MATEMATIIKAN JA REAALIMAAILMAN KOHTAAMINEN OPETTAJANKOULUTUKSESSA: LEVEYSASTEEN MÄÄRITTÄMINEN POHJANTÄHDEN AVULLA

Jaska Poranen & Terhi Mäntylä

Tampereen yliopisto

TIIVISTELMÄ

Tulevien matematiikan opettajien tehtävänä on muun muassa saada oppilaiden kiinnostus matematiikkaan heräämään ja auttaa oppilaita näkemään matematiikan merkitys arkipäivän ongelmien ratkaisemisessa. Nämä tavoitteet silmällä pitäen matemaattisten aineiden opettajaopiskelijoille suunniteltiin tehtävä: sijaintipaikan leveysasteen selvittäminen Pohjantähden avulla. Tehtävä vaatii alkeellista geometriaa sekä fysiikkaa yhdessä sen perustelemiseksi, että leveysaste todella löytyy näin. Tutkimuksen aineisto koostui opiskelijoiden 21 tehtäväraportista, jotka analysoitiin ja luokiteltiin sisällönanalyysin keinoin. Tuleville matemaattisten aineiden opettajille tämä osoittautui yllättävän vaikeaksi, tehtävä poikkesi totutusta matematiikan tehtävästä.

JOHDANTO

Yliopistossa matematiikka usein näyttäytyy abstraktina tieteenä ja sen yhteydet arkielämään eivät ole opetuksen keskiössä. Koulussa puolestaan matematiikan ilmeneminen jokapäiväisessä elämässä, sen empiiriset juuret ja mahdollisuus jäsentää ympäristöään korostuvat, ne tuovat mielekkyyttä ja merkityksellisyyttä matematiikan opetukseen ja oppimiseen. Opettajaksi opiskelevien pitäisi hallita matemaattisen jatkumon molemmat päät ja mitä nuorempien lasten kanssa työskennellään, sitä enemmän korostuu matematiikan empiirisyys ja konkreettisuus. Tämä tulee esiin myös tulevassa työssä opettajana, esimerkiksi valtakunnallisen perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2014, 376) on matematiikan oppimisympäristöjä ja työtapoja vuosiluokilla 7-9 luonnehdittu seuraavasti:

> Opetuksen lähtökohdat valitaan oppilaita kiinnostavista aiheista, ilmiöistä ja näihin liittyvistä ongelmista. Konkretia toimii edelleen tärkeänä osana matematiikan opiskelua. … Ongelmia matematisoidaan, ratkaistaan ja tulkitaan yksin ja yhdessä.

Opetuksen lähtökohdiksi pitäisi siis valita oppilaita kiinnostavia aiheita. Toisaalta siinä ei varsinaisesti sanota, millaiset asiat tuollaisia voisivat olla, eikä siinä myöskään analysoida tai perustella, mikä rooli mielenkiinnolla oppimisessa ja opettamisessa oikein on. Tekstissä kuitenkin mainitaan muun muassa konkretia ja matematisointi, joiden voi ajatella viittaavan joko reaalimaailman huomioon ottamiseen suoraan opettamisessa tai yleisemmin ongelmiin, jotka vaativat esimerkiksi todellisuuden matemaattista mallintamista.

Tässä tutkimuksessa keskitytään tarkastelemaan, miten opettajaksi opiskelevat hahmottavat sekä sisällöllisesti että kokemuksellisesti tehtävän, jossa yhdistyy matematiikka ja reaalimaailma. Tehtävä annettiin kaikille matemaattisten aineiden pedagogisia opintoja suorittaville. Pääaineesta (matematiikka, fysiikka, kemia, tietojenkäsittelytiede) riippumatta kaikki tulevat todennäköisesti opettamaan matematiikkaa koulussa. Kirjoittajia kiinnostaa, millaisia valmiuksia opiskelijoilla on kohdata ja käsitellä annettua reaalimaailman ongelmaa, leveysasteen määrittämistä Pohjantähden avulla.

TAUSTA

Mielenkiinto tai kiinnostus psykologisena tilana kuvaa erästä erityistä suhdetta henkilön ja kohteen välillä. Tällainen subjekti-objekti -relaatio on olemassa, kun henkilö suhtautuu myönteisesti kohteeseen ja pitää sitä arvokkaana, ja jolloin edelleen mahdollistuu sisäisen motivaation ja sitoutumisen liittyminen siihen (Ufer, Rach, & Kosiol, 2017; Rellensmann, & Schukajlow, 2017; Schraw, & Lehman, 2001). Opetustyössä pyritään näin ollen luonnollisesti herättämään oppilaan mielenkiinto opetettavaan asiaan, jotta niin oppijalle itselleen merkityksellinen ja mielekäs oppimisprosessi käynnistyisi kuin myös tavallisemmat tai yleisemmät opetustyölle asetetut tavoitteet saavutettaisiin. Useimmille opettajille tämä tarkoittaa koko työuran kestävää kehitystyötä, mikä tulee huomioida jo alan koulutuksessa. Uudet opetussuunnitelmat (Opetushallitus, 2014; 2015) ohjaavat myös ainerajojen ylittämiseen. Tämän voi nähdä paitsi haasteena opettajille niin heille myös uutena mahdollisuutena luoda oppilaita kiinnostavia ja samalla sisällöllisesti rikkaita tehtäviä ja ajattelutapoja.

