MURTOLUKU VAI SUHDE?

Jorma Joutsenlahti[1] ja Päivi Perkkilä[2]

[1]Tampereen yliopisto, [2]Kokkolan yliopistokeskus Chydenius

TIIVISTELMÄ

Artikkelin tarkoitus on tutkia miten luokanopettajaopiskelijat tulkitsevat koulumatematiikan käsitteitä murtoluku ja suhde heille annetussa tehtävässä, jossa on matematiikan symbolikielen merkintöjä ja niihin liittyviä kuvia. Tutkimukseen osallistui yhteensä 92 opiskelijaa kahdesta yliopistosta. Tuloksista näkyi useimpien opiskelijoiden proseduraalinen lähestymistapa annetun ratkaisun tulkinnassa käsitteellisen näkökulman jäädessä vain harvojen opiskelijoiden valinnaksi. Tulos on opetussuunnitelman ja oppimateriaalien näkökulmasta odotettu. Murtolukujen monipuolinen ymmärtäminen on haasteellista. Tämä tuo haasteita opettajankoulutuksen ja täydennyskoulutuksen kehittämiselle.

JOHDANTO

Artikkelimme tarkoitus on pohtia koulumatematiikan käsitteiden murtoluku *(fraction)* ja suhde *(ratio)* merkityksiä luokanopettajaopiskelijoille yhden heidän tekemänsä tehtävän vastausten analyysin perusteella. Tähän voidaan lisätä myös käsitteet rationaaliluku (*rational number*) ja jakolasku (*division*). Kaikkia edellä mainittuja käsitteitä yhdistää suomalaisessa koulumatematiikassa merkintä ”$\frac{a}{b}$”. Esimerkiksi ”$\frac{2}{3}$” voidaan tulkita kontekstin mukaan murtoluvuksi tai rationaaliluvuksi ”kaksi kolmas osaa”, suhteeksi ”kahden suhde kolmeen” tai jakolaskuksi ”kaksi jaettuna kolmella”. Tärkeä taito on osata tunnistaa merkinnän kontekstista käsitteen sisällöllinen merkitys ko. kontekstissa. Tutkimuksemme tehtävässä rajoitutaan kahteen ensiksi mainittuun merkinnän ”$\frac{2}{3}$” merkitykseen.

Luokanopettajaopiskelijat ovat siinä mielessä mielenkiintoinen tutkimuksen kohdejoukko, että he vastaavat suurimmasta osasta peruskoulun opetussuunnitelman mukaisesta matematiikan opetuksesta. He luovat osaltaan perustaa peruskoululaisten matematiikan käsitteille ja niiden välisten suhteiden ymmärtämiselle. Toisaalta he ovat itsekin olleet peruskoulun oppilaina, ja heille on syntynyt kullekin omanlaiset käsitekuvat (ks. Tall & Vinner, 1981) muun muassa edellä mainituista käsitteistä. Nämä yhden tehtävän analyysin tulokset ovat parhaimmillaankin vain viitteitä niistä ongelmista, mitä meillä ehkä on opetussuunnitelmissa oppimisen tavoitteissa edellä mainittujen käsitteiden kohdalla ja opettajankoulutuksessa näihin käsitteisiin liittyvän sisältötiedon ja pedagogisen sisältötiedon (ks. Shulman, 1986) huomioimisessa. Murtoluvun ja suhteen käsitteiden asema ei ole juurikaan muuttunut oppimateriaaleissa viime vuosikymmenten aikana (vrt. Joutsenlahti, Perkkilä & Tossavainen, 2017), joten seuraavat opetussuunnitelman perusteiden ja oppimateriaalien tarkastelu mainittujen käsitteiden suhteen antavat riittävän kuvan nykytilanteen lisäksi opettajaopiskelijoiden saamasta murtoluvun ja suhteen kouluopetuksesta.

