksi (*conceptual metaphor*) (Lakoff & Núñez, 2000; Soto-Andrade, 2014). Tässä luvussa esitellään ensin metaforat yleisinä tiedonsiirtomekanismeina. Sen jälkeen tutustutaan siihen, millaisia metaforia matematiikan ymmärtämiseen liittyy, ja pohditaan sitä, miten matematiikkaan liittyviä metaforia voisi mielekkäästi luokitella.

**Metaforat tiedonsiirtomekanismeina**

Tutkijat Lakoff ja Johnson (1980; 1999) esittelivät metaforat tiedonsiirtomekanismeina, joita ihmiset käyttävät yrittäessään ymmärtää ympäristöään. Metaforien avulla he pystyivät liittämään monia kielessä yleisesti käytettyjä käsitteitä ihmisen fyysisiin kokemuksiin kehostaan ja sen toiminnasta ympäröivästä maailmasta. He huomasivat esimerkiksi, että käsitteet ylhäällä ja alhaalla liitetään kielessä hyvin universaalisti tiettyihin tunnetiloihin ja käytösmalleihin. Suomenkieliset sanat käsite ja käsittää juontavat puolestaan juurensa sanaan käsi (Huotilainen, 2019), mikä on abstraktin ajattelun kehollisuuden näkökulmasta jo sinällään erittäin kiinnostavaa.

Lakoff alkoi pari vuosikymmentä myöhemmin tutkia, yhteistyössä toisen tutkijan Núñezin kanssa myös sitä, perustuvatko lopulta myös matematiikan abstraktit käsitteet ja päättelysäännöt ihmisen kehollisiin kokemuksiin maailmasta. Lakoff ja Núñez (1997; 2000) tulivat siihen lopputulokseen, että käsitteenmuodostuksen yleiset periaatteet näyttävät pätevän suuressa määrin myös matematiikassa. Carreiran (2001) ja Núñezin (2008) mukaan matemaattiset ideat näyttävät kumpuavan metaforista. Tätä näkemystä tukee myös matemaatikko Hadamardin (1954) introspektio ja vertaisilleen teettämä tutkimus, jossa ilmenee, että monet suuret matemaatikot hyödynsivät mielikuvia matemaattisia ongelmia ratkaistessaan.

**Metaforat ja matematiikka**

Lakoff ja Núñez (2000) esittelevät teoksessaan metaforia, jotka liittyvät matematiikan ymmärtämiseen. Teknisellä tasolla metaforat määritellään kuvauksina. Metaforan avulla voidaan matematiikan käsitteitä ja rakenteista siirtää matematiikan sisällä esitystavasta toiseen. Tällaisen matematiikan sisäisen metaforan avulla voi esimerkiksi uusi matemaattinen käsite tulla ihmiselle ymmärrettäväksi jonkin ennestään käsitetyn määritelmän kautta. Lakoff ja Núñez (2000) kutsuvat tällaista matematiikan sisäistä kuvausta yhdistäväksi metaforaksi (*linking metaphor*). Esimerkiksi murtoluvut voidaan tällaisen metaforan avulla käsittää desimaalilukuina.

Käsitteellisen metaforan avulla voidaan matemaattisia käsitteitä toisinaan onnistuneesti myös matematiikan sisältä sen ulkopuolelle, ihmisen aistein havaitsemaan fyysiseen ympäröivään todellisuuteen. Tällöin koostuu metaforaan liittyvän kuvauksen lähtö- tai maalijoukko (hyvin määritellystä) joukosta fyysisiä objekteja. Tällaiseen joukkoon voidaan määritellä laskutoimitus esimerkiksi sääntöjen avulla toteutettavissa olevana konkreettisena toimintana, jossa kahdesta joukon fyysisestä objektista muokataan objekti, joka edelleen kuuluu samaan joukkoon. Lakoff ja Núñez (2000) kutsuvat tällaista kuvausta ankkuroivaksi metaforaksi (*grounding metaphor*). Esimerkiksi kahden luonnollisen luvun yhteenlasku voidaan ankkuroivan metaforan kautta palauttaa kahteen kivikokoelmaan ja niiden yhdistämiseen. Lakoff ja Núñez (2000) esittelevät näiden kahden metaforatyypin lisäksi vielä uudelleen määrittävän metaforan (*redefinitional metaphor*), jonka kautta tutulle käsitteelle voidaan antaa uusi tekninen merkitys.

**Luokittelu laskutoimitusten yhteensopivuuden perusteella**

Matematiikan metaforat ovat hyvin määriteltyjä kuvauksia ja sen vuoksi niitä voidaan luokitella matematiikan kuvausten tapaan. Matematiikassa kuvaus määritellään alkioista koostuvan lähtöjoukon ja alkioista koostuvan maalijoukon välisenä sääntönä, joka liittää jokaiseen lähtöjoukon alkioon yksikäsitteisen alkion maalijoukosta (Häsä & Rämö, 2015). Kuvauksen kuvajoukoksi kutsutaan sitä maalijoukon osajoukkoa, jolle kuvauksessa kuvautuu jokin alkio (Häsä & Rämö, 2015).

Kuvauksia voidaan matematiikan välinein ensinnäkin tarkastella siitä näkökulmasta, että ovatko ne injektioita tai surjektioita. Kuvaus on *injektio*, jos kaikki lähtöjoukon alkiot kuvautuvat eri alkioille, ja *surjektio*, jos jokaiselle maalijoukon alkiolle kuvautuu jokin alkio lähtöjoukosta (Häsä & Rämö, 2015). Metaforakuvaukselta on mielestäni perustellusti yleensä hyvä edellyttää, että se on vähintään injektio, koska kuvauksen ei haluta kadottavan tietoa lähtöjoukosta. Sen ei kuitenkaan mielestäni välttämättä tarvitse olla surjektio. Esimerkiksi hyödyllinen yhdistävä metafora, joka kuvaa murtoluvut lukusuoralle pisteiksi ei ole surjektio, koska kaikki reaaliluvut eivät ole murtolukuja. Se on kuitenkin injektio.

Matematiikassa joukon laskutoimitus määritellään kuvauksena, jossa lähtöjoukkona on joukon alkiopareista koostuva joukko ja maalijoukkona joukko itse (Häsä & Rämö, 2015). Laskutoimitus voidaan määritellä lukujoukkoon muodostamalla sääntö, joka liittää jokaiseen alkiopariin kolmannen alkion joukosta. Täysin samalla periaatteella laskutoimitus voidaan määritellä konkreettisena operaationa joukossa, joka koostuu objekteista. Tärkeää on vain kiinnittää huomiota siihen, että kaikkien alkioiden on kuuluttava samaan joukkoon, jotta sääntö määrittelisi joukkoon laskutoimituksen.

Tarkastellaan muutamaa esimerkkiä. Murtolukujen $1/4$ ja $1/2$ tulo on murtoluku $1/8$. Tätä kertolaskua voidaan havainnollistaa murtolukujen operaattoritulkintaa hyödyntämällä niin, että otetaan yksi neljäsosa puolikkaasta pitsasta, ja saadaan vastaukseksi yksi kahdeksasosa pitsasta. Tässä esimerkissä kerrottava ja vastaus ovat konkreettisia objekteja, mutta kertoja on ohje, jolloin kyse ei ole kokonaisista pitsoista ja pitsojen sektoreista koostuvan joukon laskutoimitus. Samaa kertolaskua voidaan havainnollistaa myös suorakaidemallilla (Häggblom, 2013; Muuttuja 2020), jossa kertoja ja kerrottava ovat pituuksia ja vastaus niiden tulona saatava pinta-ala. Myöskään tässä tilanteessa ei ole kyse laskutoimituksesta, koska vastaus ei ole samaa muotoa kuin kertoja ja kerrottava. Murtolukujen 1/4 ja 1/2 summa on murtoluku ¾. Tätä murtolukujen yhteenlaskua voidaan Crameria ja Wybergia (2009) seuraten puolestaan hyvin havainnollistaa niin, että yhdistetään yksi neljäsosa yhdestä pitsasta ja puolet toisesta niin, että saadaan vastaukseksi kolme neljäsosaa pitsasta. Pitsoista ja pitsojen murto-osia vastaavista sektoreista koostuvaan joukkoon voidaan siten määritellä luonnollisella tavalla laskutoimitus, joka vastaa murtolukujen yhteenlaskua.