Kun tuleva matematiikan opettaja aloittaa opettajan pedagogiset opinnot, on hänellä oltava vähintään 50 opintopisteen edestä yliopistollisia matematiikan suorituksia. Yliopistossa matematiikkaa opiskellaan sen tiedeluonteen mukaisesti, käsitteiden määritelmiin, käsitteitä ja niiden välisiä suhteita koskeviin väittämiin sekä näiden todistuksiin keskittyen (vrt. esim. Ufer ym., 2017, 398). Isojen tieto- tai teoriakokonaisuuksien rakentamisessa, kuten esimerkiksi klassisessa geometriassa (ks. esim. Lehtinen, Merikoski, & Tossavainen, 2007), on olennaista sisäinen johdonmukaisuus ja ristiriidattomuus, ei ulkoinen maailma (vrt. myös esim. Lehti, 1971, 85).

Näin matematiikan muodolliset opinnot eivät pakosti anna juuri mitään valmiuksia ulkoiseen maailmaan liittyvien ongelmien luomiseen ja kohtaamiseen koulussa. Toisaalta niin opetussuunnitelmat (Opetushallitus, 2014; 2015) – kuten jo huomattiin – sekä ainedidaktinen tutkimus painottavat myös tämän tyyppisten aktiviteettien huomioimista. Esimerkiksi artikkelissa (Schukajlow, Rakoczy, & Pekrun, 2017, 316) viitataan yläkoululaisten parissa tehtyyn tutkimukseen, jossa oppilaille oli annettu eräs reaalimaailmaan ja Pythagoraan lauseeseen liittyvä ongelma. Tällaisella tehtävällä oli ollut positiivinen vaikutus muun muassa mielenkiinnon, autonomian ja itseohjautuvuuden kokemuksiin työskentelyssä.

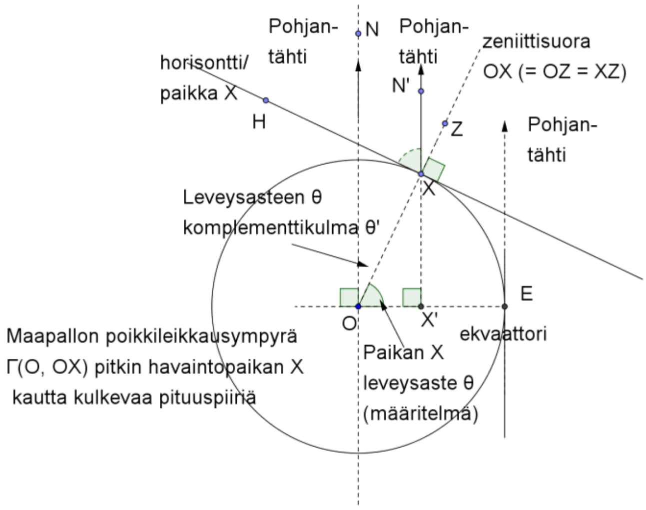
Yleisesti reaalimaailmaan liittyvän matemaattisen ongelman käsittely vaatii vähintäänkin informaation siirtoa matematiikan ja ulkoisen todellisuuden välillä. Jos ongelma on ei-triviaali ja riittävän kompleksinen, niin tarvitaan lisäksi todellisuuden matemaattista mallintamista, matematisointia (vrt. esim. Mellone, Verschaffel & Van Dooren 2017, 3); mallin sisällä voidaan sitten tehdä puhtaasti matemaattisia operaatioita, mutta niiden sisältöjä ja merkityksiä on arvioitava ja koeteltava myös suhteessa fysikaaliseen maailmaan. Tässä opettajan on lisäksi pystyttävä rakentamaan eheitä perustelu- ja päättelyketjuja, koska jos opettaja ei siihen kykene, hän ei pysty myöskään ohjaamaan oppilaitaan muodostamaan niitä. Aiemman tutkimuksen perusteella opettajaopiskelijoilla on tässä haasteita (Mäntylä & Nousiainen, 2014).

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan reaalimaailman ongelmaa, joka vaatii ensinnäkin informaation siirtoa matematiikan ja ulkoisen todellisuuden välillä. Tällöin harvemmin voidaan pysytellä puhtaasti matematiikan piirissä, sen sijaan pitää soveltaa useamman oppiaineen tietoja ja menetelmiä. Tämän tyyppiset ongelmat edellyttävät tilanteen matematisointia ja tässä kyseisessä tapauksessa tämän prosessin perustelemista myös fysikaalisen ajattelun kautta. Fysiikan tiedeluonteen takia sen voi ajatella olevan usein, kuten tässäkin, läheinen ja luonteva ”yhteistyökumppani” matematiikalle tämän tyyppisissä ongelmissa (vrt. esim. Pietrocola, 2008).