TEOREETTINEN VIITEKEHYS

Matemaattisen osaamisen piirteet

Kilpatrick, Swafford ja Findell (2001) mukaan matemaattinen osaaminen rakentuu viidestä toisiinsa kietoutuneesta piirteestä (*käsitteellinen ymmärtäminen, proseduraalinen sujuvuus, strateginen kompetenssi, mukautuva päättely* ja *yritteliäisyys*), joiden voidaan nähdä yhdistyvän matemaattiseen ajatteluun, ymmärtämiseen ja ongelmanratkaisuun. Tässä artikkelissa näistä piirteistä keskeisiksi nousevat *konseptuaalinen ymmärtäminen* ja *proseduraalinen sujuvuus*. Konseptuaalinen eli käsitteellinen ymmärtäminen tarkoittaa ymmärrystä matemaattisista käsitteistä (tässä esimerkiksi *murtoluku- ja suhde -käsitteistä*), operaatioista ja näiden suhteista (Kilpatrick ym., 2001). Proseduraalisella sujuvuudella tarkoitetaan taitoa toteuttaa matemaattisia menettelytapoja joustavasti, täsmällisesti, tehokkaasti ja tarkoituksenmukaisesti (Kilpatrick ym., 2001). Eli tähän liittyy taito käyttää operaatioita ja algoritmeja, joiden avulla voi ratkaista matemaattisia ongelmia ja suorittaa laskutoimituksia. Oppikirjojen painottamat laskutoimitukset tukevat kyllä proseduraalista sujuvuutta, mutta eivät välttämättä erillisinä laskuharjoituksina rakenna käsitteiden välisiä yhteyksiä. Proseduraalinen tieto automatisoituu harjoittelemalla laskurutiinia. Käsitteellinen ymmärtäminen ja proseduraalinen sujuvuus ovat läheisessä yhteydessä toisiinsa. Ymmärtäminen tekee oppimisen helpommaksi, virheettömämmäksi ja vähemmän herkän unohtamiselle. Ymmärryksen myötä opittu tieto järjestäytyy kokonaisuudeksi, ja uusi tieto opitaan yhdistämällä se vanhaan. Tätä voisi verrata matematiikan tiilitalon rakentamiseksi. Yhdistyneitä tietoja on helpompi käyttää ja muistaa, koska ne voidaan tarvittaessa myös rakentaa ja muokata uudelleen.

Moschkovich ja Zahner (2018) ovat nostaneet esille matematiikan ymmärtämisen näkökulmasta akateemisen lukutaidon matematiikassa, jonka osa-alueina nähdään matemaattinen osaaminen, matemaattiset käytänteet ja matemaattinen diskurssi. Moschkovich ja Zahner (2018) perustavat matemaattisen osaamisen määrittelyn edellä esitettyyn määrittelyyn. Edellä mainitut tutkijat painottavat, että matemaattista osaamista ei voida saavuttaa kehittämällä vain jotain tiettyä piirrettä kuten esimerkiksi laskusääntöjen osaamista.

Merkinnän ”a/b” merkityksiä koulumatematiikassa

Käsitteellisiä tulkintoja merkinnälle ”$\frac{a}{b}$” tai ”murtoluvulle” on tutkittu kirjallisuudessa (esimerkiksi Pantziara & Philippou, 2012; Park, Gűçler & McCrory, 2013) ja löydetty hieman toisistaan poikkeavia käsitteellisiä luokituksia. Merkinnän monien merkitysten on nähty olevan eräs varteen otettava syy useiden oppilaiden vaikeuksille oppia murtolukuja ja niiden laskutoimituksia (Pantziara & Philippou, 2012).

Park, Gűçler ja McCrory (2013) ovat käyttäneet murtolukujen merkityksiä tarkastellessaan perustana murtolukujen historiallista kehitystä ja matematiikan määritelmälähtöistä lähestymistapaa. He kuvailevat neljä erilaista merkitystä: 1) osa-kokonaisuus (*part-whole*), jossa osa kokonaisesta määritellään uudeksi kokonaiseksi, 2) mitta (*measurement*), jossa löydetään murtolukuja kokonaisluvuista mittauksin ja osina, 3) jakolasku (*division*), jossa löydetään algebrallinen ratkaisu yhtälölle Ax=B, missä A ja B ovat kokonaislukuja ja A ei ole nolla sekä 4) joukko-teoreettinen (*set-theoretical*), jossa määritellään rationaaliluvut joukkona järjestettyjä lukupareja, jossa luvut ovat kokonaislukuja. Tässä lähtökohdassa suhteen käsite jää omaksi riippumattomaksi käsitteeksi, vaikka se merkinnällisesti voisi liittyäkin murtolukuun.