Tarkastellaan sitten lähemmin metaforia tilanteessa, jossa kuvauksen lähtöjoukossa ja maalijoukossa on kummassakin määritelty yksi tai useampi laskutoimitus, kuten yhteenlasku tai kertolasku. Tällöin on aina mahdollista tarkastella, onko joukkojen välillä määritelty kuvaus yhteensopiva myös niiden laskutoimitusten suhteen. Yhteensopivuudella tarkoitetaan tässä käytännössä sitä, että laskutoimituksen suorittamisen ja kuvauksen ottamisen järjestystä voidaan vaihtaa ilman, että se vaikuttaa lopputulokseen. Kuvausten homomorfiateorian (Häsä & Rämö, 2015) pohjalta on mahdollista tarkastella erikseen metaforien yhteensopivuutta pelkästään yhteenlaskun tai yhteenlaskun ja kertolaskun osalta. Tämä lähestymistapa antaa seuraavan hierakkisen luokittelun:

1) Metafora on yhteensopiva yhteenlaskun ja kertolaskun suhteen.
2) Metafora on yhteensopiva yhteenlaskun suhteen.
3) Metafora on hyvin määritelty joukkojen välinen kuvaus.

Esimerkiksi yhdistävä metafora, joka kuvaa murtoluvut lukusuoralle pisteiksi on yhteensopiva sekä yhteenlaskun että kertolaskun suhteen.

Metaforien kohdalla keskiöön nousee laskutoimitusten ja kuvausten olemassaolon sijaan kuitenkin kysymys siitä, kuinka hyviä ominaisuuksia niillä on, ei teoreettisesti, vaan konkreettisen toiminnan tasolla. Tähän näkökulmaan perehdytään seuraavaksi.

**Luokittelu toiminnan luontevuuden ja yleisyyden perusteella**

Ankkuroivien metaforien ideana on Lakoffin ja Núñezin (2000) mukaan avata matematiikan käsitteitä ja rakenteita sellaisten arkipäiväisten kokemusten kautta, jotka ovat yhteisiä kaikille ihmisille ajasta, paikasta ja kulttuurista riippumatta. Tästä syystä ankkuroivia metaforia ja niiden laskutoimituksia on luontevaa arvioida myös siitä näkökulmasta, kuinka yleisiä ovat ne toiminnot ja taidot, joita ne edellyttävät.

Universaalin tason yleisyys edellyttäisi mielestäni esimerkiksi sitä, että myös metsästäjä-keräilijänä eläneet esi-isämme olisivat pystyneet suorittamaan toiminnon siitä huolimatta, ettei heillä todennäköisesti ollut taitoa laskea tarkasti kuin lukusanoilla yksi, kaksi, kolme, muutama ja monta. Kulttuurisella tasolla yleisyys edellyttäisi mielestäni kuitenkin vain sitä, että kulttuurissa on yleisesti saatavissa koulutusta ja apuvälineitä toimintojen suorittamiseen. Tiivistän ajatukseni seuraavaksi luokitteluksi:

1) Toiminta on universaali, johdonmukaisesti sääntöjen mukaan etenevä luonnollinen toimintasarja, jonka voisi ohjeistaa kaikkien kulttuurien täysivaltaisille edustajille, ajasta, paikasta ja kulttuurista riippumatta.
2) Toiminta on kulttuurin sisällä yleinen, johdonmukaisesti sääntöjen mukaan etenevä selkeä toimintasarja, joka ei ole universaali, mutta jonka voisi ohjeistaa kaikille tietyn kulttuurin täysvaltaisille edustajille.
3) Toiminta ei ole yleistä, vaan toimintasarja edellyttää taitoja, joita ei voi pitää yleisinä taitoina edes kulttuurin täysivaltaisten edustajien keskuudessa.

Kaikki toiminta, joka voidaan suorittaa pelkästään hallitsemalla yksi-yhteen vastaavuus, on mielestäni luonteeltaan universaalia. Dehaenen (2011) esittelemien tutkimustulosten pohjalta universaalia toimintaa ei kuitenkaan ole toiminta, joka edellyttää lukukäsitteen olemassaoloa, laskutaitoa kolmen ylittävillä luvuilla tai taitoa jakaa objekti moneen yhtä suureen osaan. Anu Tuominen (2021) esimerkiksi nostaa esille, että jo objektin jakaminen kolmeen yhtä suureen osaan on usein haastavaa. Tällainen ei-universaali toiminta voi kuitenkin koulutuksen ja apuvälineiden, kuten viivoittimien ja laskimien avulla olla hyvinkin yleistä yksittäisen kulttuurin sisällä.

**Aritmetiikan perusmetaforat**

Lakoff ja Núñez (2000) liittävät aritmetiikan yhteenlaskuun ja kertolaskuun liittyvät perusmetaforat kokoelmien muodostamiseen, esineiden rakentamiseen osista, mittatikulla mittaamiseen ja liikkumiseen polkua pitkin. Björklundin (2016) mukaan käänteinen ajattelu on yksi matemaattisen ajattelun kulmakivistä (ks. Piaget, 1968; 1972; 1977). Sitä hyödyntäen vähennyslasku voidaan ankkuroida yhteenlaskuun ja jakolasku kertolaskuun. Tässä kappaleessa esitellään Lakoffin ja Núñezin (2000) aritmetiikan neljä perusmetaforaa, jotka toimivat kehitystyön pohjana, ja analysoidaan lyhyesti niiden yhteensopivuutta murtolukujen ekvivalenssin sekä murtolukujen yhteenlaskun ja kertolaskun kanssa.

*Aritmetiikka on esinekokoelmien muodostamista*

Lakoffin ja Núñezin (2000) esinekokoelmiin pohjautuvan metaforan kontekstissa luonnollista lukua edustaa sellainen kokoelma esineitä, jossa esineiden lukumäärä vastaa esitettävää lukua. Yhteenlasku voidaan suorittaa tässä Lakoffin ja Núñezin (2000) metaforassa seuraavasti: Ensin muodostetaan yhteenlaskettavista erilliset esinekokoelmat, joissa on yhteenlaskettavien verran esineitä. Sen jälkeen yhdistetään kokoelmat yhdeksi kokoelmaksi, jossa esineiden lukumäärä vastaa yhteenlaskettavien lukujen summaa.

Esinekokoelmiin pohjautuvan metaforan kontekstissa Lakoff ja Núñez (2000) palauttavat kertolaskun yhteenlaskuun. Kertolaskun suorittamiseksi voidaan esimerkiksi ensin muodostaa kertojasta esinekokoelma, jossa on kertojan verran esineitä. Sen jälkeen voidaan muodostaa samaan tapaan kerrottavasta uusi erillinen esinekokoelma jokaista esinettä kohden, joka on kertojaa vastaavassa kokoelmassa. Lopuksi yhdistetään erilliset kokoelmat yhdeksi kokoelmaksi esineitä.

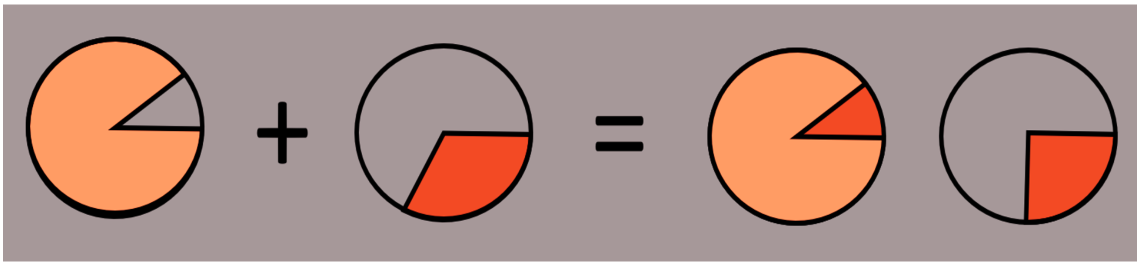
Lakoff ja Núñez (2000) eivät käsittele lainkaan murtolukuja esinekokoelmiin pohjautuvan metaforan kontekstissa. Tämä on ymmärrettävää, koska murtolukujen ekvivalenssin määrittelyssä muodostuu jo ongelma esineiden erillisyydestä johtuen (ks. Berggren, 2022).