LEVEYSASTEEN MÄÄRITTÄMINEN POHJANTÄHDEN AVULLA

Pohjantähti sijaitsee noin asteen päässä taivaan pohjoisnavasta, maapallon pyörimisakselin suunnasta. Prekession vaikutuksesta se vielä lähenee sitä hieman, aina vuoteen 2115 asti ja sen etäisyys maapallosta on 330 valovuotta (Kaila, 1979, 176). Pohjantähdellä on erikoinen rooli taivaan kiintopisteenä: siis pisteenä, joka näyttää pysyvän aina samassa paikassa tähtitaivaalla esimerkiksi Tampereella olevan havaitsijan horisonttitasoon nähden, toisin kuin muut tähdet – riippumatta maapallon vuorokautisesta pyörimisliikkeestä akselinsa ympäri ja/tai maapallon vuotuisesta rataliikkeestä auringon ympäri.

Teoksen *Tähtitieteen perusteet* (1984, 25) mukaan ”leveysasteesta puhuttaessa tarkoitetaan yleensä *maantieteellistä leveyttä*, joka on havaintopaikan luotisuoran ja maapallon ekvaattorin välinen kulma”. Pidimme tätä määritelmää lähtökohtana ideoidessamme tehtävänantoa opiskelijoille. Laadimme sen pohjalta mallikuvan (Kuva 1), joka kytkee asiaan myös Pohjantähden.



Kuva 1. Mallikuva maapallon poikkileikkausympyrän Γ(O, OX) avulla sille, miksi Pohjantähden korkeuskulma N′XH horisontista = paikan X leveysaste eli kulma X′OX.

Kuvan 1 mukaisesti siis paikan X leveysaste on määritelmän mukaan kulma X′OX, jonka kärkipiste = maapallon keskipiste O. Sieltä ei kukaan pääse tätä kulmaa mittaamaan, mutta Pohjantähden kulmakorkeus N′XH on puolestaan helppo konkreettisesti määrittää. Opiskelijoiden piti perustella, että maanpäällinen kulma N′XH on todella = kulma X′OX (hyvällä tarkkuudella). Tällöin tarvitaan yksinkertaista geometrista päättelyä, mutta reaalimaailmaa ei voi nyt unohtaa sen edellytyksenä.

Tämä prosessi sisältää jokseenkin välittömästi havaittavissa olevia koulugeometrisia käsitteitä (vrt. Kuva 1) suuren määrän. Mutta ne, kuten kulma, ympyrän tangentti jne., tarvitsevat ja mahdollistavat nyt myös fysikaalisen tulkinnan ja merkityksenannon. Esimerkiksi kulman X′OX (Kuva 1) merkitykseen liittyy luotilangan kautta myös painovoima, ja ympyrän Γ(O, OX) pisteeseen X asetettuun tangenttiin havaintopaikan X horisontti – tai oikeammin horisonttitaso. Kuvassa 1 *näyttää* myös olevan yhdensuuntaisia puolisuoria, kuten ON ja XN′, joita leikkaa puolisuora OZ. Tätä mahdollista yhdensuuntaisuutta pitäisi kuitenkin perustella fysikaalisesti, esimerkiksi valonsäteiden (fysikaalisesti) suoraviivaisen etenemisen kautta. Toisaalta tällöin on pakosti kiinnitettävä huomiota geometrian sisäiseen, suorien yhdensuuntaisuutta koskevaan ajatteluun – mikä tässä tapauksessa saattaa johtaa jopa kiintoisaan kognitiiviseen ristiriitaan.

Näin tämä, näennäisesti ehkä yksinkertainen Pohjantähteen liittyvä oppimistehtävä, koulukontekstiin siirrettynä, olisi käyttökelpoinen myös yrityksessä aikaansaada pysyvämpää, yksilöllistä mielenkiintoa ja aktiivisuutta oppijassa (vrt. esim. Schraw, & Lehman, 2001, 28 – 29;). Tässä tapauksessa se voisi kohdistua ainakin matematiikan (erityisesti geometrian), fysiikan, maantieteen ja tähtitieteen oppisisältöihin. Se voisi johtaa myös yleisempään oivallukseen (vrt. esim. Wagenschein, 2000) teoreettisilta vaikuttavien matematiikan/geometrian asioiden merkityksestä myös reaalimaailmassa – ja sitä kautta parempaan opiskelumotivaatioon.

TUTKIMUKSEN TOTEUTUS JA MENETELMÄT

Tutkimuksemme tavoitteena on tarkastella, miten opiskelijat sekä sisällöllisesti että kokemuksellisesti hahmottivat annetun reaalimaailman tehtävän. Tutkimuskysymyksemme ovat:

1. Miten opiskelijat perustelevat raporteissaan havaintopaikan leveysasteen mittauksen periaatteen ja mittauksen?
2. Miten mielekkääksi tai merkityksiä luovaksi opiskelijat ovat kokeneet tehtävän raporttien perusteella?

