ERI TIEDONALAPAINOTTEISET TEHTÄVÄTYYPIT LUOKANOPETTAJAOPISKELIJOIDEN OMAEHTOISESSA MATEMATIIKAN OPISKELUSSA

Henri Heiskanen, Lasse Eronen, Pasi Eskelinen & Pertti Väisänen

Itä-Suomen yliopisto

TIIVISTELMÄ

Tässä artikkelissa tarkastellaan, miten 86 tutkimukseen osallistunutta luokanopettaja-opiskelijaa tekivät proseduraalisesti ja konseptuaalisesti painotettuja matematiikan tehtäviä vapaa-ajallaan ViLLE-oppimisympäristössä matematiikan pedagogiikan opintojaksolla lukuvuonna 2019–2020. Työskentelyä tarkastellaan lokidatan perusteella keskittyen ajankäyttöön ja tehtyihin tehtäviin. Tulokset osoittavat, että tehtävätyyppi on yhteydessä opiskelijoiden tehtyjen tehtävien prosentuaaliseen osuuteen ja ajankäyttöön eri matematiikan osa-alueissa, mutta ajankäytössä opiskelijoiden välillä on eroja. Tulokset antavat viitteitä, että omaehtoiselle matematiikan harjoittelulle sähköisen ympäristön avulla on tarvetta ja ympäristöä sekä sen sisällön kehittämistä tulee jatkaa.

JOHDANTO

Tämä tutkimus on 2018 käynnistyneen MATLOK-kehittämishankkeen *(Matemaattisen Ajattelun Tukeminen LuokanOpettajaKoulutuksessa)* toinen osio ja esittelee hankkeen tuloksia. Kehittämishankkeen tavoitteena on tarjota luokanopettaja-opiskelijoille yksilöllisiä tarpeita huomioiden mahdollisuus kehittää omaa matemaattista osaamistaan niin ymmärtämisen kuin opettamisen näkökulmasta. Tieto- ja viestintäteknologialla on olennainen rooli tässä kehittämishankkeessa osana oppimisympäristöjen kehittämistyötä. Se mahdollistaa aineiston keräämisen sekä opiskelijoiden toiminnan dokumentoinnin. Sähköisillä ympäristöillä voidaan parantaa ainakin nuorten opiskelijoiden matematiikan suoritustason ja laskemisen sujuvuuden (Kurvinen, ym., 2018; Mononen, ym., 2017, 214) lisäksi myös matematiikan opiskelumotivaatiota erilaisten tehtävätyyppien sekä joustavan työskentelyn avulla (Laakso, ym., 2018). Erilaisia sähköisiä ympäristöjä (Esim. ViLLE) käytetään nykyään laajasti osana peruskoulun matematiikan opetusta. ViLLE-ympäristön käyttäminen tarjoaa erään oppimisympäristöihin liittyvän pedagogisen ratkaisun kehitettäessä opettajankoulutusta. Ympäristön käyttö luokanopettajakoulutuksessa on perusteltavissa kahdesta näkökulmasta. Se tarjoaa työkalun ja mahdollisuuden luokanopettajaopiskelijoiden työelämävalmiuksien sekä matematiikan osaamisen kehittämiseksi.

Tässä artikkelissa tutkitaan sitä, kuinka luokanopettajaopiskelijat käyttävät vapaa-aikaansa matematiikan osaamisen kehittämiseen. Aihe on vähän tutkittu, mutta tärkeä, sillä aikaisempien tutkimuksien perusteella luokanopettajaopiskelijat näyttäisivät hallitsevan kohtalaisesti peruslaskutoimituksiin liittyvät tehtävät mutta jo pieni tehtävien muokkaaminen käsitteen ymmärrystä painottavaan suuntaan heikentää tuloksia merkittävästi (Häkkinen, ym., 2011; ks. myös Tossavainen, ym., 2015). Erityisesti algebran ja geometrian osa-alueet sekä prosenttilaskenta näyttäisivät olevan haastavia sisältöjä (Hirvonen, 2011; Näveri, 2009). Opettajaksi kehittymisen näkökulmasta koulutuksessa on tärkeää huomioida matemaattisen osaamisen kehittyminen tekemisen kautta, johon vaikuttavat opiskelijoiden käsitykset matematiikasta sekä sen oppimisesta ja opetuksesta suhteessa omiin suorituksiin, asenteisiin ja uskomuksiin (Portaankorva-Koivisto, 2010, 70-86). Tällöin kehittymisen kannalta keskeisiksi näkökulmiksi nousevat myös opiskelijoiden motivaatio, tavoitteet ja odotukset matematiikkaa ja opintojaksoa kohtaan (Eccles & Wigfield, 2002). Sähköinen ympäristö tarjoaa opiskelijalle mahdollisuuden valita investoiko hän ensin laskemisen ja algoritmien suorittamisen sujuvuuteen, mikä edesauttaa matemaattisten käsitteiden ymmärryksen kehittymistä vai keskittyykö hän ensin käsitteiden ymmärtämiseen, mikä palvelisi laskemisen ja algoritmien suorittamisen kehittymistä (Haapasalo, 2004). Molemmille lähestymistavoille löytyy puoltavia esimerkkejä (Rittle-Johnsson & Schneider, 2015), mutta nykyisin tästä ehdottomuudesta ollaan luopumassa ja näkemykset ovat kehittyneet siihen suuntaan, että tiedon duaalinen luonne mahdollistaa molempien lähestymistapojen hyödyntämisen. Luokanopettajien matemaattisen osaamisen kehittämisessä on hyödyllistä tiedostaa nämä molemmat näkökulmat eri matematiikan osa-alueissa.