*Aritmetiikka on esineiden rakentamista osista*

Esineiden rakentamiseen liittyvässä metaforassa Lakoff ja Núñez (2000) lähtevät liikkeelle määrittelemällä yksiköksi kokonaisen esineen, jolloin murto-osalle syntyy luonteva esitys kokonaisen esineen osana. Tästä seuraa, että sekaluvulle saadaan tässä metaforassa esitys kokoelmana, joka koostuu kokonaisista esineistä ja yhdestä esineen osasta: Kokoelman muodostamiseksi kokonainen esine voidaan ensin jakaa yhtä suuriin osiin niin, että osia on murto-osan nimittäjän verran, ja sen jälkeen valita tällaisia osia murto-osan osoittajan verran. Sen jälkeen kokoelmaan voidaan ottaa mukaan kokonaisia esineitä sekaluvun kokonaisten verran.

Lakoff ja Núñez (2000) määrittelivät ekvivalenssin tässä esineiden rakentamiseen liittyvässä metaforassa esineiden (ja niiden osien) tilavuuksien yhtäsuuruuden tai pinta-alojen yhtäsuuruuden kautta. Yhteenlaskun Lakoff ja Núñez (2000) määrittelivät samaan tapaan kuin esinekokoelmien muodostamiseen liittyvässä metaforassa, mutta sillä erotuksella, että esineen osia voidaan myös koota kokonaisiksi esineiksi ja esineiden osiksi niin, että korkeintaan yksi murto-osaa edustava esineen osa jää yli. Lakoff ja Núñez (2000) määritelevät lisäksi kertolaskun tässä metaforassa samaan tapaan kuin esinekokoelmien muodostamiseen liittyvässä metaforassa, mutta vain niissä erikoistapauksissa, joissa kertolasku on mahdollista palauttaa toistettavaan yhteenlaskuun.

Tarkastellaan vielä ympyrämallia esimerkkinä tästä metaforasta (ks. Cramer & Wyberg, 2009). Määritellään yksiköksi yksi kokonainen ympyrä. Tällöin jokaista murtolukua asetetaan vastaamaan kokoelma samankokoisia kokonaisia ympyröitä ja yksi ympyräsektori, joka vastaa murto-osaa. Ympyrämallissa murtolukujen ekvivalenssi määrittyy pinta-alojen yhtäsuuruuden avulla. Kahden murtoluvun yhteenlaskua vastaavassa operaatiossa yhdistetään summattavia murtolukuja vastaavat kokoelmat saksilla ja teipillä uudeksi kokoelmaksi, joka koostuu kokonaisista ympyröistä ja yhdestä ympyräsektorista (Kuva 1).



Kuva 1. Murtolukujen 11/12 ja 1/3 yhteenlasku ympyröillä.

Ruotsalaisissa oppikirjoissa murtoluvun ankkurointi tähän metaforaan, joka liittyy murtolukujen esittämiseen osana kokonaisuutta, on Berggrenin (2022) mukaan vallitseva. Tämä Lakoffin ja Núñezin (2000) määrittelemä metafora on yhteensopiva murtolukujen ekvivalenssin ja yhteenlaskun kanssa, mutta se ei kuitenkaan sellaisenaan kata kertolaskua yleisessä tapauksessa, jossa kertoja ei ole luonnollinen luku, koska yhteenlaskua ei voida silloin palauttaa toistettavaan yhteenlaskuun.

*Aritmetiikka on mittatikun avulla mittaamista*

Lakoffin ja Núñezin (2000) mittatikkua hyödyntävä metafora on esineiden rakentamiseen liittyvän metaforan yksiulotteinen luonnollinen vastine, jossa yksikköä vastaava esine on mittatikku, ja luvun suuruuden kertoo esineiden ja niiden osien koon sijaan tikkujen ja tikun osien pituus suhteessa mittatikkuun. Lakoff ja Núñez (2000) luovat murtoluvuille esityksen seuraavasti: Yksinkertaiselle murtoluvulle $1/n$ saadaan esitys jakamalla kokonainen mittatikku $n$ osiin niin, että jokainen osa on yhtä pitkä, ja vertaamalla yhden osan pituutta mittatikkuun. Yleiselle murtoluvulle $m/n$ saadaan tämän jälkeen luonnollisesti esitys yhdistämällä luvun $m$ verran tällaisia osajanoja yhteen yhdeksi tikuksi ja tulkitsemalla vastaus suhteessa mittatikkuun. Murtolukujen ekvivalenssi puolestaan määritellään pituuksien yhtäsuuruuden kautta.

Lakoff ja Núñez (2000) määrittelevät edelleen yhteenlaskun ja kertolaskun tässä metaforassa samaan tapaan kuin edellisissä metaforissa, sillä erotuksella, että kaikki osajanat yhdistetään lopuksi yhdeksi pitkäksi tikuksi, jonka pituutta verrataan mittayksikköön. Mittatikkuun liittyvä metafora on esineiden rakentamiseen liittyvän metaforan tapaan yhteensopiva sekä murtolukujen ekvivalenssin, että murtolukujen yhteenlaskun kanssa. Esineiden rakentamiseen liittyvän metaforan tapaan se ei kuitenkaan kata kertolaskua niissä tapauksissa, jossa kertolaskua ei voi palauttaa yhteenlaskuun. Berggrenin (2022) mukaan tämä pituuksiin perustuva malli ei kuitenkaan ole ruotsalaisissa oppikirjoissa kovin yleinen.

*Aritmetiikka on liikettä pitkin polkua*

Lakoffin ja Núñezin (2000) lukusuoraa muistuttavassa metaforassa yksikköä vastaa yksikön mittainen polku ja murtolukua sijainti polulla: Yksinkertaisen murtoluvun $1/n$ esittämiseksi lähdetään liikkeelle määrittelemällä polku, jonka päätepisteiden etäisyys määrittelee yksikön. Sitten ratkaistaan jotenkin etäisyys $d$, joka pitäisi liikkua lähtöpisteestä loppupistettä kohti kerralla, jotta loppupiste saavutettaisi liikkumalla $n$ kertaa saman pituinen matka. Sen jälkeen mennään seisomaan polun lähtöpisteeseen ja liikutaan loppupistettä kohti matkan $d$ verran ja päädytään murto-osaa vastaavaan sijaintiin polulla. Vastaavalla periaatteella kuin mittatikkua hyödyntävässä metaforassa saadaan murto-osalle $m/n$ tämän jälkeen esitys liikkumalla polun lähtöpisteestä $m$ kertaa etäisyyden $d$ verran kohti loppupistettä. Kokonaisia sisältävän sekaluvun esittämiseksi voidaan puolestaan tarvittaessa muodostaa useampi yksikön mittainen polku peräkkäin.

Murtolukujen ekvivalenssi voidaan määritellä luontevasti tässä Lakoffin ja Núñezin (2000) polkua hyödyntävässä metaforassa sijaintia hyödyntämällä esimerkiksi niin, että kaksi murtolukua ovat ekvivalentit, jos samoja ohjeita seuraamalla päädytään seisomaan samaan pisteeseen polulla. Yhteenlaskun suorittamiseksi voidaan puolestaan asettua ensin seisomaan polulla ensimmäistä yhteenlaskettavaa vastaavaan sijaintiin, ja sen jälkeen liikkua polulla eteenpäin saman verran, kuin olisi tarvinnut liikkua eteenpäin polun alkupisteestä, jotta olisi tultu toista yhteenlaskettavaa vastaavaan sijaintiin. Myös tässä metaforassa kertolasku on luonnollisella tavalla määritelty niissä erikoistapauksissa, jossa se voidaan palauttaa toistettavaan yhteenlaskuun.

Tämä polulla liikkumiseen liittyvä metafora sopii hyvin yhteen murtolukujen ekvivalenssin ja yhteenlaskun kanssa, mikä nähdään esimerkiksi tarkastelemalla murtolukuja lukusuoralla. Se ei kuitenkaan sellaisenaan kata murtolukujen kertolaskua yleisessä tapauksessa, jossa kertolaskua ei aina ole mahdollista palauttaa toistettavaan yhteenlaskuun. Ruotsalaisissa oppikirjoissa murtoluvun ankkuroimista tähän metaforaan ei Berggrenin (2022) mukaan juuri kuitenkaan esiinny.

