VERTAISARVIOITU
KOLLEGIALT GRANSKAD
PEER-REVIEWED
www.tsv.fi/tunnus

MATEMATIIKAN MIELEKKYYS JA SOVELLETTAVUUS

Arto Mutanen

Maanpuolustuskorkeakoulu & Merisotakoulu

TIIVISTELMÄ

Matematiikka on erityinen oppiaine. Sitä pidetään sekä vaikeana että tärkeänä. Matematiikan tärkeys tulee esiin nimenomaan sovellutustensa kautta, joita sillä on runsaasti eri tieteiden aloilla. Sovellutusten kautta tarkasteltuna matematiikan merkityksellisyys jää taustalle. Artikkelissa esitetään, miksi näin on ja samalla tuodaan esiin, miksi olisi tärkeää painottaa myös matematiikan merkityksellisyyttä.

JOHDANTO

Matematiikkaa pidetään joskus vaikeana, joskus ehkä tylsänä oppiaineena, jonka keskeisin toiminto on laskeminen. Matematiikkaan liittyy laskeminen, joka voi tuntua tylsältä ja olla vaikeaa, mutta se ei redusoidu laskentaan. Laskettaessa aina lasketaan jotain ja laskujen avulla saadaan tietoa jostain. Matematiikan opiskelussa on olennaista kysyä, mitä tietoa etsitään ja mistä tietoa yritetään saavuttaa. Matematiikan sisällöllistä puolta painottaessaan Kant luonnehti matematiikka synteettiseksi *a priori*. Kuitenkin kouluopetuksessa laskujen pääasialliseksi merkitykseksi saattaa jäädä laskeminen harjoituksen vuoksi, jolloin ei ehkä huomioida matematiikan merkityksellisyyttä.

Käsitys matematiikasta hyödyllisenä ja tärkeänä oppiaineena liittyy pitkälle sen sovellettavuuteen: sovellutuksissa matematiikka on kiistatta osoittanut voimansa. Luonnontieteet ja tekniikka edellyttävät erittäin laajat tiedot ja taidot matematiikassa. Matematiikka on keskeinen tukiaine myös monissa ihmis- ja yhteiskuntatieteissä. Joskus jopa tämä matematiikan välineellinen hyöty on kyseenalaistettu. Tietenkään matematiikka hyödyllisenä välineaineena ei saa syrjäyttää kunkin alan substanssin sensitiivistä tarkastelua. Matematiikkaa ei nykyään esitetä itsessään kiinnostavana ja sivistävänä oppiaineena.[1] Ehkä Suomen erittäin

[1] Tällainen väitä on luonteeltaan epätarkka ja tässä tapauksessa provokatiivinen. Siten tarkasti ottaen tällainen väite ei astelu linjalle tosi-epätosi, vaan hedelmällinen-hedelmätön. Väitteelle

vahva ja syvä matematiikan perinne pitää yllä mainetta matematiikasta tärkeänä oppiaineena.

Koulukirjat tukevat käsitystä matematiikasta ”sisällöttömänä” laskemisena. Harjoitustehtävät ovat valtaosin selkeitä ”palapeliongelmia”, jotka edellyttävät mekaanista taitoa tai vaativimmillaan teknistä taituruutta. Lukion matematiikassa on mukana myös matemaattisesti kiinnostavia osioita, joita opetetaan teknisen intressin mukaisella tavalla. Tämä ilmenee esimerkiksi siinä, miten differentiaali- ja integraalilaskenta jäsennetään oppikirjoissa[2] (Lehti, 1969; 1971; Boyer, 1939). Lisäksi tällainen puhdas tekninen painotus liittyy erityisesti 1900-luvulla laajalti hyväksyttyyn ajatukseen matematiikan (ja logiikan) tautologisuudesta eli käsityksestä, etteivät matematiikan (ja logiikan) tulokset sulje mitään vaihtoehtoja pois ja siten määritelmällisesti matematiikan totuudet ovat sisällöllisesti tyhjiä.

Termi ’matematiikka’ tulee kreikan kielestä ja alkujaan se tarkoitti jotain seuraavan kaltaista: ”se, mikä on opittu tai ymmärretty” tai ” tieto, joka voidaan oppia” (Bochner, 1966, 24-25). Tämä merkitys on kuitenkin enemmän tai vähemmän siirtynyt sivuun ja sen on syrjäyttänyt tieteellinen tai ehkä pikemminkin formaali käsitys matematiikasta formaalina kalkyylina. Differentiaali- ja integraalilaskenta on tällaisesta erinomainen esimerkki (Boyer, 1939).

MATEMATIIKKA JA TIEDE

Länsimaisen tieteellisen ajattelun taustalla vallitsee kaksi perinnettä. Platonille sokraattinen dialogi antoi yleisen ja ihanteellisen muodon tieteelle ja inhimilliselle tiedolle, johon myös matematiikka mukautui. Tällaisen keskustelevan ja etsivän eli pedagogisen tieteenkäsityksen rinnalla oli Parmenideen ”looginen” ihanne tieteestä pysähtyneenä ja olevaan kiinnittyneenä oppina. Nämä kaksi näkemystä tuovat esiin kreikkalaisen tieteen kaksi metodologista orientaatiota. Parmenideen ontologinen loogisesti totuuteen kiinnittyvä ja Sokrateen dialektinen ja pedagogisesti orientoitunut logiikka (Bochner, 1966; Hintikka, 2007; Boyer, 1939).