Tutkimuskysymys 1 auttaa vastaamaan sisällölliseen tavoitteeseen: millaisia sisällöllisiä näkökulmia opiskelijat tuovat esiin ja miten he onnistuvat kytkemään ne yhtenäisiksi perusteluiksi. Tutkimuskysymys 2 auttaa vastaamaan kokemukselliseen näkökulmaan: miten opiskelijat ovat itse kokeneet tehtävän tai miten he luonnehtivat tehtävän roolia mahdollisessa opetuksen kontekstissa.

Tutkimuksen konteksti ja osallistujat

Tutkimus suoritettiin matemaattisten aineiden pedagogisten opintojen ensimmäisellä aineopintojen kurssilla (Ainedidaktiikka 1, 5 op) syksyllä 2017. Kurssilla oli opiskelijoita 28 ja kaikilla oli vähintään 50 op ensimmäisen opetettavan aineen opintoja. 11 opiskelijalla oli matematiikka pääaineena ja fysiikka sivuaineena, viidellä opiskelijalla oli fysiikka pääaineena ja matematiikka sivuaineena. Kuudella opiskelijalla oli matematiikka pääaineena ja yhdellä sivuaineena, fysiikkaa heillä ei ollut ollenkaan. Lisäksi kahdella opiskelijalla ei ollut matematiikkaa eikä fysiikkaa opetettavana aineena.

Opiskelijoille annetut tehtävät

Opiskelijoille annettiin seuraavat tehtävät Tampereen leveysasteen määrittämiseksi Pohjantähden avulla (tehtävänanto sisälsi myös kuvan 1 kaltaisen mallikuvan). Opiskelijoiden joko sähköisesti tai kirjallisesti palauttamat tehtäväraportit muodostavat tutkimusaineistomme. Opiskelijat saivat itse valita, tekevätkö he tehtävät itsenäisesti vai ryhmissä.

> Paikkakunnan leveysaste voidaan kohtalaisella tarkkuudella määrittää Pohjantähden avulla. Suunnataan esimerkiksi tauluharpin liituvarsi kohti Pohjantähteä ja käännetään kiinnitysvarsi horisonttitason suuntaiseksi. Leveysaste = näiden varsien välinen pienempi kulma (kulma N’XH; kuva 1).

1. Selvittäkää asianmukaisesti, yksin tai pienryhmässä, matemaattisesti ja fysikaalisesti perustellen miksi Tampereen leveysaste = Pohjantähden kulmakorkeus horisontista.
2. Tehkää kuvan 1 mukainen mittaus. Kuvailkaa/raportoikaa lyhyesti mittausolosuhteet, mittauksen toteutustapa (mittaväline, yksin/ryhmässä yms.) sekä mittaustulokset.

3. Millä kouluasteella, missä oppiaineissa ja millaisilla opetusjärjestelyillä yllä kuvatut mittaukset voisi mielekkäästi teettää? Perustelua myös opetussuunnitelmien (Opetushallitus 2014, Opetushallitus 2015) kautta.
4. Miten yo. tehtävä sopisi oppiainerajoja ylittävään yhteistyöhön (eli ns. eheyttävään opetukseen eli monialaiseen oppimiseen eli ilmiöoppimiseen) koulussa?

Opiskelijoille alun perin annettuun kuva hieman poikkeaa kuvasta 1. Kuvaan 1 on lisätty eräitä pisteitä (X′, E, Z, N′, N, H) ja jana X′X on tehty katkoviivalla, jotta se paremmin erottuisi puolisuorasta XN′. Lisäksi pisteestä E on poistettu suoran kulman merkintä. Nämä muutokset eivät vääristä opiskelijoille annettua ongelmaa ja mallikuvaa, sen sijaan ne helpottavat opiskelijoiden antamien vastauksien analysointia.

Tutkimuksemme lähtöoletuksena oli, että kaikki matemaattisten tieteiden opettajaopiskelijat löytävät taivaalta Pohjantähden – tai tarvittaessa selvittävät, kuinka se löytyy – sekä tuntevat esimerkiksi sen erikoisen roolin taivaan kiintopisteenä.

Analyysi

Aineisto koostuu 28 opiskelijan 21 raportista. Näistä 17 on yksilöraportteja, kaksi pareittain tehtyjä raportteja, yksi kolmen hengen raportti ja yksi neljän hengen raportti. Raportit analysoitiin ja luokiteltiin sisällönanalyysin keinoin, miten opiskelijat perustelivat fysikaalisesti ja matemaattisesti mittauksen idean (tehtävän 1 vastaukset). Ohjeistuksesta huolimatta vain kolme opiskelijaa oli tehnyt mittauksen (tehtävän 2 vastaukset), joten sen analyysi on pintapuolisempi. Lopuksi, tutkimuskysymykseen kaksi vastaamiseksi tehtävien 3 ja 4 vastauksista analysoitiin ja luokiteltiin, miten mielekkääksi tai merkityksiä luovaksi opiskelijat kokivat mittauksen. Tutkimuskysymykseen 1 liittyvää sisällönanalyysiä ohjasi tieto siitä, mitä hyvään perusteluun pitäisi sisältyä. Esimerkiksi perusteltaessa leveysasteen määrityksen fysikaalisia lähtökohtia, pitäisi tuoda esiin Pohjantähti hyvin kaukaisena kiintopisteenä ja valon suoraviivainen kulku. Matemaattisten perusteluiden luokittelemiseksi muotoilimme ensin kaksi seuraavaksi esiteltävää mahdollista asianmukaista selitystapaa (i) ja (ii), joita etukäteen arvelimme opiskelijoiden käyttävän niiden tuttuuden takia. Raporttien perusteluiden sisällöllinen laatu ohjasi luokittelun syntymistä.