MATEMAATTISEN TEHTÄVÄN LUOKITTELUMALLI

Tässä tutkimuksessa matematiikan tehtävät luokitellaan proseduraalista ja konseptuaalista tietoa painottaviin tehtäviin (Gilmore, ym., 2019; Haapasalo, 2011, 51-60; Kadijevich, 2018; Phuong, 2019) opiskelijoiden ViLLE-ympäristössä tapahtuneen työskentelyn tarkastelemiseksi. Konseptuaalinen tieto käsittää matemaattisen aihealueen perustana olevat käsitteet, periaatteet ja suhteet sekä niiden ymmärtämisen (Gilmore, ym. 2019; Hiebert & Lefevre, 1986). Matematiikassa tällä tarkoitetaan käsitteitä ja niiden tunnusmerkkejä, proseduureja, toimintoja ja näkökulmia, joiden tulkitsemiseen ja rakentamiseen yksilö kykenee osallistumaan (Haapasalo & Kadijevich, 2000). Matematiikan tehtävän ratkaisemisen näkökulmasta konseptuaalisen tiedon hyödyntäminen vaatii tietoista ajattelua (Kadijevich, 2018) ja tietoa siitä, miksi tehtävä ratkaistaan (Baroody, 2003). Proseduraalisella tiedolla tarkoitetaan dynaamista ja tarkoituksenmukaista sääntöjen, menetelmien tai algoritmien suorittamista käyttäen hyväksi tiettyjä esitystapoja (Haapasalo & Kadijevich, 2000). Proseduraalisen tiedon hyödyntäminen vaatii automatisoituneiden laskurutiinien suorittamista ja tietoa siitä, kuinka tehtävä ratkaistaan tehokkaasti ja tarkasti (Baroody, 2003; Gilmore ym. 2019; Hiebert & Lefevre, 1986; Kadijevich, 2018). Toisaalta matematiikan oppimisprosessitarkastelussa on keskiössä itse matematiikan oppija. Jokaisella opiskelijalla on yksilöllinen ja persoonallinen suhde matematiikkaan ja siten myös kokemukset matematiikan tehtävien konseptuaalis-proseduraalisesta luonteesta ovat henkilökohtaisia (Frade & Borges 2006; Nogueira de Lima & Tall, 2008; Tall, 2004a; Tall, 2004b).

Matemaattinen tehtävä voi olla suunniteltu konseptuaalis- tai proseduraalispainotteiseksi. Tehtävien vaikeustasoon voidaan vaikuttaa esimerkiksi käytettävien proseduurien määrän tai käsitteiden avulla. Tässä tutkimuksessa luokittelemme tehtävät tehtäväanalyysin perusteella neljään luokkaan (Taulukko 2). Tarkastelemme tehtävien vaikeutta (pelkistetty-monimutkainen) sekä tehtävien tiedonalapainotusta (konseptuaalinen-proseduraalinen) seuraavasti.

Taulukko 1: Esimerkit tehtävätyypeistä luvut ja laskutoimitukset kierrokselta

Monimutkainen konseptuaalinen	**Pelkistetty konseptuaalinen**
Olet opettamassa desimaalilukujen yhteenlaskua allekkain. Käyt oppilaiden kanssa läpi seuraavan esimerkin. **Esimerkki. Laske allekkain 3,12+5,96**  1. Mitä käsitteitä ja pohjatietoja tarvitset desimaalilukujen yhteenlaskun opettamiseen allekkain? 2. Miten ohjaisit oppilasta, jolla on vaikeuksia hahmottaa lukujen sijoittamista allekkain?	Valitse oikea vastausvaihtoehto. Millä rivillä virhe on vai onko virhettä ollenkaan? 8+2-7+3 1.=10-7+3 2.=10-10 3.=0 **Vastausvaihtoehdot:** rivillä 1 rivillä 2 rivillä 3 ei virhettä
Monimutkainen proseduraalinen	**Pelkistetty proseduraalinen**
Laske $\frac{3}{8}:\frac{5}{12} = \text{—} \cdot \text{—} = \text{—}$	Täytä tyhjiin ruutuihin laskutoimitukset niin, että laskut ovat oikein. plusmerkki+, miinusmerkki − , kertomerkki ×, jakomerkki : 2 _ 12 = 24

Pelkistetyissä proseduraalisissa tehtävissä käytettävät strategiat ovat yksinkertaisia tunnistamista painottavia tai ratkaisu on tuotettavissa käyttämällä yksinkertaista peruslaskuoperaatiota yhden kerran (Kadijevich, 2018; Phuong, 2019). Tähän kategoriaan sijoittuvat tehtävät ovat suljettuja itsensä tarkistavia tehtäviä. *Monimutkaisissa proseduraalisissa* tehtävissä ratkaisuun vaaditaan monimutkaisempia algoritmeja tai ratkaisun tuottaminen vaatii useamman algoritmin tai laskutoimituksen yhdistämistä oikeassa järjestyksessä (Baroody, 2003; Gilmore ym. 2019; Phuong, 2019). Myöskin peräkkäinen saman algoritmin tai laskutoimituksen suorittaminen ratkaisun tuottamiseksi tehtävässä sijoittuu tähän kategoriaan, tällaista tehtävää edustaa esimerkiksi kokonaislukujen yhteenlasku allekkain. Myös nämä tehtävät ovat suljettuja itsensä tarkistavia tehtäviä. Proseduraalista tietoa mittaavat tehtävät poimittiin kaikkiin osa-alueisiin ViLLE-ympäristössä valmiiksi olemassa olevista peruskoulun oppilaille suunnatuista matematiikan tehtävistä. Proseduraaliset tehtävät eivät pitäneet sisällään sanallisia tehtäviä.