Platonille matematiikka inhimillisen tiedon paradigmaattisena muotona oli kytköksissä nimenomaan dialektiseen orientaatioon. Dialogissa *Menon* Platon kuvaa, miten matemaattinen tiedonetsintä etenee keskustellen. Yleisemminkin Platon kuvaa ajattelua mielen sisäisenä dialogina (*Theaitetos,* 190a-). Tämä ei ole vain satunnainen ja epäolennainen piirre, vaan liittyy Platonin käsitykseen inhimillisen tiedon luonteesta. Inhimillinen tieto edellyttää dialogia, toista ihmistä. Tämä on Platonin käsitys myös matemaattisesta tiedosta. Aristoteleelle matematiikka

---

tulee tietty, artikkelin kannata olennaisen tärkeä peruste erityisesti filosofian piirissä tapahtuneesta kehityksestä, jota von Wright on useissa yhteyksissä varsin yksityiskohtaisesti kuvannut. Logiikan, ja siten välillisesti myös matematiikan, tilanteesta (kts. von Wright, 1992, 27, 32-33, 47).

[2] Tässä on tärkeää huomata, ettei pyrkimys ole arvottaa hyväksi tai huonoksi, vaan kuvata käsitteellistä rakentumista.

oli jo enemmän ”tieteellinen” oppi. Kreikkalaisille tiede ei ollut hyödyllisyyttä palvelevaa, vaan ihmisyyttä kehittävää tietämistä.

Käsityksellä matematiikasta erityisesti välineellisesti hyödyllisenä tieteenä on pitkät historialliset juuret, joka heijastelee syvällistä käsitystä matemaattisen tiedon luonteesta; sen suhteesta sokraattiseen ja parmenideen traditioon. Nämä eivät ehkä ole mielessä pohdittaessa peruskoulun tai lukion matematiikkaa, vaikka olisi hyvä olla, jotta matematiikan rooli keskeisenä kulttuurisena vaikuttajana säilyisi.

Matematiikan sovellutusten kannalta differentiaali- ja integraalilaskenta on erityisen olennainen.[3] On tuskin mahdollista löytää vastaavaa esimerkkiä, jossa yhdistyy vuosisatainen käsitteellinen työ nerokkaaseen matemaattiseen oivalluskykyyn. Differentiaali- ja integraalilaskennan merkitys sekä matematiikan kehitykselle että yleiseen kulttuuriseen elämään on ollut merkittävä. Erityisesti differentiaali- ja integraalilaskennan sovellutukset ovat erityisen merkittävät ja laajat: Modernia luonnontiedettä ei olisi nykymerkityksessä olemassa ilman differentiaali- ja integraalilaskentaa, jonka varaan koko luonnontieteellis-tekninen kulttuurimme nojaa. Differentiaali- ja integraalilaskennan vaikutukset ulottuvat monille ihmis- ja yhteiskuntatieteiden aloille (Boyer, 1939).

Differentiaali- ja integraalilaskennan käsitteellinen perusta on rakentunut vuosisatoja kestäneelle loogis-käsitteelliselle työlle. Yhtäältä differentiaali- ja integraalilaskennan perustana on antiikista saakka kulkenut geometrinen ajattelu ja päättely. Toisaalta siinä kulminoituu algoritminen ja tekninen ongelmanratkaisutaito. Nämä eivät ole toisistaan erilliset, mutta niissä painottuvat matematiikan kahdet juuret. Yksinkertaistaen sanottuna geometrinen traditio kytkeytyy pedagogiseen lähestymistapaan ja algoritminen loogiseen lähestymistapaan. Näiden lähestymistapojen ero ei differentiaali- ja integraalilaskennan kannalta vaikuta kovin suurelta, mutta ne painottuvat eri tiedollis-kulttuuriseen traditioon. Näiden lähestymistapojen ero vaikuttaa käsityksemme inhimillisestä tiedosta ja tieteestä. Siten differentiaali- ja integraalilaskennan käsitteellisen ja historiallisen perustan tarkastelu antaa syvällisen ymmärryksen matematiikan luonteesta ja matemaattiseen ajatteluun kasvamisesta (Lehti, 1969; 1972).

Se, painottuuko sisällöllinen ymmärrys vaiko (mekaaninen) laskenta, ei ole niinkään kyse oppilaslähtöisyydestä, kuin tiedollis-kulttuurisesta traditiosta, johon lähestymistavan juuret viittaavat. Oppilaslähtöisyydessä usein painotetaan oppimiseen olennaisesti liittyvää dialogisuutta. Dialogi ei kuitenkaan merkitse vain keskustelua, vaan ymmärryksen rakentamista yhdessä: voiko sisällöttömän mekaanisen ongelmanratkaisukoneen käyttöä sisällöllisesti ylipäätään oppia tai opettaa?

---

[3] Englanniksi differentiaali- ja integraalilaskenta on calculus, mikä liittyy kalkyylin ajatukseen, jota esimerkiksi Leibniz toi esiin. Kalkyyli on tulkitsematon formaali järjestelmä, jolle voidaan antaa erilaisia tulkintoja. Laskenta puolestaan viittaa jo tulkitun järjestelmä puitteissa suoritettavaan operaatioihin.

Sokraattisen dialogin kuluessa keskustelukumppanit yhdessä rakentavat keskustelun kohteesta yhteisen ymmärryksien.[4] Siten dialoginen lähestymistapa mahdollistaa matemaattisluonnontieteellisen tiedon etsinnän perusteiden ymmärryksen, jonka syvällisen käsitteellisen ymmärryksen kautta, kouluasteesta riippumatta, on mahdollista opettaa tieteellistä ja matemaattista ajattelutapaa. Dialoginen lähestymistapa ei tarkoita vain keskustelua, vaan siinä kyse on loogisesti syvällisestä painotuserota "tieteelliseen" tai formaaliin lähestymistapaan verrattuna: dialogin perustana oleva logiikka ei ole formaali logiikka, vaan episteeminen logiikka (Hintikka, 2012).