Selitys (i). *Jos suora leikkaa kahta yhdensuuntaista suoraa, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuria* (geometrian lause, ks. esim. Lehtinen, Merikoski, & Tossavainen, 2007, 32). Kuvassa 1 suora OZ leikkaa suorat ON ja XN′. Kulmat XON ja ZXN′ ovat samankohtaiset, koska suora OZ on niillä molemmilla samannimisenä eli oikeana kylkenä. Pisteiden O ja N/Pohjantähti määräämä suora on tässä = maan pyörimisakseli, joka kulkee maan keskipisteen O kautta ja joka on kohtisuorassa maan ekvaattoriin/ekvaattoritasoon nähden. Suorassa XN′ on piste X havaitsijan paikka ja N′ = Pohjantähti. Suorat ON ja XN′ voidaan ajatella tai perustella yhdensuuntaisiksi joko Pohjantähden suuren etäisyyden tai valonsäteiden suoraviivaisen kulun takia. Näin geometrista ja fysikaalista ajattelua yhdistämällä voidaan päätellä, että kulmat XON ja ZXN´ ovat yhtä suuret. Zeniittisuora OZ (= suora XZ) on määritelmänsä mukaan kohtisuorassa pisteen X määräämään horisonttiin/horisonttitasoon nähden. Täten myös kulmat X′OX ja N′XH ovat yhtä suuret eli Pohjantähden korkeuskulma horisontista = paikan X leveysaste.

Yllä käytetty geometrinen periaate on koulugeometriassa hyvin tavallinen ja se voidaan esitellä jo alakoulussa. Yläkoulussa ja lukiossa sitä sovelletaan laskennollisesti painottuneessa geometriassa vaikkapa silloin, kun on perusteltava kahden kolmion yhdenmuotoisuutta (vrt. Opetushallitus 2014, 2015). Toisaalta kysymys suorien yhdensuuntaisuudesta on syvällisemmän geometrisen ajattelun kannalta aivan keskeinen. Esimerkiksi se, että tasokolmion kulmien summa = oikokulma, edellyttää käsitystä yhdensuuntaisista suorista – ja niitä leikkaavasta suorasta. Myös kuuluisa Eukleideen *paralleeliaksiooma* liittyy asiaan. Muun muassa näistä syistä johtuen ajattelimme, että tulevat matemaattisten aineiden opettajat käyttäisivät ilman muuta selitystä (i).

Kuvassa 1 on piste X′ pisteen X kohtisuora projektio ekvaattorilla OE. Missään ei kuitenkaan sanota, että (puoli)suora XN′ yhtyisi siihen. Näin sellainen järkeily, että ristikulmina kulmat ZXN′ ja OXX′ olisivat yhtä suuret – mistä edelleen seuraisi helposti varsinainen väite – ei toimi ilman fysikaalista perustelua suorien ON ja XN′ yhdensuuntaisuudelle.

Selitys (ii). Jos kahden terävän kulman samannimiset kyljet tai niiden jatkeet ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niin kulmat ovat yhtä suuret (geometrian lause). Tämä lause on mahdollista ymmärtää selitystavassa (i) käsitellyn, keskeisen geometrisen periaatteen kautta, mutta koulussa se saatetaan esittää myös siten, että yhteys siihen ei ole kovin ilmeinen. Esimerkiksi lukiossa se voidaan mainita fysiikassa/matematiikassa kaltevalla tasolla olevan kappaleen tarkastelun yhteydessä. Kirjoittajien mielestä tämä periaate on huomionarvoinen myös siksi, että ilmeisesti sitä soveltaen voisi tehdä yksinkertaisen kulmanmittauslaitteen.

Selitysperusteen (ii) käyttö voisi edetä siten, että tarkastellaan suoraan kulmia X′OX ja N′XH (Kuva 1). Näiden kulmien vasemmat kyljet, OX ja XH, ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden zeniittisuoran OZ ja horisonttiviivan/ympyrän tangentin XH määritelmien takia. Kulman N′XH oikean kyljen XN′ jatke on kohtisuorassa kulman X′OX oikeaan kylkeen OX′ nähden, *jos suora XN′ on yhdensuuntainen suoran ON kanssa* – ja tässä tarvittaisiin siis myös fysikaalista perustelua.

Tutkimuskysymykseen 2 liittyvä sisällönanalyysi oli puhtaasti aineistolähtöinen. Opiskelijoiden raporteista poimittiin mielekkyyteen ja merkityksellisyyteen liittyvät kohdat, joita vertailtiin eri luokkien muodostamiseksi. Toinen kirjoittajista analysoi ja luokitteli aineiston. Luokitteluiden luotettavuuden varmistamiseksi toinen kirjoittajista rinnakkaisluokitteli koko aineiston ja luokittelijoiden yksimielisyys oli 87 %, jota pidettiin riittävänä. Lisäksi tulososiossa on pyritty esittämään eri luokista aineistolainauksia, jotta lukija voi arvioida luokittelua.