**KEHITTÄMISTYÖN TOTEUTUS**

Tutkimukseni tavoitteena oli kehittää murtolukujen ankkuroiva metafora. Tutkimus on aiempaan tutkimuskirjallisuuteen pohjautuva teoreettinen tutkimus, jossa eri alojen tutkimuskirjallisuutta hyödyntäen kehitettiin murtoluvuille sellaisen ankkuroivan metafora, joka on universaali ja yhteensopiva kaikkien murtolukujen laskutoimitusten kanssa. Ankkuroivan metaforan kehittämisen lähtökohdaksi valitsin teorian pohjalta Lakoffin ja Núñezin (2000) esittelemän aritmetiikan perusmetaforan, jossa aritmetiikka käsitetään mittatikulla mittaamisena. Tämän aritmetiikan metaforan totesin teoriaosassa olevan yhteensopiva murtolukujen ekvivalenssin ja murtolukujen yhteenlaskun kanssa. Samalla totesin kuitenkin, ettei se ollut sellaisenaan yleisesti yhteensopiva murtolukujen kertolaskun kanssa. Tästä syystä kertolasku oli määriteltävä uudella, Lakoffin ja Núñezin (2000) lähestymistavasta poikkeavalla, tavalla. Määrittelin kertolaskun skaalauksena, jossa hyödynnetään sekä murtoluvun tulkintaa operaattorina, että käytännön tasolla ihmisen luontaista kykyä skaalata pituuksia näköaistin avulla. Tällä määritelmällä sain muodostettua murtolukujen ankkuroivan metaforan, joka on yhteensopiva sekä murtolukujen ekvivalenssin, että kaikkien murtolukujen laskutoimitusten kanssa. Pyrin suosimaan ankkuroivaa metaforaa kehittäessäni sellaista toimintaa, joka olisi kaikkien ihmisten kokemuspiirissä. Lisäksi halusin, että murtolukukäsitteessä tärkeä yksikkö olisi puutikun muodossa koko ajan keskeisesti läsnä. Tästä näkökulmasta oli luontevaa lähteä liikkeelle murtoluvun esityksestä kokonaisosista ja murto-osista koostuvana sekalukuna.

Lähdin ensin tutkimaan sitä, miten sekaluvulle saataisiin muodostettua selkeä esitys puutikkujen avulla. Päädyin siihen, että sekaluku kannattaisi esittää maalaamalla käsittelemättömiä yksikön mittaisia puutikkuja, koska näin yksikkö olisi esityksessä selkeällä ja käyttökelpoisella tavalla läsnä. Murtoluvun esitys sekalukuna näytti lisäksi sopivan hyvin yhteen tämän esityksen kanssa.

Sekaluvun esittäminen puutikkukokoelmana näytti kuitenkin vaativan paljon erilaisia taitoja, joita ei voinut pitää universaaleina, kuten numerosymbolien tuntemista, laskutaitoa luonnollisilla luvuilla sekä kykyä jakaa kokonainen puutikku moneen yhtä suureen osaan. Tulin kuitenkin siihen tulokseen, että tämä vaihe olisi joka tapauksessa edellyttänyt sekaluvun symboliesityksen tuntemista, joten ei-universaalien taitojen edellyttäminen olisi kuitenkin ollut jossain määrin väistämätöntä.

Lähdin sitten tarkastelemaan käytännön tasolla, miten Lakoffin ja Núñezin (2000) esittelemä yhteenlasku pituuksien yhdistämisenä kannattaisi toteuttaa valitsemassani esityksessä. Päädyin siihen, että kokonaisia vastaavat puutikut kannattaisi laskea erikseen. Tulin edelleen siihen tulokseen, että muista puutikuista kannattaisi irrottaa värillinen osuus, ja yhdistää se tikuksi, jota voisi helposti verrata yksikön mittaiseen tikkuun (2, Kuva 4). Tällöin yhdistetty tikku olisi myös helppo katkaista yksikön kohdalta, jos se oli sitä pidempi. Tämä vaikutti myös hyvältä ratkaisulta siitä näkökulmasta, että se tarjosi kokemuksen siitä, miten murtoluvun yhteenlaskun vastaus aina tulkitaan suhteessa yksikköön. Lisäksi vähennyslasku pystyttiin luonnollisella tavalla liittämään suoraan yhteenlaskulle käänteiseen toimintaan.

Viimeiseksi lähdin tarkastelemaan murtolukujen kertolaskun ja jakolaskun määrittämistä. Ensin ajattelin, että kertolaskun ja jakolaskun suorittamiseksi olisi hyödynnettävä numeerisia tietoja murtoluvun symboliesityksestä erityisesti siinä tilanteessa, jossa murto-osaa vastaava puutikku oli tarkoitus kertoa murto-osaa vastaavalla tikulla. Sitten kuitenkin keksin, että nämä operaatiot voidaan määritellä tikkukokoelmien joukossa myös hyödyntämällä pelkästään kädentaitoja, näköaistia ja sitä, että näkökentässä esineen kuva muuttuu pienemmäksi, kun se viedään kauemmas silmästä. Tällä tavoin kertolaskusta ja jakolaskusta tuli myös luontaisella ja kiehtovalla tavalla toisilleen käänteiset operaatiot. Tähän perustuen voin todeta, että kehitetty ankkuroiva metafora onnistuttiin liittämään kaikkien laskutoimitusten osalta kaikille ihmisille universaaliin toimintaan, mikä oli yksi tutkimuksen keskeisistä tavoitteista.

Lopuksi perustelen vielä lyhyesti sen, miksi valitsin lähtökohdaksi Lakoffin ja Núñezin (2000) esittelemien aritmetiikan metaforien joukosta juuri pituuksien mittaamiseen liittyvän aritmetiikan perusmetaforan. Tärkeimmäksi tekijäksi valinnassa nousi se, että mittatikulla on moniin muihin esineisiin verrattuna erityinen geometrinen ominaisuus, joka mahdollistaa kertolaskun määrittämisen skaalaamisen avulla. Tämä perustuu siihen, että jana ja sen osajana ovat geometrisesti skaalaamista vaille yhtenevät geometriset objektit. Esineiden rakentamiseen liittyvän aritmetiikan perusmetaforan kontekstissa ei skaalautuvuutta olisi voitu samalla tavalla hyödyntää murtolukujen kertolaskun määrittämisessä. Esimerkiksi ympyrämallissa eivät ympyrän sektorit ole keskenään saman muotoisia, eikä niitä siitä syystä voida visuaalisesti skaalata toisikseen kahden eri mittaisten janojen tavoin. Polulla liikkumiseen perustuva aritmetiikan perusmetaforasta luovuttiin ensisijaisena vaihtoehtona laskutoimitusten suorittamiseen liittyvistä käytännön haasteista johtuen, mutta myös tätä metaforaa harkittiin, koska teoreettisella tasolla kertolasku olisi ollut mahdollista määrittää siinä etäisyyksien skaalauksena. Kokoelmien muodostamiseen perustuvaa metafora suljettiin luonnollisesti pois jo työskentelyn alkumetreillä, koska se ei sovi yhteen murtolukujen kanssa edes ekvivalenssin tasolla, kuten teoriaosassa tuli ilmi.

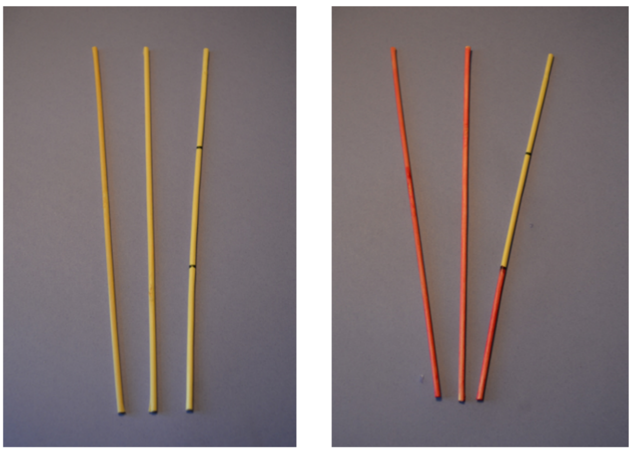
## KEHITTÄMISTUOTOS

Tässä luvussa esitellään tutkimuksessa kehitetty murtolukujen ankkuroiva metafora, joka perustuu murtoluvun esitykseen sekalukuna. Ensin esitellään, miten sekaluku esitetään tikkukokoelmana ja se, miten sekalukujen ekvivalenssi näyttäytyy tikkukokoelmien parissa. Sen jälkeen esitellään sekalukujen yhteenlaskua ja kertolaskua vastaavat laskutoimitusoperaatiot tikkukokoelmilla sekä niiden käänteisoperaatiot.