Koulumatematiikassa ei mennä niin pitkälle, että se mahdollistaisi syvällisen matemaattis-tieteellisen ajattelutavan omaksumisen.[5] Matemaattinen ajattelutapa tulee omaksua ilman syvää matematiikan teknistä hallintaa.[6] Tulee tuoda esiin kokeellisen tutkimuksen matemaattinen ydin: funktionaalisen riippuvuuden matemaattis-käsitteellinen perusta. Näin on mahdollista luoda opetuksellinen tilanne, jossa formaali looginen esitys muuntuu episteemis-loogiseksi matematiikan ymmärrykseksi.

Dialogi antaa oppilaille mahdollisuuden itse hahmottaa matematiikan ja luonnontieteen välistä keskinäisriippuvuutta. Ehkä samalla myös matematiikan mielekkyys ja merkityksellisyys ilmenevät. Puhe matematiikan mielekkyydestä tai merkityksellisyydestä, ei ole täysin selkeää. Tällöin viitataan matematiikkaan itsenäisenä oppialana, jolla luonnollisesti voi olla sovellutuksia, mutta tarkastelu kohdistuu "matematiikkaan itseensä". On hyvä huomata, että matematiikan mielekkyys ja sovellettavuus käyvät jossain määrin toisiaan vastaan: painotettaessa matematiikan itsenäistä mielekkyyttä, sovellutukset jäävät syrjään ja painotettaessa matematiikan sovellettavuutta, matematiikan itsenäinen merkitys jää syrjään (Weyl, 1956).

Pedagogisesti on olennaista, että oppilas kokee opittavan asian merkityksellisenä. Tällöin usein tarkoitetaan opiskelijan henkilökohtaista suhdetta opiskeltavaan aiheeseen, merkityksellisyyttä opiskelijalle, mikä on olennaisen tärkeää. Kuitenkaan ei saa unohtaa, asian merkitystä ja merkityksellisyyttä "itsessään". Platonin dialogissa *Menon* orjapojan ymmärrys kasvaa konkreettisesti askel askeleelta Sokrateen kanssa käydyn dialogin edetessä. Dialogin eteneminen ei ole suoraviivaisen loogista, vaan dialogista, jossa eteneminen ja takaisin palaaminen tapahtuvat orjapojan (oppijan) tiedollisen tilan eli ymmärryksen edellyttämässä

---

[4] Platonin dialogeissa Sokrates on strateginen dialogin johdattelija, joka strategisesti mietittyjen kysymysten avulla johdattaa keskustelua suuntautumaan kohti ratkaisua. On tärkeä pohtia, millaiset tiedolliset edellytyksen tällaiselle strategiselle johtajuudelle tulisi olla. On joskus viitattu Sokrateen vain teeskentelevän tietämättömyyttään (ns. Sokrateen ironia), sillä on katsottu, että hänen on täytynyt jo etukäteen tietää asia.

[5] Koulumatematiikan ja sen tutkimuksen rikkaudesta, kts. esim. Bråting, Hemmi, Madeij ja Röj-Lindberg (2016) tai Bråting ja Österman (2017).

[6] Tässä yhteydessä esimerkiksi jaottelu koulu- ja yliopistomatematiikan välillä ei ole olennainen, vaan oikeastaan tarkoitus on pikemminkin tuoda esiin piirteitä, jotka pienentävät tätä ja muita vastaavia kuiluja.

tahdissa. Tällainen ratkaisun rakentuminen askel askeleelta on rakentunut matemaattiseen todistukseen. Tässä selkeästi myös tuodaan esiin, mitä tarkoittaa edellä oleva luonnehdinta dialogin logiikasta episteemisenä logiikkana: lopussa oppija tietää ja ymmärtää saavutetun lopputuloksen, matemaattisen teoreeman, merkityksen. Kouluopetuksen painotus matematiikasta mekaanisena ja persoonattomana laskemisena on peittänyt alleen tämän ymmärryksen kasvun elementin matematiikasta (Hintikka, 2012; Hintikka & Bachman, 1991; Kelly, 1996).

Menonissa käyty dialogi on erittäin hyvä esimerkki, miten dialoginen opetus on järjestettävissä. Dialogissa tulee esiin, miten matemaattinen ymmärrys – käsitteet ja menetelmät – voidaan rakentaa keskustellen käyttäen apuna myös kuvia (Kts. esim. Hintikka & Bachman, 1991, 21-27). Nykyisessä matematiikan tutkimuksessa dialogi on edelleen mielenkiinnon kohteena, mutta nykyiset painotukset poikkeavat Menonissa esiintyvistä. Esimerkiksi De Toffoli (2017) tarkastelee diagrammeja argumentaation osina ja Radford (2011) tarkastelee matematiikkaa osana yleisempää kielellistä dialogia. Kuinka paljon tällainen painotusero johtuu siitä, että on siirrytty parmenideen traditiota kohti tai siitä, että matematiikka ymmärretään formaalina kalkyylina (Lehti, 1971, 77, 82-87) on kiinnostava kysymys, mutta emme tässä artikkelissa tarkemmin tähän erityiskysymykseen syvenny.