Stewartin (2005) lähtökohtana on murtoluvut koulussa ja hän tarkastelee oppilaiden koulumatematiikassa kohtaamia murtoluvun ja voitaneen myös laajentaa merkinnän ”$\frac{a}{b}$” mahdollisia merkityksiä eri konteksteissa. Hän jakaa merkitykset viiteen luokkaan: 1) osa-kokonaisuus, jossa on kokonaisen osan suhde kokonaiseen, 2) mitta, joka näyttäytyy luvun paikkana lukusuoralla, 3) operaattori (*operator*), joka muuttaa jonkun kokonaisen esimerkiksi ”kaksi kolmasosaa 24:stä”, 4) osamäärä (*quotient*), joka on jakolasku ja 5) suhde *(ratio)*, joka on kahden määrän välinen suhde (Stewart, 2005). Pantziara ja Philippou (2012) käyttävät vastaavanlaista luokitusta kuin Stewart. Koska näiden luokitusten lähtökohta on koulumatematiikka, niin kutsumme näitä pedagogiseksi lähestymistavaksi mainittuihin käsitteeseen ja merkintään.

Suomalaisissa peruskoulun oppikirjoissa merkinnän ”$\frac{a}{b}$” tulkinnat voidaan jakaa viiteen pääluokkaan: murtoluku, rationaaliluku, suhde, jakolasku ja todennäköisyys (Joutsenlahti, Perkkilä & Tossavainen, 2017). Murtoluvun pääluokka voidaan jakaa merkitysten perusteella kahteen alaluokkaan: 1) osa – kokonaisuus (esimerkiksi ”kaksi osaa kolmesta osasta”) ja 2) murto-osa annetusta kokonaisesta (esimerkiksi ”kaksi kolmasosaa luvusta 24”). Ensimmäinen tulkintamme vastaa edellä esitettyjä ”osa-kokonaisuus” -luokkia ja toinen vastaa lähinnä Stewartin (2005) operaattorimerkitystä. Rationaaliluvun merkitys tulee suomalaisissa oppimateriaaleissa ”piste $\frac{a}{b}$ lukusuoralla”-tulkintana ja joukkomääritelmänä. Jakolasku- ja suhde -tulkinnat ovat vastaavat kuin edellä esitetyissä luokitteluissa. Sen sijaan todennäköisyyden tulkintaa omana luokkanaan ei ole edellä esitetyissä, mutta katsomme sen olevan oma käsitteellisesti erilainen merkitys verrattuna muihin luokkiin. (Joutsenlahti ym., 2017; Joutsenlahti & Perkkilä, 2019.)

Taulukkoon 1 on koottu merkinnän ”$\frac{a}{b}$” kontekstisidonnaisia merkityksiä edellä esitettyjen lähtökohtien ”Matemaattinen ja historiallinen” sekä ”Pedagoginen” näkökulmista pohjautuen kirjallisuuteen. Tässä artikkelissa emme käsittele näiden luokitteluissa esiintyneiden käsitteiden välisiä suhteita, vaan tarkastelemme vain merkinnän ”$\frac{a}{b}$” merkityksiä luokan ”Pedagoginen B” suhteen (ks. Taulukko 1).

Taulukko 1. Merkinnän ”$\frac{a}{b}$” mahdollisia tulkintoja kirjallisuuden perusteella. (Matemaattinen ja historiallinen: Park, Gűçler & McCrory 2013; Pedagoginen A: Stewart 2005 ja Pantziara & Philippou 2012; Pedagoginen B: Joutsenlahti, Perkkilä & Tossavainen 2017).