TULOKSET

Tuloksissa on eri luokkien nimen jälkeen esitetty luokan yleisyys aineistossa sekä lukumääränä (N) että prosentteina (%), viimeinen luku (0-2) viittaa luokan koodiin taulukossa 1.

Fysikaaliset lähtökohdat. Pohjantähden mittausperiaatteessa oleellista on perustella se, miksi Pohjantähti sopii mittaukseen ja miksi Pohjantähden valo voidaan esittää yhdensuuntaisina suorina (ks. Kuva 1) (Pohjantähden suuri etäisyys/valon suoraviivainen eteneminen). Fysikaalisten lähtökohtien perustelut luokiteltiin kolmeen luokkaan:

Kelvollinen perustelu (N=7; 33 %; 2). Pohjantähden pysyminen paikallaan yötaivaalla tai etäisyys Maasta on tuotu esiin.

> Tämä voidaan toteuttaa mihin vuodenaikaan hyvänsä ja se perustuu pohjoiseen napatähteen Pohjantähteen. (R11)

Puutteellinen perustelu (N=1; 5 %; 1). Pohjantähden suuri etäisyys on tuotu esiin, mutta tämän tiedon merkitystä ei ole kytketty mittauksen ideaan.

Puuttuva perustelu (N=13; 62 %; 0). Mittauksen fysikaalisia lähtökohtia ei ole tuotu esiin.

Vain alle puolet opiskelijoista pohtivat mittauksen fysikaalisia lähtökohtia, suurin osa otti kuvan sisältämät tiedot valmiina. Sellaista pohdintaa, jossa olisi tuotu esiin sekä Pohjantähden sopivuus leveysasteen mittaukseen, että sen etäisyydestä johtuva perustelu kuvan 1 yhdensuuntaisille suorille, ei aineistossa ollut.

Matemaattiset perustelut. Edellä on tuotu esiin ennakoituja matemaattisia perusteluita mittaukselle, sen pohjalta opiskelijoiden perustelut raporteissa luokiteltiin neljään luokkaan:

Matemaattisesti tyydyttävä perustelu (N=7; 33 %; 2). Kuvan 1 mukaisessa leveysasteen perustelussa käytetään suorien yhdensuuntaisuutta, mutta perusteluketjussa on edelleen puutteita, terminologiassa epämääräisyyttä tai perustelu jää kesken (kuten alla).

> Tällöin syntyy kaksi kulmaa: maapallon keskipisteestä pohjantähden suuntainen viiva ja zeniittisuora OX välinen kulma ja vastaavien viivojen välinen kulma paikassa X. Tällöin nämä kulmat ovat yhtä suuret, sillä niiden viereiset sivut [vasemmat kyljet] ovat yhdensuuntaiset. (R14)

Matemaattisesti välttävä perustelu (N=5; 24 %; 1). Perustelussa käytetään ristikulmia, yhdenmuotoisia kolmioita, tms. jonkinlaisina havaintototuuksina kuvasta 1, mutta olennaista suorien yhdensuuntaisuutta ei mainita. Terminologiassa on epämääräisyyttä. Leveysaste jää perustelematta.

> Mitataan kulmaa β [ilmeisesti kulmaa N'XH, kuva 1]. Zeniittisuoran ja Pohjantähteä kohti olevien suorien välinen kulma on 90°-β, jonka vastinkulma [kulman ZXN' ristikulma OXX'] on myös 90°-β. Tästä saadaan leveysasteen kulmaksi β [tarkoitetaan ilmeisesti kulmaa X'OX, kuva 1]. (R10)

Matemaattisesti toimimaton tai epämääräinen perustelu (N=4; 19 %; 0,5). Perustelussa käytetään epämääräisiä matemaattisia perusteluita ja perustelu on epälooginen. Selitetään esimerkiksi, mitä kulmia tauluharpin osat kuvassa 1 vastaavat.

Perustelu puuttuu (N=5; 24 %; 0). Mittaukseen liittyvät matemaattiset perustelut puuttuvat tai on vedottu, että nähdään kuvasta 1.

Perusteluiden matemaattisessa puolessa kolmannes opiskelijoista oli osannut esittää matemaattisesti olennaisia periaatteita perusteluiden osana. Nämä perustelut pohjautuivat suorien yhdensuuntaisuudelle. Ennakoitua selitysperustetta (ii) ei käyttänyt kukaan. Kaiken kaikkiaan perustelut jäivät vielä vaillinaisiksi, joten tässä on vielä kehityttävää.