TIETO – TOTUUS JA YMMÄRRYS - MERKITYS

Klassinen tiedon määritelmän mukaan tieto on hyvin perusteltu tosi uskomus, mikä kytkee tiedon totuuteen. Tämä käsitys tiedosta on luonteva ja arkikäsityksemme mukainen. Ymmärrys puolestaan kytkeytyy merkitykseen: ”Ymmärtäminen on jonkin asian – myös käsitteen tai sanan – merkityksen, ja jo tunnettujen totuuksien välisten *yhteyksien* tajuamista.” (von Wright, 2006, 14). Ymmärrys edellyttää laajaa käsitystä asioiden historiallisista juurista, mutta myös spesifejä tietoja kokonaisuuden rakentumisesta. Ymmärryksen kehkeytyminen on yksilöllinen prosessi, mutta opettajan rooli on ymmärrykseen johdattamisessa.

”Sekä luonnontieteissä että humanistisissa tieteissä etsitään totuuksia ja pyritään ymmärtämään niiden keskinäisiä yhteyksiä. Suuri osa humanististen tieteiden tutkimista ilmiöistä on kuitenkin jo sinänsä merkitystä omaavia – kuten esimerkiksi kirjoitetut tekstit. Sama ei päde luonnonilmiöistä. Tämän johdosta ymmärtäminen näyttelee humanistisissa tieteissä paljon keskeisempää osaa kuin luonnontieteissä.” (von Wright, 2006, 14). Oikeastaan tämä laina on olennaisen tärkeä matematiikan opetuksen, oppimisen ja ymmärryksen kannalta. Yliopistoissa matemaattisluonnontieteelliseen tiedekuntaan kuuluvana aineena matematiikka nähdään osana luonnontieteitä, vaikka sillä on lähinnä sivurooli: matematiikka on instrumentaalinen metodiaine. Tällöin jää huomioimatta matematiikan syvä kulttuurinen merkityksellisyys.

Courat sanoo esipuheessaan kirjaan Boyer (1939), että differentiaali- ja integraalilaskenta ja matemaattinen analyysi ovat yksi ihmismielen suurimmista saavutuksista. Tämä ei ole vain esipuheen kohteliasta tekstiä, vaan sillä on hyvä tieteellinen ja kulttuurinen perustansa. Nykyinen aikamme on suuressa velassa nimenomaan tälle ihmismielen luomukselle, mikä ei tarkoita teknistä taituruutta, jonka varassa luonnontieteellis-tekninen kulttuurimme on, vaan myös matemaattisen ajattelun luomaa inhimillistä kulttuuria yleisemmin.

Boyer (1939) tuo hyvin esiin matematiikan käsitteellisen luonteen. Matematiikan merkityksellisyys ja mielekkyys eivät ehkä löydy laskemisesta tai oikeista ja varmoista vastauksista, vaan sen käsitteellisestä vivahteikkuudesta, joka on inhimillisen kulttuurin suuri ja arvokas luomus. Käsitteellisen perustan ymmärtäminen on keskeistä matematiikan ja matemaattisen ajattelun ymmärryksen kannalta.

Differentiaali- ja integraalilaskennan kehitys liittyy läheisesti matematiikan kahteen, geometriseen ja algoritmiseen, traditioon. Yksinkertaistaen sanottuna geometrinen traditio on sisällöllisesti painottunut, jossa haluttu tulos rakentuu konkreettisen sisällöllisen analyysin avulla ja algoritminen traditio painottaa abstraktia laskentaa, joka mahdollistaa suvereenin ongelmien muotoilun ja ratkaisun (Boyer, 1939; Lehti, 1969; Bos, 1993; Hintikka & Remes, 1974).

Nykyisin painotus on pitkälti jälkimmäisessä, mikä luonnollisesti luo näkemystä matematiikasta (mekaanisena) laskemisena. Algoritminen tapa on osoittautunut metodisesti erinomaiseksi tavaksi: yhdellä algoritmisella menetelmällä on mahdollista ratkaista suuri joukko erilaisia tehtäviä. Lisäksi laskennallisin keinoin algoritmi määrittää uusia, sillä ratkaistavia, ongelmia. Näin differentiaali- ja integraalilaskenta toimii ”keksimiskoneen” kaltaisena metodisena välineenä. Tietenkään kyse ei ole mekaanisesta koneesta vaan vaativaa matemaattista taitoa ja luovuutta edellyttävästä menetelmästä (Bos, 1993; 2001).

Matematiikan ymmärryksen kannalta on olennaisen tärkeää huomata, että vaikka matematiikka on tietyssä merkityksessä ”sisällötöntä”, niin puhe matematiikan sisällöllisesti tyhjyydestä on varsin harhaanjohtavaa. Matemaattinen päättely voi lisätä tietoa, ainakin ns. pintainformaation merkityksessä, jolla on syvällinen yhteys myös empiirisen tieteen metodologiaan (Hintikka, 1973; 2007). 1900-luvulla tuli vallitsevaksi käsityksesi, että logiikka ja myös matematiikka ovat tautologisia eli sisällöllisesti tyhjiä. Tällainen luonnehdinta, vaikka se perustuikin logiikan perustuloksiin, ei oikein sopinut yleiseen käsitykseen logiikasta ja matematiikasta. Erityisesti Kantin luonnehdinta matematiikasta ja logiikasta ”synteettisenä a priori” ei millään sovi tähän luonnehdintaan. Miten matematiikka ja logiikka voivat lisätä tietoamme? Hintikka muotoili pintainfomaation käsitteen vastaamaan tähän ongelmaan. Käsiteen perustana on Peircen jaottelu korollaarisen ja teoremaattisen päättelyn välillä, jossa edellisessä ei tuoda päättelyyn mukaan uusia yksilöitä, mutta jälkimmäisessä näin tapahtuu. (Webb, 2006, 242-243.) Yksinkertaistaen, pintainformaatiota mitataan päättelyyn tuotujen toisiinsa suhteessa olevien yksilöiden lukumäärällä.[7] Näiden uusien yksilöiden looginen rooli on sama kuin geometriassa tehtyjen apukonstruktioiden. Konstruktiot ja uudet yksilövakiot ovat yhteydessä kantin intuition käsitteeseen

[7] Teknisesti tämä saadaan määritetyksi tarkastelemalla sisäkkäisten kvanttorien määriä.