Lähtökohtia tulkinalle ”a/b”	Matemaattinen ja historiallinen	Pedag. A	Pedag. B
Murtoluku	Osa-kokonaisuus	Osa-kokonaisuus	Osa-kokonaisuus, Murto-osa annetusta kokonaisesta
Suhde	Suhde	Suhde	Suhde
Rationaaliluku	Mitta, Joukkoteoreettinen	Mitta	Rationaaliluku
Jakolasku	Jakolasku	Osamäärä	Jakolasku
Muita			Todennäköisyys

Merkinnästä ”$\frac{a}{b}$” tulkittuna murtoluvuksi voidaan siis löytää kaksi erilaista merkitystä kontekstin mukaan (Pedagoginen B, Taulukko 1). Suhde on alakoulun matematiikassa Suomessa useimmiten kahden lukumäärän (luonnollisen luvun) välinen suhde (esimerkiksi sekoitussuhde tai mittakaava). Murtoluvun ensimmäinen merkitys Taulukossa 1 on ”osa-kokonaisuus” ja se on siis myös suhde (osan suhde kokonaiseen). Kokonaisella tarkoitamme tässä yhteydessä lukua, algebrallista lauseketta tai kuviota, mikä jaetaan annetun murtoluvun nimittäjällä yhtä suuriin osiin ja näitä osia otetaan osoittajan suuruinen määrä (vrt. operaattori -merkitys). Kaikki suhteet eivät ole tulkittavissa kuitenkaan murtolukuina, sillä esimerkiksi kokonaisen osien väliset suhteet ovat sellaisia (ks. Stewart, 2005) tai laajemmin tulkittuna eri suureiden väliset suhteet (esimerkiksi fysiikassa). Tässä artikkelissa tulkitsemme opiskelijoiden vastauksia tutkimustehtävästä edellä kuvatuilla murtoluvun ja suhteen merkityksillä.

Merkinnän ”a/b” tarkastelua Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa ja matematiikan oppimateriaaleissa

Suomalaisessa matematiikan opetuksessa oppikirjoilla on varsin keskeinen rooli opiskelutilanteiden ohjaajina. Matematiikan oppikirjat voivat olla lähes opetussuunnitelman asemassa. (Kupari, 1999; Perkkilä, 2002; Törnroos 2005; Joutsenlahti & Vainionpää, 2010; Viholainen, Partanen, Piiroinen, Asikainen & Hirvonen, 2015.) Vastuu käsitteiden merkityksistä ja niiden välisistä yhteyksistä on kuitenkin opiskelutilanteiden toteuttajilla, ei oppikirjoilla.

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa (POPS, 2014) termi ”murtoluku” tai sen erilaiset taivutusmuodot mainitaan muutaman kerran seuraavanlaisten ilmausten yhteydessä: ”Pohjustetaan murtoluvun käsitettä jakamalla kokonainen yhtä suuriin osiin.” (luokilla 1–2), ”Opitaan murtoluvun käsite ja harjoitellaan murtolukujen peruslaskutoimituksia eri tilanteissa.” ja ”Hyödynnetään murtoluvun, desimaaliluvun ja prosentin välisiä yhteyksiä.” (luokilla 3–6) sekä ”Vahvistetaan laskutaitoa murtoluvuilla ja opitaan murtoluvun kertominen ja jakaminen murtoluvulla.” (luokilla 7-9) (POPS, 2014, s. 135, 262, 430). Ylemmillä luokilla 7–9 mainitaan termi ”rationaaliluku” tavoitteiden yhteydessä esimerkiksi seuraavalla tavalla: ”ohjata oppilasta kehittämään kykyään laskea peruslaskutoimituksia rationaaliluvuilla” (POPS, 2014, s. 433). Käsitteiden murtoluku ja rationaaliluku välisen yhteyden avaamista ei ole kuvattu tavoitetasolla mainituissa perusteissa. Yhteenvetona voi todeta, että käsitteen murtoluku sisällöllinen avaaminen jää opetussuunnitelman kuvauksessa vähäiseksi ja käsitettä käytetään lähinnä erilaisten laskutoimitusten hallintaan liittyvien tavoitteiden kuvaamisessa.