### Sekaluvun esittäminen puutikkukokoelmana

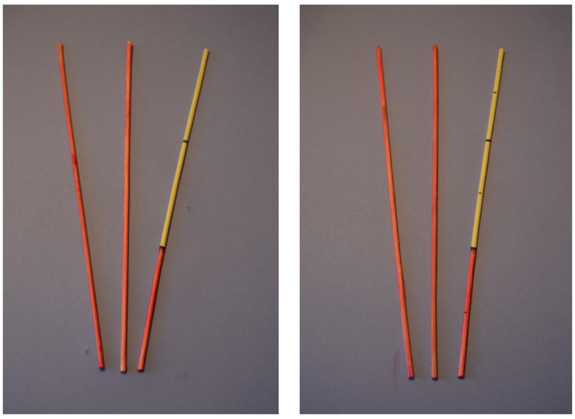
Sekaluvun esittämistä varten tarvitaan käsittelemättömiä puutikkuja, jotka ovat kaikki saman mittaisia. Lisäksi tarvitaan kynä, vesivärit, sivellin, läpinäkyvää teippiä, sakset, viivoitin ja yksinkertainen laskin. Tikun pituus määrää yksikön pituuden. Sekaluku esitetään kokoelmana puutikkuja, jotka maalataan sitä vastaavalla tavalla.

Otetaan ensin sekaluvun kokonaisosan verran puutikkuja ja maalataan ne kokonaan yhdellä ja samalla värillä. Otetaan sen jälkeen murto-osan esittämistä varten yksi käsittelemätön puutikku. Jaetaan se viivoilla yhtä suuriin osiin, niin, että osien lukumäärä vastaa murto-osan nimittäjää. Maalataan sitten niin monta osaa puutikun toisesta päästä, että maalattujen osien lukumäärä vastaa murto-osan osoittajaa. Sekalukua vastaa nyt yksikäsitteinen puutikkukokoelma, jossa on mukana kokonaisosia edustavat puutikut sekä murto-osaa edustava puutikku.



Kuva 2. Sekaluvun $2\frac{1}{3}$ esittäminen tikkukokoelmana.

Tarkastellaan esimerkkinä sekaluvun kaksi kokonaista ja yksi kolmasosa esittämistä tikkujen avulla (Kuva 2). Tässä tapauksessa maalataan ensin kaksi kokonaista käsittelemätöntä puutikkua. Sen jälkeen jaetaan vielä yksi käsittelemätön puutikku kolmeen yhtä suureen osaan, ja maalataan yksi reunimmaisista osista. Sekalukua vastaa nyt kolmesta puutikusta koostuva kokoelma, jossa kaksi puutikkua on maalattu kokonaan, ja kolmannesta puutikusta on maalattu yksi kolmasosa.



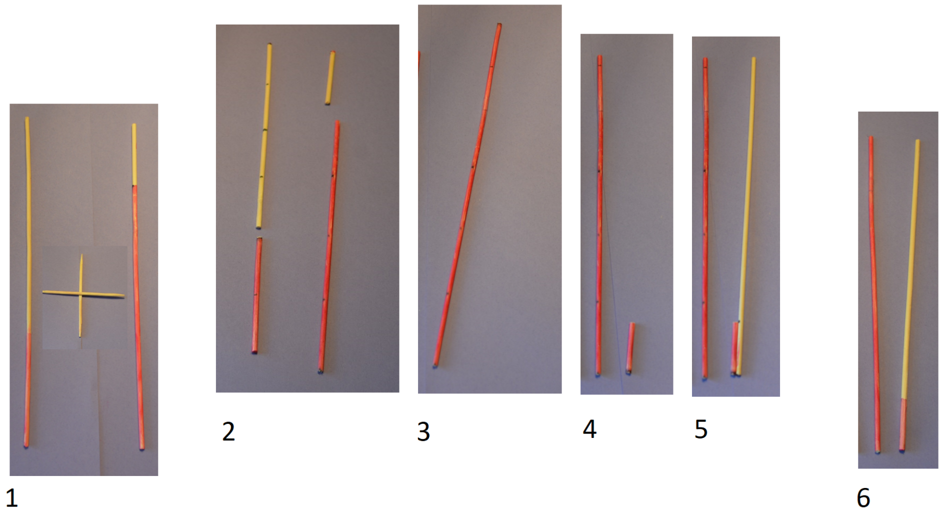
Kuva 3. Sekaluvut $2\,\frac{1}{3}$ ja $2\,\frac{2}{6}$ ovat ekvivalentit. Se voidaan päätellä suoraan siitä, että punaisen osuus puutikkukokoelmissa on sama.

Sekalukujen esitys puutikkukokoelmina on yhteensopiva murtolukujen ekvivalenssin kanssa. Tämä johtuu siitä, että kahdella sekaluvulla on samanlainen esitys puutikkukokoelmina, jos ja vain jos sekaluvut ovat murtolukuina ekvivalentit. Esimerkiksi sekaluvulla kaksi kokonaista ja kaksi kuudesosaa on samanlainen esitys kuin sekaluvulla kaksi kokonaista ja yksi kolmasosa (ks. Kuva 3).

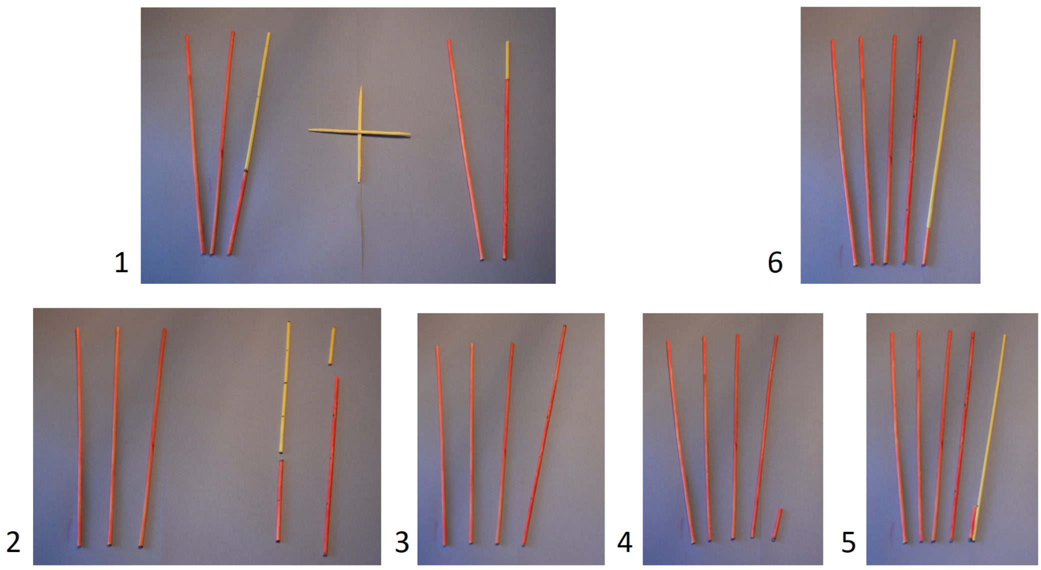
**Sekalukujen yhteenlasku**

Sekalukujen yhteenlasku määritellään puutikkukokoelmien yhteydessä toimintana, jossa kahdesta sekalukua vastaavasta tikkukokoelmasta muodostetaan toimintaohjeita seuraamalla uusi tikkukokoelma (Kuvat 4 ja 5).

Lähdetään yhteenlaskun suorittamiseksi liikkeelle yhteenlaskettavia sekalukuja vastaavista puutikkukokoelmista (1). Otetaan ensin kokonaan väritetyt tikut sivuun tikkukokoelmista yhteen kasaan ja leikataan väritetyt osat irti jäljelle jäävistä tikuista (2). Yhdistetään kolmannessa vaiheessa irti leikatut väritetyt osat teipillä toisiinsa yhdeksi puutikuksi (3). Leikataan neljännessä vaiheessa tästä puutikusta niin monta yksikön mittaista puutikkua, kun siitä on mahdollista saada (4). Maalataan sitten jäljelle jääneen osan pituus käsittelemättömästä puutikusta ja heitetään sen jälkeen alkuperäinen osa pois (5). Lopuksi asetellaan kaikki samanmittaiset puutikut mieleisellä tavalla (6).