(Hintikka, 1973). Bråtingin (2012) tarkastelu visuaalisuuden ja intuitiivisen ajattelun yhteydestä kytkeytyy tällaiseen Kantilaiseen intuitionismiin kiinnostavalla tavalla. Metodologisesti kiinnostavaa on, että päättelyn strategian kannalta näiden uusien yksilöiden rooli vastaa empiirisen tieteen kokeiden tuottamaa lisäinformaatiota, jonka Hintikka ym. osoittivat strategiateoreemassaan (Hintikka, Halonen & Mutanen, 2002, 330).

Lisäksi matematiikka on vivahteikas oppiala, jota ei tule pelkistää johonkin tiettyyn muotoon. Matematiikka on tiettyjä struktuureja kuvaava visuaalinen tiede (Hintikka, 2011). Visuaalisuus tulee esiin myös tarkastellessa diagrammeja matemaattisen päättelyn osana (De Toffoli, 2017). De Toffoli (2017) ei kuitenkaan painota päättelyn tiedon kasvua lisäävää puolta, joten hänen lähestymistapansa on (formaali) looginen, ei episteemis-looginen kuten Menoin viitoittamassa päättelyllä.

Sovellustensa kautta matematiikka nivoutuu yhteen sovellutusalueen substanssiasioiden kanssa yhteen. Siten puhe fysiikasta, josta on poistettu matematiikka, ei oikeastaan vaikuta kiehtovalta, ellei kyse sitten ole ilmiöisen luokitteluun perustuvasta havaintotieteestä. Kuitenkin matemaattis-looginen päättely tarjoaa hedelmällisen metodologisen perustan luonnontieteelliselle tutkimukselle [8] (Hintikka, 1969; Hintikka & Remes, 1974; Hofstadter, 1979).

PEDAGOGIIKKA

On pedagogisesti tärkeää pohtia, miten matematiikkaa tulisi tai voisi opettaa siten, että oppilaille tulisi käsitys matematiikasta sekä tärkeänä metodiaineena että itsenäisenä syvällisiä merkityksiä omaavana oppiaineena.

Matematiikka ”tyhjänä” metodiaineena muuntaa sen merkityksettömäksi laskennaksi, joka johtaa ”teknokraattiseen” käsitykseen matematiikasta. Kun tämä ajatus kytketään osaksi luonnontieteitä, niin matematiikka jää luonnontieteen mekaaniseksi apuaineeksi, mitä joskus kutsutaan positivismiksi. Tämä on sekä historiallisesti että asiallisesti virheellistä. Ihmistieteissä matematiikkaa ei tulisi nähdä osana kaavamaista lopullista totuutta tavoittelevaa luonnontiedettä. Matematiikka tulisi nähdä myös osana edellä kuvattua pedagogista traditiota (Horkeimer & Adorno, 1944; Kneale & Kneale, 1962; Bochner, 1966).

Lukion fysiikan kirjoissa annetaan esimerkkejä, joissa yksittäinen koordinaatistossa esitetty havaintosarja ”antaa” etsityn lain. Tällaiset esimerkit ovat tietysti tärkeitä, mutta samalla ne antavat virheellisen kuvan kokeellisen tutkimuksen

[8] Tämä on tietysti varsin ilmeinen seikka, mutta luonnontieteen historiallis-filosofinen lähestymistapa (Matthews, 2014) konkretisoi luonnontieteellistä ajattelua ja vastaavasti matematiikan historiallis-filosofinen lähestymistapa (Barbin, Jankvist & Hoff Kjeldsen, 2015) konkreettistaa matemaattista ajattelua jo ns. koulumatematiikassa.

luonteesta. Kokeellinen tutkimus ei ole sokeiden havaintojen järjestämistä matematiikan avulla lainmukaiseen järjestykseen. Eikä matematiikka ole ”kone”, joka muokkaa epämääräiset havainnot tyylikkääseen matematisoituun muotoon.

Luonnontieteen opetuksessa pyritään nykyisin tuomaan esiin luonnontieteet tutkimuksellisina prosesseina eikä niinkään listana lopputuloksia, jotka ovat usein ymmärretty – ulkoa opeteltavina - matemaattisina kaavoina.[9] Nykyisin opetuksessa painotetaan sekä tieteen historiallista että tieteenfilosofista lähestymistapaa (Matthews, 2014). Tällainen lähestymistapa mahdollistaa luonnontieteen luonnehdinnan nimenomaan tietoa etsivänä ja (tutkimuksellisia) ongelmia ratkovana prosessina. Sinällään tärkeät tieteen tulokset eivät näyttäydy itseisarvoisen tärkeinä, historiattomina lopullisina tuloksina, joiden merkitys typistyy niiden ulkoa opetteluun, vaan tiedon epävarmana etsintäprosessina, jonka tulokset osittaisinakin ratkovat tutkimuksellisesti olennaisia ongelmia. Matematiikalla on keskeinen rooli koko tässä prosessissa.