Pelkistetyt konseptuaaliset tehtävät ovat luonteeltaan suljettuja tehtäviä. Ratkaisun tuottaminen vaatii laskun vaiheiden tunnistamista ja järjestykseen asettamista (Haapasalo, 2011). Lisäksi tähän kategoriaan sijoittuvat tehtävät, joissa täytyy tunnistaa missä kohtaa ratkaisussa tapahtuu jokin virhe (Eronen, Viholainen & Kolström, 2020). *Monimutkaiset konseptuaaliset* tehtävät taas ovat luonteeltaan avoimia dialektisia ongelmia, joissa painottuvat olemassa olevien ratkaisuvaiheiden analysointi. Myös nämä tehtävät sisältävät tehtäviä, joissa virheellinen ajattelutapa täytyy tunnistaa, mutta tehtävän dialektisuus käsittelee opettamisen kannalta olennaisia kysymyksiä: muun muassa Miten ohjata ja tukea oppilasta virheellisen ajattelun korjaamiseksi sekä miten eriyttää opetusta myös lahjakkaan oppilaan näkökulmasta. Konseptuaalista tietoa mittaavat tehtävät muodostivat pedagogisen tehtäväkierroksen ja nämä tehtävät tuotettiin ViLLE-ympäristön sisältämän tehtävän luonti -työkalun avulla. Hanketta varten opiskelijoiden vapaa-ajalla tapahtuvan työskentelyn tarkastelemiseksi ympäristöön luotiin yhteensä 123 tehtävää, joista monimutkaisia konseptuaalisia tehtäviä (10 kpl) käsiteltiin opintojakson aikana yhteisesti pienryhmäopetuksen yhteydessä, koska ne kuuluivat kurssin opetussuunnitelmaan. Lisäksi tehtävistä yksi oli matematiikka-ahdistukseen liittyvä kysely. Tämä kysely on jätetty tehtävätarkastelun ulkopuolelle. Opiskelijoiden vapaa-ajalla tapahtuvaa työskentelyä ja suoriutumista mitattiin siis yhteensä 112 tehtävän avulla, jotka oli jaoteltu tehtäväkierroksiksi (Taulukko 2).

Taulukko 2: Tehtävien jakautuminen tehtäväkierroksittain ViLLE-ympäristössä

Tehtäväkierroksen aihealue	Pelkistetty pros (Pp)	Monimutkainen pros (Mp)	Pelkistetty kons (Pk)	Monimutkainen kons (Mk)
1. Luvut ja laskutoimitukset (LL)	20	9	0	0
2. Algebra (A)	9	11	0	0
3. Geomeria (G)	20	11	0	0
4. Mittaaminen (M)	7	5	0	0
5. Tilastot ja todennäköisyys (T)	8	3	0	0
6. Pedagogiset tehtävät (P)	0	0	9	10a
Yhteensä	64	39	9	10

a=käsiteltiin opintojakson pienryhmäopetuksessa, pros=proseduraalinen, kons=konseptuaalinen

TUTKIMUSASETELMA

MATLOK-kehittämishankkeessa aineistoa kerätään Itä-Suomen yliopiston Matematiikan pedagogiset perusteet opintojaksolla, jonka toteutukseen osallistuu matematiikan pedagogiikan ja erityispedagogiikan opettajia kyseistä yliopistosta. Tämä seitsemän opintopisteen opintojakso on osa 60 opintopisteen monialaisia opintoja, jotka tuottavat luokanopettajan kelpoisuuden. Opintojakson sisällöt käsittelevät alakoulun matematiikan sisältöalueita pedagogisesta näkökulmasta. Opintojaksolle määritettyjen tavoitteiden näkökulmasta ei ole mahdollista keskittyä opiskelijoiden matematiikan sisältöjen osaamisen kehittämiseen, mutta MATLOK-hankkeessa tämä mahdollisuus halutaan tarjota vapaaehtoisuuteen perustuen sähköistä ympäristöä hyödyntämällä. Sähköisen ympäristön käyttöön kannustettiin opintojakson aikana tarjoamalla tehdyistä tehtävistä bonuspisteitä opintojakson harjoitustyöhön. Ympäristön käyttöönotto ja siellä työskentely oli kuitenkin vapaaehtoista. Tässä hankkeessa tutkimusaineistoa kerätään kolmessa vaiheessa, joista ensimmäinen vaihe toteutetaan opintojakson alussa ja se muodostuu Odotukset–arvo -teorialähtöisestä lomakekyselystä, joka sisältää myös opiskelijoiden taustatietoja kartoittavan osion. Toinen vaihe tapahtuu opintojakson aikana ja se on ViLLE-järjestelmän tuottama lokidata vapaa-ajalla tapahtuvasta opiskelusta, joka tuottaa tietoa tehtyjen tehtävien lukumäärästä, tehtävien tarkastelukerroista sekä niihin käytetyn ajan määrästä. Kolmas vaihe on viimeisen luennon yhteydessä toteutettu lomakekysely, joka sisältää

ViLLE-oppimisympäristön tehtäviä ja käyttökokemuksia käsittelevän osion. Tutkittavat antoivat tietoon perustuvan suostumuksensa tutkimukseen osallistumisesta ensimmäisellä luennolla.

Tämän artikkelin aineistona toimii tutkimushankkeen toisessa vaiheessa kerätty ViLLE-oppimisympäristön lokidata lukuvuodelta 2019 - 2020. Opintojaksolle osallistuneista opiskelijoista tietoon perustuvan suostumuksen tutkimukseen antoi ja ViLLE -ympäristön otti käyttöön 86 opiskelijaa (23 oli miehiä ja 63 naisia). Aineisto käsittää yksittäisen opiskelijan tehtävissä menestymisen (pisteet), ajankäytön sekä tehtävien yrityskertojen lukumäärän.

Tutkimuskysymykset

1. Miten opiskelijat työskentelevät omaehtoisesti vapaa-ajallaan ViLLE-ympäristössä ajankäytön ja tehtävien tekemisen osuuden suhteen tarkasteltuna?
2. Millaisia eroja opiskelijoiden työskentelystä on löydettävissä eri tehtävätyyppeihin käytetyn ajan ja tehtyjen tehtävien tekemisen osuuden avulla tarkasteltuna?