Kuva 4. Lukujen 1/3 ja 4/5 yhteenlaskua vastaava operaatio

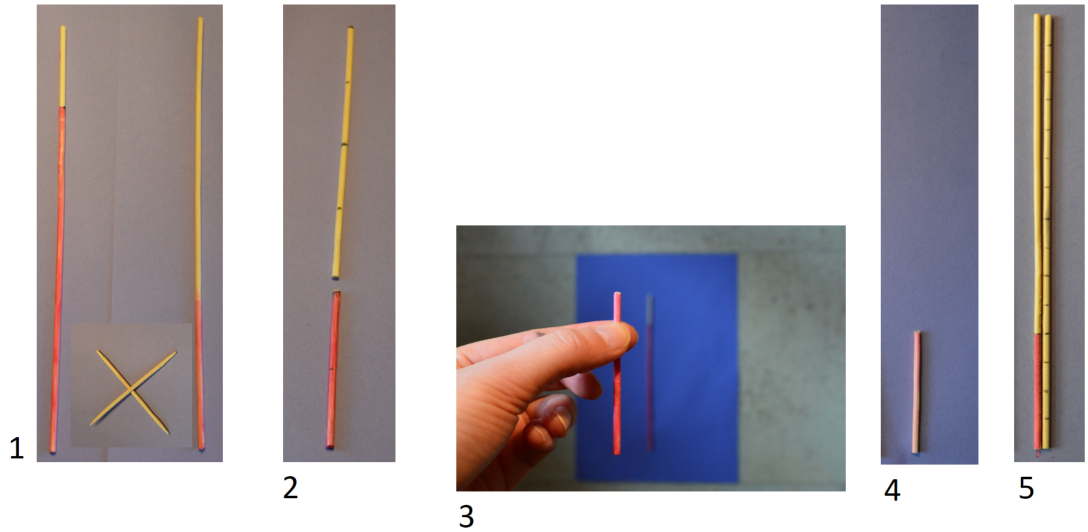



Kuva 5. Sekalukujen $2\frac{1}{3}$ ja $1\frac{4}{5}$ yhteenlaskua vastaava operaatio.

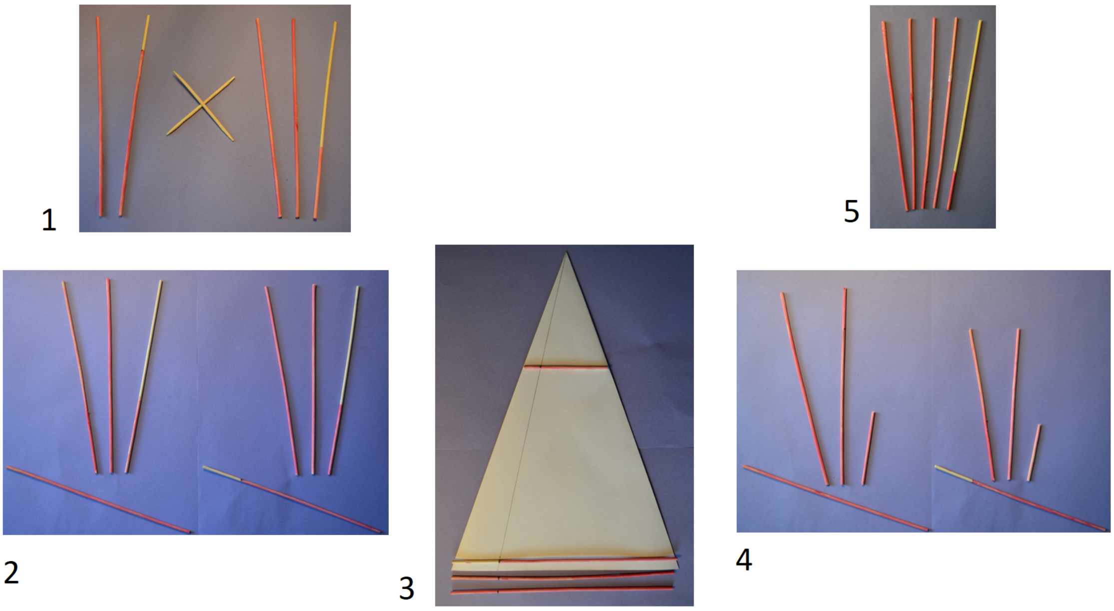
**Sekalukujen kertolasku**

Sekalukujen kertolasku määritellään puutikkukokoelmien yhteydessä yhteenlaskun tapaan toimintana, jossa kahdesta sekalukua vastaavasta puutikkukokoelmasta muodostetaan toimintaohjeita seuraamalla uusi puutikkukokoelma (Kuvat 6 ja 7). Liikkeelle lähdetään tulontekijöitä vastaavista puutikkukokoelmista, jotka on asetettu vierekkäin (1, Kuvat 6 ja 7).

Kertolaskun suorittamisen toisessa vaiheessa muodostetaan oikeanpuoleisesta sekalukua vastaavasta puutikkukokoelmasta kopio jokaista tikkua kohden, joka on vasemmanpuoleisessa sekalukua vastaavassa tikkukokoelmassa (2). Mikäli kopioita on useampia (ks. 2, Kuva 7), pidetään ne tässä vaiheessa huolellisesti erillään toisistaan, ja asetetaan lopuksi puutikku vasemmasta puutikkukokoelmasta jokaisen kopion viereen merkiksi siitä, mitä puutikkua kopio vastaa. Kopioissa voi myös hyvin käyttää selkeyden lisäämiseksi eri väristä maalia. Se korostaa niiden merkitystä ja edesauttaa sitä, että kopioissa olevat puutikut ja niiden viereen merkiksi asetetut puutikut eivät mene sekaisin seuraavienkaan vaiheiden aikana.




Kuva 6. Lukujen 4/5 ja 1/3 kertolaskua vastaava operaatio.




Kuva 7. Sekalukujen $1\frac{4}{5}$ ja $2\frac{1}{3}$ kertolaskua vastaava operaatio.

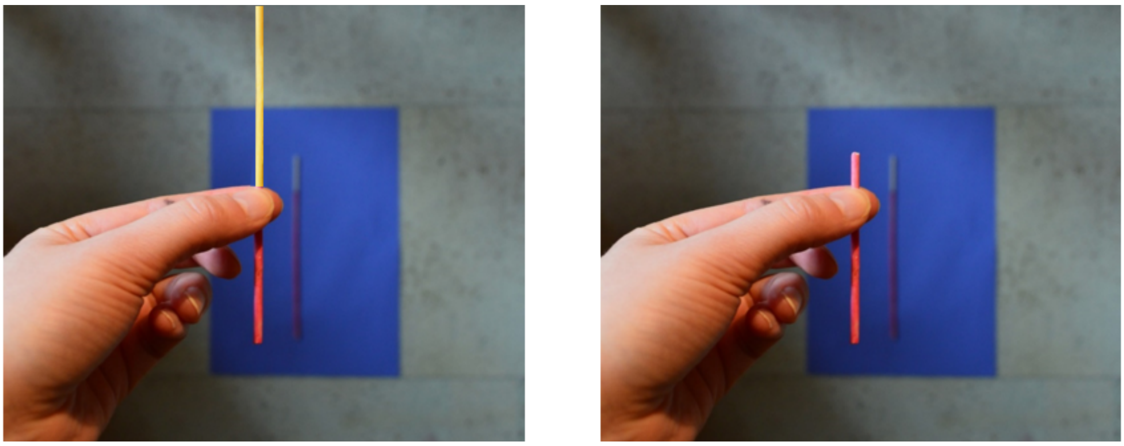
Kolmannessa vaiheessa leikataan ensin irti värilliset osuudet kopioiden kaikista tikuista pitäen huolta siitä, että tikut pysyvät oikeassa puutikkukokoelmassa. Sen jälkeen lyhennetään näin saatuja tikkuja vielä sen verran, että jäljellejäävä osuus värillisestä tikusta vastaa värillisen osan suhdetta puutikussa, joka laitettiin merkiksi sen puutikkukokoelman alle, johon puutikku kuuluu. Kohta, josta puutikku tulee katkaista, saadaan selville asettamalla puutikut näkökentässä niin, että ne näyttävät samanmittaisilta, jolloin suhteita voidaan verrata (3, Kuva 6). Tähän tarkoitukseen voi käyttää myös perspektiivikolmiota (3, Kuva 7). Neljännessä vaiheessa kootaan kaikki kopiosta mukaan otetut värilliset osuudet (4). Viidennessä vaiheessa muodostetaan niistä esitys sekaluvulle puutikkukokoelmana, kuten tehtiin sekalukujen yhteenlaskun tapauksessa (5, Kuvat 6 ja 7).