Historiallis-filosofinen lähestymistapa luo konkreettisen kuvan tieteellisestä tiedonmuodostuksesta, jonka tekeminen näkyväksi on kasvatuksellisesti erittäin olennaista. Usein, jopa yliopistollisissa oppikirjoissa, luonnontiede eroaa olennaisesti humanistisista ja ihmistieteistä, mikä ilmentää länsimaisen perinteen kahta juurta. Luonnontieteellinen tiede asetetaan totuuden ja lopullisuuden puolelle, jonka vastaparina toimii yksilöllisyyteen ja ymmärrykseen painottuvat humanistiset ja ihmistieteet. Von Wrightin jakaa tieteen kahteen perinteeseen galileiseen ja aristoteeliseen, jonka suhdetta edellä kuvattuun olisi kiinnostava tarkastella (Tarkemmin, kts. esim. Niiniluoto & Wallgren, 2017).

Historiallis-filosofien lähestymistapa mahdollistaa myös tutkimusprosessin logiikan konkreettisen kuvaamisen. Historiallis-filosofisen lähestymistapaa on sovellettu myös matematiikkaan, mikä osaltaan mahdollistaa matematiikan kouluopetuksen rikastuttamisen ja matematiikan tiedonrakentumisprosessin tuomisen osaksi matematiikan opetusta. (Kts. esim. Barbin, Jankvist & Hoff Kjeldsen 2015.) Tällainen auttaa myös näkemään selkeämmin tutkimusprosessin ja oppimisprosessin logiikan rakenteellista samankaltaisuutta (Hintikka, 1982).

On tärkeää ymmärtää, että tieteilijät tekevät työtä tiedeyhteisössä ja olennaiset ja tärkeät kysymykset nousevat tiedeyhteisön sisältä. Tällä ei tietenkään haluta poistaa sitä arkista tosiasiaa, että tiedemiehet saavat ja ovat aina saaneet keskeisiä kysymyksiä myös tieteen ulkopuolelta. Sisäpuolisuus ja ulkopuolisuus ei merkitse sitä kuka kysymyksen esittää, vaan miten kysymys muotoillaan ja miten siihen etsitään ratkaisua. Tieteellisesti mielekäs kysymys jäsentyy tieteenalan käsitteistön kautta. Siten esimerkiksi puhe, jossa tieteen uudistaminen tapahtuu ottamalla maallikot mukaan tutkimusprosessiin, perustuu (moniin) virheellisiin käsityksiin tieteellisestä prosessista, vaikka tuollaisessa puheessa olisikin aimo annos totuutta mukana.

---

[9] Kaarle Kurki-Suonio kutsuu tällaista käsitystä kaavataudiksi.

METODOLOGIA

Nykyisin puhutaan ”pirullisista ongelmista” (wicked problems), jotka eivät taivu tieteenalarajoihin ja jotka ovat tulleet vastattaviksemme. Kuinka paljon näissä on kyse tieteellis-teknisen kulttuurin luoman teknosysteemin ”karkaamisesta käsistämme” ja kuinka paljon jostain muusta, on tietysti avoin kysymys, mistä von Wright puhui jo 1980-luvulla. Tällaisten ongelmien jäsentämisyritykset uudistavat tiedettä, mutta eivät sinällään muuta tieteen perustavaa logiikkaa.

Tieteellinen kysymyksenasettelu on metodista eli kysymykset tulee muotoilla, ei ennakko-oletuksia vastaavaksi, vaan metodisesti vastattavissa oleviksi. Tässä ilmenee matematiikan rooli metodisena aineena (luonnon)tieteessä: emme aseta matemaattista funktiota havaintoihimme, vaan kysymme funktionaalista yhteyttä. Siten havainnointi jo lähtökohtaisesti etsii tietyn tyyppistä funktionaalista riippuvuutta. Tämä seikka tekee monet tieteen historialliset tapaukset erityisen kiinnostaviksi. Miten tiettyjen havaintojen ilmentyessä tutkijan tulee toimia? Onko missään olosuhteissa luvallista tai jopa järkevää jättää joitakin havaintotuloksia syrjään? Tällaisiin kysymyksiin ei voi vastata ilman riittävän syvää tieteenfilosofista (metodologista) ja tieteen historiallista sivistystä. Hintikka (2007) tarkastelee kiinnostavia historiallisia esimerkkejä, joissa metodisten sääntöjen rikkominen tulee strategisesti perustelluksi.

Tieteellinen kysymyksenasettelu ja päättely kulkevat käsikädessä. Tieteellinen kysymyksenasettelu, jossa etsitään tietyn tyyppistä funktionaalista riippuvuutta, edellyttää, että on jo osoitettu sellaisen riippuvuuden olemassaolo. Tämä on metodisesti tärkeä huomio. Tieteessä edetään askel askeleelta. Suuret tieteelliset löydöt seisovat pitkän historiallisen ketjun päällä. Erinomaisena esimerkkinä tästä on jälleen differentiaali- ja integraalilaskenta. Oikeastaan juuri tästä syystä ”pirulliset ongelmat” ovat niin monimutkaisia: ne eivät asetu tieteen pitkän jatkumon logiikkaan. ”Pirullisten ongelmien” pirullisuus liittyy siihen, ettei meillä ole keinoja muotoilla niitä. Kuitenkin ne nousevat elämäämme uhkaavista riskeistä. Olisi epä-älyllistä väittää hallitsevansa niiden edellyttämät tiedot tai metodiset taidot. Ne ovat toistaiseksi meille jäsentymättömiä, pirullisia ongelmia (Hintikka, 2007).