Mittaus. Kuten edellä tuotiin ilmi, vain kolmessa raportissa esitettiin mittaustulokset Tampereen leveysasteelle Pohjantähden avulla. Raportit luokiteltiin kolmeen luokkaan:

Mittaus on tehty (N=3; 14 %; 2). Opiskelija(t) on suorittanut mittauksen. Yhdessä raportissa mittaus oli tehty esimerkkinä mainitun tauluharpin avulla, raportissa oli kuvattu myös, miten Pohjantähti löydetään yötaivaalta. Toisessa mittaus oli tehty käsivarsien avulla ja tästä oli otettu kuva, josta kulma oli laskettu (virhemarginaali tässä oli suuri). Kolmannessa raportissa:

> Tein mittauksen kahden kynän avulla. Laitoin toisen kynän Pohjantähteä kohti ja toisen horisontin suuntaisesti. Kynien väliseksi kulmaksi mittasin kolmioviivaimella 70 astetta. (R6)

Mittauksen idea on kuvattu (N=10; 48 %; 1). Suurimmassa osassa oli kuvattu esimerkkinä mainitun tauluharpin käyttö mittauksessa. Yhdessä raportissa menetelmää pidettiin liian hankalana ja sen sijaan ideoitiin, miten jalallisen kaukoputken, mittanauhan ja laserkynän avulla mittaus voitaisiin tehdä. Yhdessä raportissa kuvattiin Pohjantähden tunnistaminen yötaivaalta.

Mittaus puuttuu (N=8; 38 %; 0). Mittaukseen ei viitattu millään tavalla (N=7) tai opiskelija vetosi pilvisyyteen tai pimeyden puutteeseen (N=3).

Tehtävä sai vain kolme opiskelijaa/opiskelijaryhmää menemään ulos ja kokeilemaan mittausta käytännössä.

Mielekkyys ja merkityksellisyys. Mielekkyyttä ja merkityksen luontia luokiteltiin sen pohjalta, miten opiskelijat pohtivat tehtävän merkitystä joko itselleen tai kouluopetuksessa. Tämän pohjalta muodostettiin kolme luokkaa:

Mielenkiintoinen tai merkityksiä luova tehtävä (N=10; 48 %; 2). Opiskelija joko tehtävän sisällön tai toteutusmuodon kautta tuo esiin mielenkiinnon heräämisen tai merkityksien luonnin.

> Leveysasteen määrittäminen on hyvä esimerkki toiminnallisesta työskentelystä. Siinä oppilaat voivat vapaasti liikkua, kommunikoida keskenään, esittää vapaasti omia ideoita, kysyä, ihmetellä, tutkia ja oppia uusia asioita. Tämä tuo

> mielekkyyttä opetukseen ja motivoi oppilaita todella ymmärtämään ympäröivän maailman ilmiöitä ja näkemään itseään aktiivisena toimijana. (R5)

Neutraali suhtautuminen tehtävään (N=5; 24 %; 1). Opiskelija pohtii tehtävän käyttöä eri sisältöjen opetuksessa, mutta pohdinnasta ei käy ilmi kokemukselliset näkökulmat.

Mielenkiinnoton tai sisällöltään sopimaton tehtävä (N=6; 29 %; 0). Opiskelija piti aihepiiriä tylsänä tai sisällöltään kouluopetukseen soveltumattomana.

> Muuten se on ehkä liian vaikea, koska se tuntui monista yliopisto-opiskelijoistakin vaikealta. […] Helposti tällaiset projektit voivat tuntua oppilaista todella haastavilta ja turhauttaviltakin? (R16)

Lähes puolet opiskelijoista piti tehtävää mahdollisuutena kytkeä reaalimaailma, matematiikka ja muutkin oppiaineet (etenkin maantieto ja fysiikka) mielenkiintoisella ja mielenkiintoa herättävällä tavalla yhteen.

Taulukossa 1 on esitetty opiskelijaraporttikohtaisesti luokittelut. Raportit 1-17 olivat yksilöraportteja, loput pareittain tai ryhmissä tehtyjä raportteja. Luku 0-2 viittaa luokitteluun ja pää- ja sivuaineessa ensimmäinen kirjain kertoo pääaineen, toinen sivuaineen. Tarkastelussa on mukana vain matematiikka (m) ja fysiikka (f), - on joko tietotekniikka tai kemia. Taulukon 1 perusteella hajonta raporttien välillä oli valtavaa ääripäinä raportit 1 ja 18. Tehtävän mielekkyyden ja huolellisten perusteluiden välillä ei ollut yhteyttä. Odotetusti heikoin raportti (1) oli opiskelijalla, jolla ei ollut matematiikkaa eikä fysiikkaa. Opiskelijoiden, joilla oli aineina sekä matematiikka että fysiikka, raportit olivat keskimäärin hieman parempia kuin niiden, joilla ei ollut fysiikkaa. Puolissa niistä raporteista, joissa matematiikan opettajaopiskelijoilla ei ollut fysiikkaa, tehtävä koettiin mielenkiinnottomaksi tai sopimattomaksi (2, 6 ja 20).

Taulukko 1 Opiskelijaraporttikohtaiset luokittelut.