Eri tehtäväkierroksien tehtävien vertailemiseksi käytetyn ajan ja tehtyjen tehtävien prosentuaalisen osuuden suhteen muodostettiin jokaiselle tehtäväkierroksen aihealueelle kaikkien tehtäviä tehneiden opiskelijoiden ajankäytön keskiarvo, mediaani ja keskihajonta. Ajankäyttö kuvaa opiskelijan sitoutumista tehtävien tekemiseen. Ajankäytöstä määritettiin (Taulukko 3) tehtäväkohtainen keskiarvo ajan suhteen jakamalla kokonaisajan keskiarvo kaikkien aihealueiden tehtyjen tehtävien yhteenlasketulla lukumäärällä (ks. Taulukko 2).

Aineiston analysoinnissa ja vastaajien ryhmittelyssä eri ajankäyttöryhmiin on käytetty K-Means klusterointia. Aineistolle suoritettiin seitsemän klusterointikierrosta k:n arvoilla 2–8. Tarkastelu suoritettiin siten, että jokaisella kierroksella tarkasteltiin syntyvien ryhmien eroja muuttujittain (ANOVA), tarvittavien iterointikierrosten määrää ja muodostuvien ryhmien kokoja. Tämän lisäksi määritettiin pienin kahden ryhmäkeskuksen välinen erotus. Eri ratkaisuihin perustuen etsittiin klusterimallia, joka erottelisi ryhmät selkeästi. Ryhmäkeskusten erotuksen muutoksen suurinta arvoa etsittiin *Last Leap* -menetelmän avulla (Gupta, Datta & Das, 2018). Tällä menetelmällä saadaan etsityksi ratkaisut, joissa ryhmät ovat mahdollisimman kaukana toisistaan. Sopivimmaksi osoittautui neljän klusterin ratkaisu, jossa yksi ajankäytöllisesti poikkeava opiskelija muodostaa oman ryhmän (Taulukko 4). Tätä opiskelijaa ei sisällytetty ryhmävertailuihin.

Tehtäväryhmien välisiä eroja käytetyn ajan suhteen tutkittiin epäparametrisella Friedmannin kaksisuuntaisella varianssianalyysilla ja aikaryhmien välisiä eroja käyttäen Kruskall-Wallisin testiä. Molemmissa testeissä parittaisten vertailujen jälkitestaaminen tapahtui Bonferroni-korjausta käyttäen. Testitulosten raportoinnissa käytetään keskilukuja ja tilastollista merkitsevyyttä kuvaavaa p-arvoa ja efektilukuja.

TULOKSET

Vertailtaessa eri tehtäväkierroksiin käytettyä aikaa, muodostettiin yhteensä 30 tehtäväkierrosparia ajankäytön erojen selvittämiseksi. Taulukko 3 esittää, missä tehtäväkierroksen aihealueissa tehtäväkohtainen ajankäyttö ei poikkea tilastollisesti. Taulukkoa luetaan riveittäin siten, että kirjaimet a, b, c, d ja e osoittavat tehtäväkierrosparit, joissa tehtäväkohtainen ajankäyttö ei poikkea tilastollisesti merkitsevästi. Muissa pareissa poikkeama on tilastollisesti merkitsevä ($\chi^2(5)=177.10$, p<.001) ja efektikoot ovat suuria.

Taulukko 3: Käytetty aika (h:min:ss), tehtyjen tehtävien osuus (%) ja tehtäväkohtainen aika (min:ss) tehtäväkierroksittain.

Tehtäväkierros	1.LL	2.A	3.M	4.G	5.T	6.P	Kokonaisaika
Käytetty aika							
Keskiarvo	1:38:02	0:40:40	0:23:21	0:49:29	0:11:00	0:21:24	4:03:58
Mediaani	1:22:35	0:29:53	0:21:42	0:40:45	0:11:20	0:14:27	3:34:15
Hajonta	1:34:02	0:47:05	0:25:11	0:55:12	0:11:55	0:24:03	3:41:24
		c, e	**d, e**	**b, c, d**	**a**	**a, b**	
Tehtäväkohtainen aika	3:22	2:02	1:56	1:35	1:00	1:04	1:50
Tehtäväkohtainen hajonta	3:14	2:21	2:05	1:46	1:05	1:12	1:38
Tehtyjen tehtävien prosentuaalinen osuus							Kokonaisosuus
Keskiarvo	67	55	60	49	64	52	58
Mediaani	98	65	100	61	100	65	79
Hajonta	40	44	47	40	47	48	41

LL=Luvut ja laskutoimitukset, A=Algebra, M=Mittaaminen, G=Geometria, P=Pedagogiset tehtävät, T=Tilastot ja todennäköisyys

Taulukosta 3 nähdään, että esimerkiksi tilastot ja todennäköisyys tehtäväkierroksen (T) tehtäväkohtainen ajankäyttö poikkesi kaikista muista tehtäväkierroksen tehtäväkohtaisesta ajankäytöstä (efektikoko r:n vaihteluväli 0.34–1.00) paitsi pedagogisesta (P) tehtäväkierroksesta (tehtäväkierrospari a, Taulukko 3). Pedagogisien tehtävien sekä todennäköisyyslaskennan tehtäväkierrosten tehtäväkohtainen aika on keskimäärin noin 1 minuutti. Algebran (A), mittaamisen (M) ja geometrian (G) tehtäväkierrosten tehtäväkohtainen sekä kokonaisajankäytön tehtäväkohtainen ajankäyttö on keskimäärin noin 2 minuuttia. Luvut ja laskutoimitukset (LL) tehtäväkierroksen tehtäväkohtainen aika on keskimäärin yli 3 minuuttia. Suhteessa kokonaisuuteen enemmän aikaa on käytetty mittaamisen, algebran sekä luvut ja laskutoimitukset tehtäväkierrosten tehtäviin. Toisaalta taas suhteessa kokonaisuuteen, opiskelijat käyttivät keskimääräistä vähemmän aikaa geometria, tilastot ja todennäköisyys tehtäväkierrosten tehtäviin sekä pedagogiseen tehtäväkierrokseen.