Kouluopetus ei voi mennä (ainakaan kovin yleisesti) eri tieteenalojen polttaviin ongelmiin. Matematiikan tutkimuksellisesti kiinnostavat kysymyksenasettelut eivät ole edes matematiikan maisteriopintojen ohjelmissa. Vastaava pätee kaikissa ns. kumulatiivisissa aineissa, joissa usein matemaattisten valmiuksien edellytetään olevan varsin hyvällä tasolla. Lisäksi näissä tieteenaloissa myös erikoistuminen on edennyt pitkälle. Tämä vaikeuttaa kouluopetuksen suunnittelua. Mikäli halutaan antaa hyvä yleiskuva keskeisistä teemoista, jää tiedot väistämättä täysin pinnallisiksi ja mikäli halutaan syventyä johonkin erityisalueeseen, niin tällöin erikoistuminen tapahtuu jo kouluopetusvaiheessa.

Tähän ongelmaan on pyritty hakemaan vastausta edellä kuvatulla historiallisfilosofisella opetustavalla. Tällöin opetuksessa voidaan keskittyä ydinalueisiin, mutta kuitenkin tuomaan oppilaille käsitys oppiaineista nimenomaan tutkimuksellisina aloina. Oppilaat oppivat näkemään, miten kokeellisessa tieteessä edetään ja miten matematiikka on kasvanut osaksi kokeellista tutkimusta. Geometrinen analyysi tuo esiin kokeellisen tutkimuksen metodisen logiikan. Geometrian ongelmanratkaisumenetelmä on olennaisesti samanlainen kuin kokeellisen tutkimuksen menetelmä (Hintikka, 1969). Geometrikko ei lähde vain piirtämään, vaan hän tutkii mallikuvion osien välisiä riippuvuussuhteita (Hintikka, 1969, 276).

Geometrinen analyysi toimii hyvin kokeellisen tieteen esimerkkinä niin Descartesin kuin Newtoninkin kohdalla eikä asia ole olennaisesti muuttunut. Kuitenkin geometrisen analyysin perustana on vahva oletus: mallikuvioon on piirretty kaikki olennaiset elementit, jolloin analyysi voidaan suorittaa loppuun. Descartes piti tätä ongelmattomana ja hyväksyttävänä asiana, jota ei tarvinnut tarkemmin pohtia (Hintikka, 1969). Kuinka paljon tällaista on tieteellisessä ajattelussamme. Monien luonnontieteilijöiden kannattama (maltillinen) instrumentalismi on eräs vastaus tähän ongelmaan: tarkasti ottaen tieteilijä tutkii ja tulkitsee malleja, joiden suhde reaalimaailmaan jää avoimeksi (Matthews, 2014). Tällöin kuitenkin joudumme kysymään luonnontieteen perusteita koskettavan kysymyksen: eikö kuitenkin luonnontieteilijän päämäärä ole saavuttaa todenmukaista tietoa todellisuudesta? Tähän vastaaminen on kuitenkin toisen artikkelin teema.

LOPUKSI

Matematiikka on itsessään kiehtova ja sovellutuksiltaan rikas oppiaine. Kaikilla kouluasteilla matematiikan opetuksen keskeinen tavoite on saattaa oppilaat ymmärtämään matematiikkaa ja matemaattista ajattelua. Tätä voi toteuttaa keskittymällä matematiikkaan itseensä ja/tai matematiikan sovellutuksiin. Kuitenkin kaiken aikaa on pidettävä mielessä ymmärryksen kasvu eikä niinkään teknisen taituruuden hioutuminen tai lopullisen totuuden saavuttaminen ja siitä kiinni pitäminen.

Artikkelissa on viitattu niin matematiikan merkityksellisyyteen kuin opetuksen ja oppimisen dialogisuuteen. Artikkelissa on tuotu esiin näiden monimerkityksellisyys. Kuitenkin artikkelissa tuodaan esiin, että dialoginen menetelmä on relatiivinen oppijan tietotasoon ja tässä merkityksessä oppilaslähtöistä. Artikkelissa argumentoidaan, että tällainen dialoginen lähestymistapa perustuu formaalin logiikan sijaan episteemiseen logiikkaan. Konkreettisena esimerkkinä tuotiin Platonin erittäin hieno dialogi Menon, jossa annetaan yksityiskohtainen kuvaus menetelmän soveltamisesta. Näin myös matematiikan henkilökohtainen merkityksellisyys voi kasvaa. Artikkelissa viitataan myös alalla tapahtuvaan laajaan ja monipuoliseen ajankohtaiseen keskusteluun.

Ei ole mitään patenttiratkaisua, vaan opetuksessa ja tieteessä tulee edetä askel askeleelta. Kysellen ja vastaillen. Kysymysten ja vastausten tehtävä on suunnata ja ohjata oppimis- ja tutkimusprosessia kohti syvempää ymmärrystä. Tässä suhteessa tiede ja opiskelu noudattavat samankaltaista logiikkaa. Tätä ei voi tehdä persoonattomasti, vaan kyse on toisen kohtaamisesta, dialogista. Niin opettaminen kuin oppiminen ovat vastuullisia tehtäviä. Kahden vastuullisen kohdatessa voidaan kysellen ja vastaillen edetä kohti ymmärrystä. Opettajat ovat pääsääntöisesti vastuullisia ja asiantuntevia henkilöitä, joten voimme olla asian suhteen luottavaisin mielin.