Matematiikan termi ”suhde” ei löydy kertaakaan opetussuunnitelman perusteiden tekstistä matematiikan osuuksissa luokilla 1–9. Edellisen sijaan suhde -käsitteeseen liitettävä termi ”mittakaava” on mainittu esimerkiksi seuraavassa luokkien 3–6 sisältökuvauksessa: ”Tutustutaan mittakaavan käsitteeseen ja käytetään sitä suurennoksissa ja pienennöksissä. Ohjataan oppilaita hyödyntämään mittakaavaa kartan käytössä.” (POPS, 2014, s. 262). Luokilla 7–9 on mainittu suhde käsitteeseen liitettävä termi ”verrannollisuus”: ” Tutustutaan suoraan ja kääntäen verrannollisuuteen.” (POPS, 2014, s. 430). Lienee hieman yllättävää koulumatematiikan näkökulmasta, että keskeinen käsite ”suhde” ei ole eksplisiittisesti mainittu opetussuunnitelman perusteissa. Suhde -käsite on kuitenkin pohjana muun muassa mittakaavan ja verrannollisuuden käsitteille. Lisäksi yläkoulussa esimerkiksi trigonometriset funktiot määritellään suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksien suhteina. Alakoulun matematiikan oppimateriaaleissa suhteen käsite tulee tyypillisesti ilmi esimerkeissä, joissa mehutiivistettä ja vettä sekoitetaan jossain annetussa suhteessa. Suhteen käsite ei siis korostu opetussuunnitelman perusteissa sisältökuvauksissa, mutta siihen läheisesti liittyviä käsitteitä löytyy.

Murtoluvut ja niihin liittyvät laskutoimitukset ovat olleet perinteisesti keskeisinä pidettyjä koulumatematiikan oppisisältöjä aina 1800 -luvulta asti. Murtolukua on käsitelty varsin monipuolisesti jo 1800 -luvun matematiikan oppikirjoissa ja osa näistä murtoluvun käsittelytavoista on löydettävissä nykyisistäkin oppikirjoista. Uuden matematiikan ajan (1970-luku) oppikirjoissa korostui jonkin verran konseptuaalinen ajattelu. Nykyisin matematiikan oppikirjoissa murtolukujen kohdalla painottuvat laskutoimitukset. (Joutsenlahti, Perkkilä & Tossavainen, 2017.) Murtoluvut ovat osoittautuneet koulumatematiikassa varsin haastavaksi alueeksi. Vaikeutena on usein se, että oppilaille ei ole syntynyt yhtenäistä käsitekuvaa murtoluvuista. (vrt. Lortie-Forgues, Tian & Siegler, 2015; Näveri, 2009; Niemi & Metsämuuronen, 2008.)

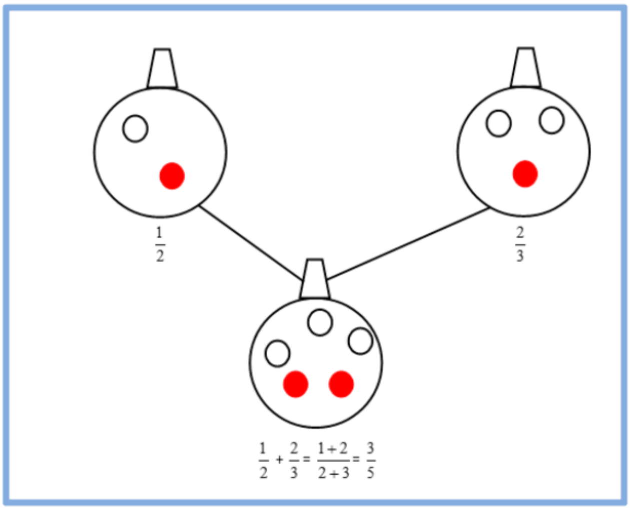
Suomalaisissa matematiikan oppikirjoissa merkinnälle ”$\frac{a}{b}$” voidaan löytää murtoluku -merkintä, jota käytetään kahdessa merkityksessä murto-osana kokonaisuudesta *”osa annetusta kokonaisuudesta”* (esimerkiksi kaksi kolmasosaa annetusta kokonaisuudesta) tai osakokonaisuutena esimerkiksi *”kaksi kolmesta osasta” (*vrt. Taulukko 1). Sama merkintä voi tarkoittaa myös *suhdetta* (esimerkiksi ”a:n suhde b:hen” tai ”kahden suhde kolmeen”).