Tehtyjen tehtävien prosenttiosuuksia tarkasteltaessa havaitaan, että geometrian tehtävien keskimääräinen osuus jää alle 50 %. Algebran ja pedagogisten tehtyjen tehtävien keskimääräinen osuus on 52 %–55 % välillä. Luvut ja laskutoimitukset, mittaamisen ja todennäköisyys laskennan tehtäväkierrosten tehtyjen tehtävien keskimääräinen osuus on vähintään 60 %, näissä tehtäväkierroksissa tehtyjen tehtävien keskimääräinen prosentuaalinen osuus suhteessa kokonaisuuteen on suurempi. Vastaavasti algebran, geometrian ja pedagogisten tehtyjen tehtävien osuus suhteessa kokonaisuuteen on keskimäärin pienempi. Tarkastellessa eri tehtäväkierroksiin käytettyä aikaa ja tehtyjen tehtävien prosentuaalista osuutta havaitaan, että hajonta on suurta suhteessa keskiarvoon kaikissa tehtäväalueissa. Tästä syystä tutkimuskysymyksen kaksi osalta ajankäyttö- ja tehtäväryhmien väliset tarkastelut tehdään käyttäen epäparametrisiä testejä.

Taulukko 4: Ajankäytön ryhmittely klusterikeskipisteiden (hh:min:ss) mukaan.

Aihealue	Klusteri 1 (vähiten =V)	Klusteri 2 (Keskimäärin=K)	Klusteri 3 (Eniten=E)	4
n	37	36	12	1
1.Luvut ja laskutoimitukset (LL)	0:23:07	1:56:32	3:59:02	8:32:06
2.Algebra (A)	0:06:15	0:53:42	1:31:29	3:55:58
3.Mittaaminen (M)	0:02:40	0:33:15	0:56:24	0:35:19
4.Geometria (G)	0:03:50	1:01:15	2:24:25	2:56:01
5.Tilastot ja tn (T)	0:02:44	0:14:49	0:24:50	0:13:16
6.Pedagogiset (P)	0:03:11	0:33:54	0:41:13	0:06:57
Yhteensä	0:41:47	5:13:27	9:57:23	16:19:37

Jokainen tehtäväkierros, pois lukien pedagogisten tehtävien tehtäväkierros, sisälsi sekä pelkistettyjä (p) että monimutkaisia (m) tehtäviä. Ajankäyttöryhmien

(Taulukko 4) sisäisen tarkastelun ja vertailun suorittamiseksi eri tehtäväkierrosten ja tehtävätyyppien välillä muodostettiin jokaisen tehtäväkierroksen tehtävätyyppien yksittäistä tehtävää vastaava ajankäytön mediaani. Lisäksi määritettiin tehtyjen tehtävien määrä prosentteina eri ajankäyttöryhmissä (Taulukko 5).

Taulukko 5: Käytetyn ajan mediaani ja tehtyjen tehtävien osuus (%) ajankäyttöryhmittäin sekä ajankäyttöryhmien väliset erot tehtäväryhmittäin tarkasteltuna.

	LLp	LLm	Ap	Am	Mp	Mm	Gp	Gm	Tp	Tm	Pp
V	0:06	0:30	0:13	0:09	0:11	0:29	0:03	0:15	0:09	0:25	0:14
%	33	12	18	11	9	9	11	5	19	19	13
K	0:08	0:46	0:14	0:14	0:14	0:34	0:05	0:18	0:10	0:17	0:21
%	98	98	91	84	100	100	77	73	98	99	84
E	0:17	1:18	0:27	0:33	0:22	0:49	0:10	0:34	0:14	0:29	0:33
%	100	100	93	83	100	100	90	87	100	100	83
Erot	I	I	I	I	I	II	I	I	I		II
	r=0.59	0.42	0.36	0.39	0.36	0.38	0.48	0.41	0.29		0.45
	II	II	II	II	II		II	II	II		
	0.52	0.54	0.48	0.41	0.53		0.78	0.55	0.36		
							III				
							0.41				

V=klusteri 1 *(vähiten)*, K=klusteri 2 *(keskimäärin)*, E=klusteri 3 *(eniten)*, p=*pelkistetty*, m=*monimutkainen. I=Keskimäärin ja Vähiten (n=73), II= Eniten ja Vähiten (n=49), III=Eniten ja Keskimäärin(n=48).*

Ajankäytön muuttuessa tehtävien tekemisen osuus muuttuu radikaalisti vähiten aikaa käyttäneistä keskimäärin ja eniten aikaa käyttäneisiin nähden (Taulukko 5). Esimerkiksi pelkistetyissä algebran tehtävissä (Ap), kun ajankäyttö muuttuu 13 sekunnista 14 sekuntiin, niin tehtävien tekemisen osuus kasvaa 18 prosentista yli 90 prosenttiin. Myös esimerkiksi geometrian pelkistetyissä tehtävissä (Gp) ajankäytön kasvaessa 3 sekunnista 5 sekuntiin, tehtävien tekemisen osuus kasvaa 11 prosentista 77 prosenttiin. Keskimäärin ja eniten aikaa käyttäneiden välillä ajankäytön muuttuminen ei tuo suuria eroja tehtävien tekemisen osuuteen, tästä poikkeava havainto on geometrian molemmat osa-alueet (Gp ja Gm), joissa tehtyjen tehtävien prosentuaalisen osuuden erotus on vähintään 13 prosenttiyksikköä näiden kahden aikaryhmän välillä. Vähiten aikaa käyttäneiden ryhmässä tehtävien tekemisen osuus vaihtelee 5 %–33 % välillä, keskimäärin aikaa käyttäneiden ryhmässä 73 %–100 % välillä ja eniten aikaa käyttäneiden ryhmässä 83 %–100 % välillä.