**Sekalukujen vähennyslasku ja jakolasku**

Tikkukokoelmien joukossa voidaan määritellä yhteenlaskun ja kertolaskun käänteisoperaatioina myös murtolukujen jakolasku ja vähennyslasku (erotuksen ollessa positiivinen), koska yhteenlasku ja kertolasku ovat tässä metaforassa konkreettisia laskutoimituksia, joihin liittyvä toiminta voidaan kääntää.

Esittelen lyhyesti, miten kahden tikkukokoelman avulla esitetyn sekaluvun jakolasku voidaan esimerkiksi suorittaa: Ensin jakajana toimivan murtoluvun tikkukokoelman kaikki tikut yhdistetään laittamalla ne peräkkäin niin, että saadaan yksi (pitkä) tikku, jossa punainen osa on toisessa päässä ja vaalea osa toisessa päässä. Seuraavaksi sama tehdään jaettavalle. Näin saadaan kaksi (pitkää) tikkua, joista toinen vastaa jaettavaa ja toinen jakajaa. Nämä tikut asetetaan näkökentässä (tai perspektiivikolmiossa) niin, että tikkujen punaiset osat näyttävät samanmittaisilta. Tämän jälkeen jaettavaa vastaavan tikun punaisesta osasta otetaan katkaisemalla osa, joka näyttää yhtä pitkältä kuin yksi yksikkötikku jakajaa vastaavassa tikussa (jos punainen osa jakajassa on yksikkötikun mittainen tai pidempi) tai jaettavaa vastaavan tikun punaista osaa pidennetään tähän mittaan (jos punainen osa jakajassa on alle yksikkötikun mitan) (ks. Kuva 8). Lopuksi muodostetaan esitys osamäärää vastaavalle murtoluvulle puutikkukokoelmana, kuten tehtiin yhteenlaskun ja kertolaskun kohdalla.

Vähennyslaskun (erotuksen ollessa positiivinen) osalta yksityiskohtien työstäminen jätetään lukijalle. Huomautan kuitenkin, että kehitettyä metaforaa on myös mahdollista laajentaa positiivisista rationaaliluvuista koko rationaalilukujen joukkoon esimerkiksi ottamalla mukaan negatiivisia lukuja vastaavia tikkukokoelmia, jotka on väritetty samalla tavalla kuin positiiviset vastineensa, mutta eri värillä.



Kuva 8. Erään murtoluvun jakaminen murtoluvulla 4/5.

**Yhteys lukusuoraan, symboliesitykseen ja laskualgoritmeihin**

Murtolukujen tikkukokoelmaesityksen yhteyttä murtolukujen sijaintiin lukusuoralla voidaan helposti tutkia rakentamalla yksikön mittaisista tikuista ensin lukusuora ja asettamalla sen jälkeen lukusuoran viereen murtolukua vastaavan tikkukokoelman tikut sopivasti peräkkäin niin, että yhtenäinen punainen osa alkaa origosta ja päättyy kohtaan, joka on murtoluvun sijainti lukusuoralla.

Tikkukokoelmilla suoritetun laskuoperaation tulosta voi myös verrata laskemalla saatuun tulokseen, ja samalla pohtia yhteyttä tikkukokoelmien joukossa suoritettavien laskutoimitusten ja murtolukujen laskualgoritmien välillä, erityisesti yhteisen nimittäjän etsimisen osalta (Cramer & Wyberg, 2009). Tähän tarkoitukseen sopii yhteen- ja vähennys- ja kertolaskun kohdalla esimerkiksi yksikön mittainen tikku, joka jaetaan viivoilla yhtä suuriin osiin niin, että osien lukumäärä vastaa laskutoimituksessa mukana olevien murtolukujen nimittäjien tuloa (ks. 5, Kuva 6). Murtolukujen yhteenlasku- ja vähennyslaskualgoritmien

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{da}{db}+\frac{bc}{bd}=\frac{da+bc}{bd}$$

ja

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{da}{db}-\frac{bc}{bd}=\frac{da-bc}{bd}$$

sekä kertolaskualgoritmin

$$\frac{a}{b}*\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

ymmärtämisen keskiössä on mielestäni kysymys siitä, miksi juuri tämä tikku toimii vastauksen tulkitsemisessa. Jakolaskun kohdalla voidaan puolestaan käyttää tikkua, jossa osien lukumäärä vastaa kertojan nimittäjän ja jakajan osoittajan välistä tuloa pohtien, miten tämän tikun toimiminen liittyy jakolaskualgoritmin

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}*\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

vaiheisiin. Jotta tarkastelu on mielekästä, on kuitenkin oltava riittävän, muttei kuitenkaan äärettömän, huolellinen sen suhteen, että tikut katkaistaan oikeasta kohtaa, leikkauspinnat ovat suoria ja yhdisteet tiiviitä.

## POHDINTA

Tutkimuksen tavoitteena on ollut kehittää murtoluvuille mahdollisimman yksinkertainen konkreettinen malli, jonka puitteissa on mahdollista havainnollistaa kaikkia murtolukujen laskutoimituksia samaan aikaan. Tutkimusta on ohjannut intuitio siitä, että murtolukukäsitteestä voisi tulla abstraktina käsitteenä eheämpi (ks. Lehtinen & Merenluoto, 2004), jos murtolukujen ekvivalenssi sekä yhteenlasku ja kertolasku käänteisoperaatioineen voitaisiin konkretisoida yhtä ja samaa mallia hyödyntäen.

Tutkimuksen teoreettisena pohjana on toiminut Lakoffin ja Núñezin (2000) teoria aritmetiikan perusmetaforista, jotka ankkuroivat luonnollisten lukujen peruslaskutoimitukset kaikille yleiseen universaaliin toimintaan. Ankkuroivat metaforat ovat yleisesti kuvauksia ja tiedonsiirtomekanismeja, joiden avulla abstrakti käsite voidaan ymmärtää sellaisten konkreettisten kokemusten kautta, joita jokaisella ihmisellä on omasta kehostaan tai sen toiminnasta ympäröivässä maailmassa (Lakoff & Johnson, 1980; 1999).

Tässä tutkimuksessa ankkuroivia metaforia käsiteltiin kuvauksina matemaattisen käsitteen ja konkreettisen mallin välillä, jotta kuvaus olisi hyvin määritellyn lähtöjoukon ansiosta aina hyvin määritelty. Koska metaforat ovat kuvauksia, voidaan niitä myös analysoida ja luokitella kuvausten (homomorfia)teorian avulla (Häsä & Rämö, 2015). Kuvausten teorian avulla metaforiin liitetyt murtolukujen konkreettiset mallit voidaan luokitella hierakkisesti sen mukaan, vastaavatko ne loogisesti murtolukua pelkästään joukkojen suhteen, joukkojen ja yhteenlaskun suhteen vai joukkojen, yhteenlaskun ja kertolaskun suhteen. Tässä tutkimuksessa oli tavoitteena luoda ankkuroiva metafora, joka olisi tämän luonnollisen hierarkian korkeimmalla tasolla. Lisäksi kiinnitettiin huomiota siihen, että laskutoimitusten edellyttämät konkreettiset operaatiot olisivat mahdollisimman universaaleja, eli sellaisia johdonmukaisesti sääntöjen mukaan eteneviä luonnollisia toimintoja, jotka voisi ohjeistaa lähes kaikille ihmisille ajasta, paikasta ja kulttuurista riippumatta.