Opiskelijaraportti	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Pää- ja sivuaine	-	m-	m-	m-	mf	m-	m-	mf	fm	fm	mf	mf	mf	fm	mf	mf	mf	fm	mf	m-	mf
Fysikaaliset lähtökohdat	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2	2	0	2	0	2	0	1	2
Matemaattiset perustelut	0	0,5	1	0,5	0	2	0,5	0,5	1	1	0	1	0	2	2	0	1	2	2	2	2
Mittaus	0	1	1	2	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	2
Mielekkyys ja merkityksellisyys	1	0	2	2	2	0	2	1	0	2	2	2	2	1	2	0	1	2	0	0	1

POHDINTA JA JOHTOPÄÄTÖKSET

Tehtävä osoittautui opettajaksi opiskeleville haastavaksi. He ovat vielä alkuvaiheessa opettajuudessaan ja se näyttäytyy siten, että huolellisten perusteluiden ja perusteluketjujen esittäminen ei vielä ole sujuvaa, mikä on linjassa aiemman tutkimuksen kanssa. Myös hyvin harva teki tehtävän kunnolla, ts. suoritti mittauksen. Tehtävä poikkesi huomattavasti totutusta matematiikan tehtävästä (yöllä tehtävä mittaus), tämä voi olla yksi syy siihen, miksi opiskelijat eivät tarttuneet tehtävään perinpohjaisesti. Lisäksi puolet matematiikan opettajaopiskelijoista, joilla ei ollut fysiikkaa sivuaineena, suhtautuivat kielteisesti tehtävään. Tästä huolimatta lähes puolet opiskelijoista tunnisti tehtävän tarjoamat merkityksellisyyden ja mielekkyyden mahdollisuudet kouluopetuksessa. Mielenkiinnon herättäminen on edellytys mielekkäälle oppimiselle ja sitä kautta matematiikan opiskelumotivaatiolle, mutta tässäkin tapauksessa opiskelijoiden kiinnostusta olisi voinut herätellä enemmän. Pohjantähteen liittämämme aktiviteetit ja kokemukset voivat avata matematiikan ja reaalimaailman yhteyksiä empiirispohjaisen matematisoinnin kautta, kuten tuloksemme parhaimmillaan osoittavat.

LÄHTEET

Kaila, K. (1979). Tähtitaivaan opas. Tähtitieteellinen yhdistys URSA ry, Helsinki.

Lehti, Raimo 1971. Matemaattisen ajattelutavan kehitys. Teoksessa Logiikka ja matematiikka, 75 – 97. Werner Söderström Osakeyhtiön kirjapaino, Porvoo 1971.

Lehtinen, M., Merikoski, J., & Tossavainen, T. (2007). Johdatus tasogeometriaan. WSOY Oppimateriaalit Oy, Helsinki.

Mellone, M., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2017). The effect of rewording and dyadic interaction on realistic reasoning in solving word problems. *Journal of Mathematical Behaviour* 46(2017), 1-12. Editor: C.A. Maher, Rutgers University.

Mäntylä, T., & Nousiainen, M. (2014). Consolidating Pre-Service Physics Teachers' Subject Matter Knowledge Using Didactical Reconstructions. Science & Education, 23(8), 1583-1604.

Opetushallitus (2014). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Saatavissa: http://www.oph.fi/saadokset_ja_ohjeet/opetussuunnitelmien_ja_tutkintojen_perusteet/perusopetus.

Opetushallitus (2015). Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015. Saatavissa: http://www.oph.fi/saadokset_ja_ohjeet/opetussuunnitelmien_ja_tutkintojen_perusteet/lukiokoulutus.

Pietrocola, M. (2008). Mathematics as structural language of physical thought. In M. Vicentini, & E. Sassi (Eds.) Connecting Research in Physics Education with Teacher Education. International Commission on Physics Education. https://web.phys.ksu.edu/icpe/Publications/teach2/index.html

Rellensmann, J., & Schukajlow, S. (2017). Does students' interest in a mathematical problem depend on the problem's connection to reality? An analysis of students' interest and pre-service teachers' judgments of students' interest in problems with and without a connection to reality. ZDM Mathematics Education, 49(3), 367-378.

Schraw, G., & Lehman, S. (2001). Situational Interest: A Review of the Literature and Directions for Future Research. Educational Psychology Review, Vol. 13, No 1, 2001.

Schukajlow, S., Rakocky, K., & Pekrun, R. (2017). Emotions and motivation in mathematics education: theoretical considerations and empirical contributions. *ZDM Mathematics Education,* 49(3), 307 – 322.

Tähtitieteen perusteet (1984). Karttunen, H., Oja, H., Kröger, P., & Poutanen, M. (toim.). Julkaisija Tähtitieteellinen yhdistys Ursa. Kustantaja Valtion painatuskeskus. Helsinki 1984.

Ufer, S., Rach, S., & Kosiol, T. (2017). Interest in mathematics = interest in mathematics? What general measures of interest reflect when the object of interest changes. *ZDM Mathematics Education,* 49(3), 397-409.

Wagenschein, M. (2000). Teaching to Understand: On the Concept of the Exemplary in Teaching. In I. Westbury, S. Hopmann, K. Riquarts (eds.) Teaching as a Reflective Practice – The German Didaktik Tradition. (pp. 161-176). Mahwah, New Yersey: Lawrence ErlbaumAssociates, Inc.