Taulukko 5 esittää, miten ajankäyttö poikkeaa tilastollisesti eri aikaryhmien välillä. Tehtäväryhmittäinen Kruskall-Wallisin testisuureen arvo vaihteli $\chi^2(2)$ =

8.43, p = .015 ja $\chi^2(2) = 31.80$, p<.001 välillä luukuunottamatta monimutkaisten todennäköisyystehtävien tehtäväryhmää. Eri aikaryhmien välisten tarkastelujen efektit ovat suuria ja efektikoon r:n vaihteluväli on 0.29–0.78. Vain yhdessä tehtävätyypissä kaikkien ryhmien ajankäyttö poikkesi toisistaan (Gp). Sitä vastoin vain yhdessä tehtävätyypissä ajankäyttö ei poikennut ryhmien välillä, vaikka tekemisen osuus vaihteleekin 19 %–100 % (Tm) ja vähiten aikaa käyttäneiden ryhmä on käyttänyt aikaa enemmän kuin keskimäärin aikaa käyttäneiden ryhmä. Monimutkaisissa tilastot ja todennäköisyys tehtävissä vähiten aikaa käyttäneiden ryhmän ajankäyttö ei poikennut aikaa eniten käyttäneiden ryhmän ajankäytöstä toisin kuin kaikissa muissa tehtävätyypeissä. Toisaalta vähiten aikaa käyttäneet poikkesivat keskimäärin aikaa käyttäneistä kolmea tehtävätyyppiä (Mm, Tm, Pp) lukuun ottamatta.

Taulukossa 6 on tarkasteltu eri ajankäyttöryhmien sisäistä ajankäyttöä eri tehtäväryhmissä. Taulukkoon on poimittu tilastollisesti merkitsevät erot 11 eri tehtäväryhmän väliltä ($\chi^2(10) = 329.74$, p<.001). Eri ajankäyttöryhmien sisäisen ajankäytön erojen efektit eri tehtäväryhmissä ovat pääasiassa suuria (r>0.7) ja efektikoko r vaihtelee 0.38–1.23 välillä (ks. Taulukko 6). Vähiten aikaa käyttäneiden ryhmässä ajankäytössä löytyy yksi ero monimutkaisten luvut ja laskutoimitukset (LLm 0:30) tehtävien ja pelkistettyjen geometrian tehtävien (Gp 0:03) välille. Muutoin vähiten aikaa käyttäneiden ryhmän ajankäyttö ei riipu tehtäväryhmästä. Keskimäärin ja eniten aikaa käyttäneiden ryhmissä vastaavia eroja eri tehtäväryhmien välille on löydettävissä useita.

Taulukko 6: Tehtäväryhmien vertailu tehtäväkohtaisen käytetyn ajan mediaanin mukaisesti: aikaa eniten (E), keskimäärin (K) ja vähiten (V) käyttäneiden ryhmissä.

Tehtäväryhmät	LLp	Mp	Gp	Tp	LLm	Mm	Gm	Tm
LLm	E(r=0.87) K(1.08)	K(0.77)	E(1.22) K(1.23) V(0.38)	E(1.02) K(0.93)			K(0.44)	K(0.49)
Am	K(0.57)		E(0.71)		K(0.58)	K(0.50)		
Mm	E(0.71) K(1.00)	K(0.68)	E(1.07) K(1.15)	E(0.86) K(0.86)				K(0.41)
Gm	K(0.64)		E(0.91) K(0.79)	E(0.68) K(0.49)				
Tm	K(0.59)		K(0.74)	K(0.44)				

Ap	K(0.50)	K(0.63)		E(0.39) K(0.58)	K(0.58)	K(0.70)
Mp	K(0.40)	K(0.55)				
Pp	K(0.75)	E(0.70) K(0.90)	K(0.68)			

Eniten aikaa käyttäneiden ryhmässä eri tehtäväkierrosten monimutkaisten tehtävätyyppien välille ei ole löydettävissä eroja. Pelkistettyjä tehtäväryhmiä tarkasteltaessa eniten aikaa käyttäneillä löytyy ainoastaan yksi ero pedagogisten tehtäväryhmän (Pp) ja geometrian tehtäväryhmän (Gp) välille ($\chi^2(10) = 25.15$, p = .005, Taulukko 6).

Pelkistettyjen ja monimutkaisten tehtäväryhmien välille eroja eniten aikaa käyttäneiden ryhmässä on yhteensä kymmenen, ($\chi^2(10) = 66.56$, p<.001, Taulukko 6). Tehtäväryhmien välisiä eroja on tehtäväkierrosten sisällä kaksi, geometrian sekä luvut ja laskutoimitukset tehtäväkierroksen (Gp-Gm ja LLp-LLm) välillä. Loput kahdeksan ovat tehtäväkierrosten välisiä eroja, esimerkiksi pelkistettyjen geometrian tehtävien ja monimutkaisten algebran (Am) tehtävien välillä (Taulukko 6).

Kahdesta muusta aikaryhmästä poiketen keskimäärin aikaa käyttäneiden ryhmässä eroja eri pelkistettyjen tehtäväryhmien välille löytyy yhteensä seitsemän ja eri tehtäväkierrosten monimutkaisten tehtäväryhmien välille yhteensä viisi ($\chi^2(10) = 243.67$, p<.001, Taulukko 6). Eroja eri tehtäväryhmien pelkistettyjen ja monimutkaisten tehtävien välille tässä ryhmässä löytyy yhteensä 18 ja erot ovat sekä tehtäväkierrosten sisäisiä että tehtäväkierrosten välisiä. Eroista tehtäväkierrosten sisäisiä on neljä ja tehtäväkierrosten välisiä on 14.