Lakoff ja Núñez (2000) esittelevät neljä aritmetiikan perusmetaforaa, jotka ovat *"aritmetiikka on esinekokoelmien muodostamista," "aritmetiikka on esineiden rakentamista osista," "aritmetiikka on mittatikun avulla mittaamista" ja "aritmetiikka on liikettä pitkin polkua."* Niistä kuitenkaan yksikään ei ollut sellaisenaan yhteensopiva murtolukujen kertolaskun kanssa yleisessä tapauksessa, jossa kertojan ei tarvitse olla luonnollinen luku. Tässä tutkimuksessa Lakoffin ja Núñezin (2000) metaforaa "aritmetiikka on mittatikun avulla mittaamista" kehitettiin ihmisen näköaistia ja murtoluvun operaattoritulkintaa (ks. Kieren 1976; 1988) hyödyntäen niin, että se sopisi yhteen myös murtolukujen kertolaskun kanssa ja ankkuroisi murtoluvun kertolaskun johonkin universaaliin toimintaan, joka on kaikille ihmisille tuttua, ajasta, paikasta ja kulttuurista riippumatta. Tämän pohjalta saatiin kehitettyä murtoluvuille maalattuina puutikkukokoelmina ankkuroiva metafora, joka on universaali ja yhteensopiva kaikkien murtolukujen laskutoimitusten kanssa. Murtolukujen vähennyslaskuun ja jakolaskuun päästiin luonnollisella tavalla käsiksi hyödyntämällä sitä, että niihin liittyvät konkreettinen toiminta voitiin suorittaa käänteisesti (Björklund, 2010).

Ajattelen, että tässä tutkimuksessa esitelty lähestymistapa, jossa kuvausten teoriaa hyödynnetään matematiikkaan liittyvien metaforien arviointityökaluna, voi olla hyvin hyödyllinen työkalu monia matematiikan oppimiseen ja havainnollistamiseen liittyviä kysymyksiä silmällä pitäen. Olisi mielenkiintoista esimerkiksi tutkia, miten opetuksessa käytetyt yleiset tulkinnat, esimerkit ja konkretisoinnit murtoluvuille sopivat yhteen murtolukujen ekvivalenssin ja laskutoimitusten kanssa. Olisi myös mielenkiintoista tukia kehitystutkimuksen (Pernaa, 2020) menetelmin millaista oppimista tikkukokoelmiin perustuva murtolukujen ankkuroiva metafora tuottaa murtoluvuista.

**LÄHTEET**

Ball, D. (1990). Elementary and Secondary Teachers´ Understanding of Division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(2), 132–144.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. Teoksessa: R. Lash & M. Landau (Toim.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91–126). Academic Press.

Berggren, J. (2022). Some Conceptual Metaphors for Rational Numbers as Fractions in Swedish Mathematics Textbooks for Elementary Education. *Scandinavian Journal of Educational Research*.

Björklund, C. (2010). *En, två, många. : om barns tidiga matematiska tänkande*. Liber.

Boero, P., Gutiérrez, Á. & Leder, G. C. (2016). *The second handbook of research on the psychology of mathematics education: The journey continues*. Sense Publishers.

Butler, F., Miller, S., Crehan, K., Babbitt, B. & Pierce, T. (2003). Fraction instruction for students with mathematics disabilities: Comparing two teaching sequences. *Learning Disabilities Research and Practice,18*(2), 99–111.

Carreira, S. (2001). Where there's a model, there's a metaphor: Metaphorical thinking in students' understanding of a mathematical model. *Mathematical Thinking and Learning, 3*(4), 261–287.

Cramer, K. & Wyberg, T. (2009). Efficacy of Different Concrete Models for Teaching the Part-Whole Construct for Fractions. *Mathematical Thinking and Learning, 11*(4), 226–257.

Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2008). The role of representations in fraction addition and subtraction. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 490–496.

Dehaene, S. (2011). *The number sense: How the mind creates mathematics* (Uudistettu ja päivitetty painos). Oxford University Press.

Gabriel, F., Coche, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B. & Content, A. (2013). A componential view of children's difficulties in learning fractions. *Frontiers in Psychology*, 4, 1–12.

Hadamard, J. (1954). *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*. Dover Publications.

Huotilainen, M. (2019). *Näin aivot oppivat*. PS-kustannus.

Häggblom, L. (2013). *Med matematiska förmågor som kompass*. Studentlitteratur.

Häggblom, L., & Hartikainen, S. (2014). *Lyckotal: 3B, Start ; Lyckotal. 3B, Extra* (1. uppl.). Schildts & Söderströms.

Häsä J., & Rämö, J. (2015). *Johdatus abstraktiin algebraan* (3. Uud. p.). Gaudeamus.

Ikäheimo, H., Pääkkönen, J., & Mutikainen, A. (2021). *Matematiikan osaaminen vahvaksi: Iloa opetukseen ja oppimiseen* (1. painos.). ELLI Early Learning Oy.

Joutsenlahti, J., & Perkkilä, P. (2021). Murtoluku vai suhde?. *FMSERA Journal*, 4(1), 61–74.

Kettunen, J., Koponen, J., Portaankorva-Koivisto, P., Seppäläinen, S., Tuohilampi, L., Saramäki, S., Kimpimäki, K, Ahvenniemi, U. (2020). *Muuttuja 7 - 9: Matematiikan käsikirja* (1. painos.). Sanoma Pro Oy.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. Teoksessa: J. Hiebert & M. Behr (Toim.): *Number concepts and operations in the middle grades* (ss. 162–181). National Council of Teachers of Mathematics and Erlbaum.

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. Toim R. A. Lesh (Toim.): *Number and measurement* (ss. 101–144). ERIC/SMEAC.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B., (2005). *Adding it up. Helping children learn mathematics.* National Academy Press.

Lakoff, G. & Johnson, M. (1999). *Philosophy in the flesh: The embodied mind and its challenge to Western thought.* Basic Books.

Lakoff, G. & Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. University of Chicago Press.

Lakoff G, Núñez R (1997) The metaphorical structure of mathematics. Teoksessa: English L (Toim.) *Mathematical reasoning: analogies, metaphors and images.* (ss. 21-89). Lawrence Erlbaum Associates, London.

Lakoff, G. & Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* Basic Books.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework. Teoksessa: F. Lester (Toim.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (ss. 629-668). Information Age Publishing.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* Lawrence Erlbaum Associates.

Merenluoto, K. & Lehtinen, E. (2004). Käsitteellisen muutoksen näkökulma matematiikan oppimiseen ja opettamiseen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen ja P Malinen (Toim.): *Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (ss. 301–319). Niilo Mäki Instituutti.

Moss, J. & Case, R. (1999). Developing Children´s Understanding of the Rational Numbers: A New Model and an Experimental Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 122–147.

Ni, Y. & Zhou, Y. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27–52.

Núñez, R. E. (2008). Conceptual metaphor, human cognition, and the nature of mathematics. Teoksess: R. W. Gibbs, Jr. (Toim.): *The Cambridge handbook of metaphor and thought* (ss. 339–362). Cambridge University Press.

Pernaa. J. (2013). *Kehittämistutkimus opetusalalla*. PS-Kustannus.

Piaget, J. (1968). *Barnets själsliga utveckling*. Liber.

Piaget, J. (1972). *The principles of genetic epistemology*. Routledge & Kegan Paul.

Piaget, J. (1977). *Psychology of epistemology. Towards a theory of knowledge*. Penguin.

Pitkethly, A., & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics, 30*(1), 5–38.

Sidney, P. G., Thompson, C. A., & Rivera, F. D. (2019). Number lines, but not area models, support children's accuracy and conceptual models of fraction division. *Contemporary Educational Psychology,* 58, 288–298.

Siegler, R. & Pyke, A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology, 49*(10), 1994–2004.

Soto-Andrade, J. (2014). Metaphors in mathematics education. Teoksessa: S. Lerman (Toim.), *Encyclopedia of mathematics education* (ss. 447–453). Springer.

Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. Teoksessa: M. Johnsen Høines & A. B. Fuglestad (Toim.): *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, s. 281-288). Bergen University College.

Tuominen, A. (2021). *Interventiotutkimus kolmasluokkalaisten murtolukujen oppimisesta: "Ylhäällä olevat vain plussataan"*. [väitöskirja, Turun yliopisto]. Turun yliopiston julkaisuja - Annales Universitatis Turkuensis, Ser B: Humaniora : 534.

Van Hoof, J., van de Walle, J., Verschaffel, L. & van Dooren, W. (2015). In search for the natural number bias in secondary school students´ interpretation of effect of arithmetical operations. *Learning and Instruction, 37*, 30–38.

Van Dooren, W. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction, 37*, 1–4.