LÄHTEET

Barbin, E., Jankvist U. T., ja Hoff Kjeldsen, T. (toim.), (2015). *History and Epistemology in Mathematics Education*, Danish School of Education, Aarhus University

Blay, M., (1993). *Reasoning with the Infinite*, Chicago: University of Chicago Press.

Bochner, S., (1966). *The Role of Mathematics in the Rise of Science*, New Jersey: Princeton University Press

Bos, H. J. M., (1993). *Lectures in the History of Mathematics*, American Mathematical Society; London Mathematical Society.

Bos, H. J. M., (2001). Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction, NY: Springer

Boyer, C. B., (1949/1939). The History of the Calculus and its Conceptual Development, Dover, NY

Bråting, K., (2012). Visualizations and Intuitive Reasoning in Mathematics, *The mathematics Enthusiast*, vol. 9(1), http://uu.diva-portal.org/smash/get/diva2:447773/FULLTEXT01.pdf. (Read 28.8.2018.)

Bråting, K., Hemmi, K., Madeij, L., & Röj-Lindberg, A-S., (2016). Towards Research-Based Teaching of Algebra – Analyzing Expected Student Progression in the Swedish Curriculum for Grades 1-9, *13th International Congress on Mathematical Education*, < http://uu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1107613/FULLTEXT01.pdf>. (Read 28.8.2018.)

Bråting, K., Österman, T. (2017). John Dewey and mathematics education in Sweden. In: "Dig where you stand" 4. Proceedings of the Fourth International Conference of the History of Mathematics Education (pp. 61-72). Roma: Edizioni Nuova Cultura <https://doi.org/10.4458/8647>. (Read 28.8.2018.)

De Toffoli, S., (2017). 'Chasing' the Diagram – the Use of Visualizations in Algebraic Reasoning, *The Review of Symbolic Logic*, vol. 10(1), pp. 158-186.

Hintikka, J. (1969). *Tieto on valtaa*. Porvoo, Helsinki: WSOY.

Hintikka, J., (1973). Logic, Language-Games and Information: Kantian Themes in the Philosophy of Logic, Oxford: Clarendon Press.

Hintikka, J., (1982). Dialogical Model of Teaching, *Synthese* 47, ss. 39-59.

Hintikka, J., (2007). Socratic Epistemology: Explorations of Knowledge-Seeking by Questioning, Cambridge University Press

Hintikka, J., (2011). What is the Axiomatic Method?, *Synthese* 183, pp. 69-85.

Hintikka, J., (2012). Method of Analysis: A Paradigm of Mathematical Reasoning?, *History and Philosophy of Logic*, 33 (1), pp. 47-67.

Hintikka, J. & Bachman, J., (1991). *What If …? Toward Excellence in Reasoning,* Mountain View, CA: Mayfield Publishing Company.

Hintikka, J., Halonen, I. ja Mutanen, A., (2002). Interrogative Logic as a General Theory of Reasoning, kirjassa Johnson R. H. ja Woods, J., (toim.), *Handbook of Practical Reasoning*, Dordrecht: Kluwer Academic, ss.

Hintikka, J. & Remes, U. (1974). *The Method of Analysis: Its Geometrical Origin and Its General Significance*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Hofstadter, D. R., (1979). Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid, Basic Books.

Horkheimer, M. & Adorno, T. W., (2008/1944). *Valistuksen dialektiikka: filosofisia sirpaleita*, Tampere: Vastapaino

Kelly, K., (1996). *The Logic of Reliable Inquiry*, Oxford: Oxford University Press.

Kneale, W. & Kneale, M., (1988/1962). *The Development of Logic*, Oxford: Clarendon Press

Matthews, M. R. (ed.), (2014). International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching; Dordrecht: Springer

Lehti, R., (1969). *Integraalilaskennan varhaishistoriaa*, Helsinki: Ydinfysiikan laitos.

Lehti, R., (1971). Matemaattisen ajattelutavan kehitys, kirjassa *Logiikka ja matematiikka*, WSOY.

Niiniluoto, I. & Wallgren, T. (eds.), (2017). *On the Human Condition*, Helsinki: Societas Philosophica Fennica.

Platon, (1978). Menon, *Teokset osa 2*, Keuruu: Otava, ss. 107-148.

Platon, (1979). Theaitetos, *Teokset osa 3*, Keuruu: Otava, ss. 261-354.

Radford, L., (2011). Dialogism in Absentia or the language of Mathematics, in Silvia Sbaragli (ed.), La Mathematica e la sua Didattica Quarant'anni di Impegno; Mathematics and its Didactics: Forty Years of Commitment. In Occasion of the 65 Years of Bruno D'Amore. Pitagora Editirice Bologna

Webb, J., (2006). Constructions, Intuitions, and Theorems, kirjassa Auxier, R. E., ja Hahn L. E., (eds.) *The Philosophy of Jaakko Hintikka*, Library of Living Philosophers, Chicago: Open Court, vol. 30, ss. 195–301.

Weyl, H., (1956). The Mathematical Way of Thinking, kirjassa Newman, J. R., *The World of Mathematics*, vol. Three, New York: Simon and Schuster.

von Wright, G. H., (1992). Logiikka ja filosofia 1900-luvulla, kirjassa Minervan pöllö, Keuruu: Otava, ss. 27-47.

von Wright, G. H., (2006). Moderni identiteetti ja eettisyys, *Ajatus* 63, ss. 7-19.