JOHTOPÄÄTÖKSET JA POHDINTA

Tulokset osoittavat, että omaehtoiseen vapaa-ajalla tapahtuvaan matematiikan opiskeluun on käytetty aikaa ja matematiikkaa on opiskeltu, sillä tehtävien tekemisen osuus vaihteli tehtävätyypeittäin 5 %–100 % välillä. Ajankäyttö vaihteli tehtäväkierroksittain, tehtävätyypeittäin ja opiskelijakohtaisesti. Erityisen huomioitavaa tuloksissa on se, että vähiten ja keskimäärin aikaa käyttäneiden ajankäytön muutos on pieni, mutta tehtävien tekemisen osuus muuttuu radikaalisti. Keskimäärin ja eniten aikaa käyttäneiden välillä ajankäytön suuri muutos ei tee merkittävää eroa tehtyjen tehtävien osuuteen. Tämä voisi selittyä opiskelijoiden erilaisella matematiikan osaamisella eri aikaryhmien välillä. Matematiikan osaamista mittaavissa tutkimuksissa on havaittu tehtävätyypin vaikuttavan osaamiseen (Häkkinen, 2011) ja muun muassa geometrian tehtävien tuottavan vaikeuksia (Hirvonen, 2011; Näveri, 2009). Näihin ilmiöihin on löydettävissä viitteitä tarkasteltaessa keskimäärin ja eniten aikaa käyttäneiden ryhmien työskentelyä (Taulukko 5 ja 6).

Vähiten aikaa käyttäneiden ryhmän tehtävien tekemisen osuus oli kaikissa aihealueissa muita ajankäyttöryhmiä matalampi. Tehtävien tekemisen näkökulmasta voidaankin pohtia vähiten aikaa käyttäneiden ryhmän kohdalla hallitsevatko he sisällöt niin hyvin, että harjoittelu koetaan turhana vai kokevatko he tehtävät liian haastaviksi omaan taitotasoonsa nähden. Ecclesin ja Wigfieldin (2002) mukaan motivaatio sekä koettu pätevyyden tunne selittävät eroja osaamisessa. Syitä opiskelijoiden tehtävien tekemiselle ja sen jakaantumiselle tuleekin jatkossa tarkastella työskentelyä mittaavien muuttujien lisäksi myös motivaation ja osaamisen avulla. ViLLE-ympäristö on suunniteltu lasten käyttöön, niin on myös mahdollista, että tämä lapsille suunnattu ympäristö ei motivoi aikuisopiskelijoita vastaavalla tavalla. Tulevina opettajina heidän olisi kuitenkin hyvä olla perillä siitä, millaisia tehtäviä alakoululaisille on tarjolla ViLLE-ympäristössä.

Löydösten perusteella voidaan päätellä, että eriyttämisen mahdollisuuksia on monipuolistettava ja opiskelijoille tarjottavaa materiaalia tulee kehittää. Tehtäväkierrosten tasapainottaminen tehtävämäärien suhteen sekä pedagogisten tehtävien integroiminen osaksi tehtäväkierrosten aihealueita on jatkokehityksen kannalta olennaista. Tämä vaatii proseduraalista tietoa painottavan sisällön tarkastelua uudelleen ja mahdollisten päällekkäisten sisältöjen karsimista sekä toisaalta konseptuaalista tietoa painottavan sisällön lisäämistä kaikkiin tehtäväkierrosten aihealueisiin. Analyysin perusteella proseduraalista tietoa painottavien tehtävien lukumäärä suhteessa konseptuaalisiin on moninkertainen, mutta kokevatko myös opiskelijat asetelman samanlaisena, sillä kokemus tehtävän luonteesta on yksilöllinen (Nogueira de Lima & Tall, 2008; Tall, 2004a; Tall, 2004b). Jatkokehityksessä tarvitaan tietoa opiskelijoiden kokemuksista tehtävistä ja niiden luonteesta opiskelijoiden työskentelyn kokonaiskuvan hahmottamiseksi. Lisäksi eri aihealueita käsittelevien alkutestien avulla opiskelija voisi itse selvittää omat kehittämisen kohteensa ja tarpeensa sekä eriyttää itse omaehtoista työskentelyään.

Tehtävien tekemisen näkökulmasta voidaankin pohtia investoiko opiskelija ensin laskemisen sujuvuuteen, mikä edesauttaa matemaattisten käsitteiden ymmärryksen kehittymistä vai keskittyykö hän ensin käsitteiden ymmärtämiseen, mikä palvelisi laskemisen kehittymistä. Ajankäyttöä ja tehtävien tekemistä tutkimalla tähän kysymykseen ei saada suoraa vastausta. Kysymystä on tarkasteltava toteumasta käsin sen sijaan, että tarkasteltaisiin tekemättömyyttä. Voidaan sanoa, että mikäli tehtävät on tehty, niin niiden vaatima asia on osattu. Mikäli tehtävien tekemiseen käytetty aika on vähäistä, voidaan olettaa, että asia on osattu hyvin jo tehtävää tehdessä. Toisaalta, jos tehtäviin käytetään paljon aikaa, niin se indikoi tehtävän olevan ongelmallisempi ja näin ollen tekeminen tuottaisi osaamista. Tarvitaan siis tietoa opiskelijoiden kokemuksista tehtävien opettavaisuudesta ja omasta oppimisestaan.

Tämän tutkimuksen tulosten yleistettävyyttä rajoittaa ensinnäkin se, että tutkimukseen osallistui vain noin puolet (n= 86) opintojaksolle osallistuneista opiskelijoista. Tässä tutkimuksessa kuitenkin epäparametristen testien suuret efektikoot lisäävät tulosten luotettavuutta ja niiden käytännöllistä merkittävyyttä. Toiseksi ajankäytön mittaamisen luotettavuudesta ei voida olla täysin varmoja, sillä on mahdollista, että kaikkea käytettyä aikaa ei olla vietetty tehtäviä tehden. Toisaalta lisääntynyt ajankäyttö näyttäytyi tehtyinä tehtävinä.

Tutkimuksen tulosten yleistettävyys käytetyn ajan ja tehtyjen tehtävien perusteella on hyvin rajallista ja johtopäätöksissä tulee olla varovainen. Tulokset opiskelijoiden tehtävien tekemisen osuudesta ja ajankäytöstä kuitenkin osoittavat, että tehtäviä on tehty ja niihin on käytetty aikaa. Näin ollen ympäristö on ainakin osittain täyttänyt tavoitteensa, koska pakkoa harjoittelulle ei ole ollut, vaikka siihen kannustettiinkin. Yhdistämällä teoreettinen tieto ja opiskelijoiden käyttökokemukset voidaan kehittää opiskelijoiden yksilöllisiä tarpeita palveleva ja matemaattista osaamista kehittävä oppimisjärjestely huomioiden opintojakson rajalliset aikaresurssit. Tämä tutkimus osoittaa, että tutkimalla ainoastaan opiskelijoiden ajankäyttöä ja tehtävien tekemisen määrää, kuva opiskelijan osaamisesta tai sen kehittymisestä jää varsin suppeaksi. Tutkimus osoittaa myös sen, että selvemmän kuvan saamiseksi opiskelijoiden aikaisemmin hankittu osaaminen, suhtautuminen matematiikan opiskeluun, kokemus tarkastelussa olevien tehtävien sopivuudesta kuin myös kokemus omasta oppimisesta nousevat tärkeiksi tekijöiksi kehitettäessä luokanopettajan työelämävalmiuksia edistävää yksilöllistä oppimisen järjestelyä.

LÄHTEET

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. Teoksessa A. J. Baroody & A. Dowker, *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructive Adaptive Expertise* (s. 1-33). Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9781410607218.

Eccles, J. & Wigfield, A. (2002). Motivational Beliefs, Values and Goals. *Annual Review of Psychology*, 53, 109-132. 10.1146/annurev.psych.53.100901.135153.

Eronen, L, Viholainen, A., Kolström, M., (2021). Dualistinen tieto valintatarjottimella (tässä julkaisusssa)

Frade, C. & Borges, O. (2006). The tacit-explicit dimension of the learning of mathematics: an investigation report. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 4, 293–317. 10.1007/s10763-005-9008-5.

Gilmore, C. K., Keeble, S., Richardson, S. & Cragg, L. (2019). The Interaction of Procedural Skill, Conceptual Understanding and Working Memory in Early Mathematics Achievement. *Journal of Numerical Cognition*, 3, 400-416. 10.5964/jnc.v3i2.51.

Gupta, A., Datta, S. & Das, S. (2018). Fast automatic estimation of the number of clusters from the minimum inter-center distance for *k*-means clustering. *Pattern Recognition Letters*, 116(1), 72–79. 116. 10.1016/j.patrec.2018.09.003.

Haapasalo, L. 2011. *Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu*. Medusa-Software.

Haapasalo, L. (2004). Pitäisikö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitäisikö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.*) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (s. 50–83). Niilo Mäki Instituutti.

Haapasalo, L. & Kadijevich, D. (2000). Two types of mathematical knowledge and their relation. *Journal Für Mathematikdidaktik* 21(2), 139-157. 10.1007/BF03338914.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. Teoksessa J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (s. 1-27). Lawrence Erlbaum.

Hirvonen, K. (2012) (toim.) Onko laskutaito laskussa?—Matematiikan oppimistulokset peruskoulun päättövaiheessa 2011. *Koulutuksen seurantaraportit 2012:4.* Opetushallitus.

Häkkinen, K., Tossavainen, T. & Tossavainen, A. (2011). Kokemuksia luokanopettajaksi pyrkivien matematiikan soveltuvuustestistä Savonlinnan opettajankoulutuslaitoksessa. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) *Luokanopettaja-opiskelijoiden matematiikkataidoista*, Tutkimuksia 328 (s. 47-64). Soveltavan kasvatustieteen laitos, Helsingin yliopisto, Helsinki.

Kadijevich, D. M. (2018). Relating Procedural and Conceptual Knowledge. *Journal Teaching of Mathematics, 21*(1), 15–28.

Kurvinen, E., Dagienė, V. & Laakso, M. (2018). The Impact and Effectiveness of Technology Enhanced Mathematics Learning. *Constructionism, Computational Thinking and Educational Innovation: Conference Proceedings*. Constructionism 2018. Vilna.

Laakso, M., Kaila, E. & Rajala, T. (2018). ViLLE – collaborative education tool: Designing and utilizing an exercise-based learning environment. *Education and Information Technologies, 23.* 10.1007/s10639-017-9659-1.

Mononen, R., Aunio, P. Väisänen, E., Korhonen, J. & Tapola, A. (2017). *Matemaattiset oppimisvaikeudet.* PS-kustannus.

Nogueira de Lima, R. & Tall, D. (2008). Procedural embodiment and magic in linear equations. *Educational Studies in Mathematics, 67.* 10.1007/s10649-007-9086-0.

Näveri, L. (2009). Aritmetiikasta algebraan: Muutoksia osaamisessa peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden aikana, Tutkimuksia 309, Soveltavan kasvatustieteen laitos, Helsingin yliopisto, Helsinki.

Phuong. M. T. H. (2019). On the Procedural-Conceptual Based Taxonomy and Its Adaptation to the Multi-Dimensional Approach SPUR to Assess Students' Understanding Mathematic. *American Journal of Educational Research*, 7(3), 212-218. 10.12691/education-7-3-4.

Portaankorva-Koivisto, P. (2010). *Elämyksellisyyttä tavoittelemassa. Narratiivinen tutkimus matematiikan opettajaksi kasvusta*. Akateeminen väitöskirja. Tampereen yliopisto. Tampereen Yliopistopaino Oy – Juvenes Print.

Rittle-Johnson, B. & Schneider, M. (2015). Developing Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics. Teoksessa: R. Cohen Kadosh & A. Dowker (toim.), *Oxford library of psychology. Oxford handbook of numerical cognition* (s. 1118-1134). Oxford University Press. 10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.014.

Tall, D. (2004a). Introducing three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *23*(3), 29-33.

Tall, D. (2004b). Thinking through three worlds of mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4,* 281–288.

Tossavainen, T., Väisänen, P., Merikoski, J.K., Lukin,T. & Suomalainen, H. (2015). A Survey on the Permanence of Finnish Students' Arithmetical Skills and the Role of Motivation. *Education Research International*, *2015*, 1-8. 10.1155/2015/213429.