Matematiikan oppikirjoissa kuvataan murto-osaa ”$\frac{a}{b}$” kokonaisuudesta pääasiassa pinta-alamallina, joista yleisin on ns. piirakkamalli (”pizza -malli”), esimerkiksi kaksikolmasosaa pizzasta (Perkkilä, Joutsenlahti & Sarenius, 2017; Joutsenlahti, Perkkilä & Tossavainen, 2017). Osakokonaisuutta kuten ”kaksi kolmesta” käytetään silloin, kun tarkastellaan esimerkiksi joukkomallia, jossa on kaksi punaista helmeä ja yksi sininen helmi. Tällöin kaksi kolmesta helmestä on punaisia. Suomalaisissa matematiikan oppikirjoissa yhteys suhde-käsitteeseen tulee esille muun muassa kuvioiden tai kappaleiden suurennosten ja pienennösten yhteydessä (luokkien 1–9 oppimateriaalit), mittakaavan yhteydessä (lähinnä luokkien 3–6 oppimateriaalit), matkan ja ajan (nopeus) suhteena sekä verrannoissa (lähinnä luokkien 7-9 oppimateriaalit) (vrt. POPS 2014, s. 262, 430). Arkipäivään liittyvien tuotteiden hintojen ilmoituksissa on havaittavissa yhteys suhteen käsitteeseen ja verrantoon jo alaluokilla kuten seuraavasta käy ilmi: ”Kananmunat maksavat kaksi euroa tusina. Kuinka paljon maksaa kaksi tusinaa kananmunia?”. Verranto tulee varsinaisesti yläluokilla muun muassa nopeuksien laskemisen yhteydessä matkan ja ajan välisenä suhteena. Suoraan verrannollisuutta kuvaa edellinen kananmunien hintaan liittyvä esimerkki. Kääntäen verrannollisuudessa käytetään usein matkaa kulunutta aikaa esimerkkinä: ”Kahden paikkakunnan välimatka on 100 km. Autoilijalta kuluu matkaan aikaa yksi tunti, kun hän ajaa sen nopeudella 100 km/h. Kuinka paljon häneltä kuluu aikaa, jos hän ajaa saman matkan nopeudella 80 km/h?” Suhde -käsitteen merkintätapana käytetään suomalaisissa oppikirjoissa merkintöjä $\frac{a}{b}$ tai a:b. (vrt. Joutsenlahti & Perkkilä, 2019.)

Edellä olevat kuvaukset merkinnän ”$\frac{a}{b}$” tulkinnoista murtolukumerkinnän ja suhde -käsitteen merkityksessä suomalaisissa oppikirjoissa antavat esimerkkejä näiden merkitysten ilmenemismuodoista. Nämä sisällöt esiintyvät oppikirjoissa omina aihealueinaan. Murtolukumerkinnän ja suhde -käsitteen välisiä yhteyksiä ei juurikaan nosteta esille. Edellisen sijaan suomalaiset matematiikan oppikirjat tuovat esille murto- ja desimaalilukujen sekä prosentin käsitteen välistä yhteyttä. Tätä yhteyttä painottaa myös perusopetuksen opetussuunnitelma. Kuitenkin yhtenäisen käsiteverkon luomisen näkökulmasta olisi syytä nostaa esille merkinnän ”$\frac{a}{b}$” erilaisia ilmenemismuotoja ja niiden välisiä yhteyksiä. Ylipäätänsä käsitteiden välisten yhteyksien avaaminen on vähäistä oppikirjoissa. Erityisesti murtoluvun käsitteen yhteyksien avaaminen on haasteellista, sillä kirjallisuudessa nämä tulkinnat ovat jonkin verran toisistaan poikkeavia. Oppilaiden näkökulmasta tämä on hämmentävää, koska he ovat rakentamassa matemaattista käsitekuvaansa.

TUTKIMUSKYSYMYS JA TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

Tutkimuksemme perustuu Kuvan 1 tehtävän ratkaisuihin. Kyseinen tehtävä on ollut osa laajempaa tutkimustamme (Joutsenlahti & Perkkilä, 2019) murtolukujen merkitysten ymmärtämisestä, mutta käsittelemme tehtävää tässä uudesta näkökulmasta. Tutkimme opiskelijoiden tulkintoja matematiikan symbolikielen ja kuviokielen (ks. Joutsenlahti & Perkkilä, 2019) yhdessä muodostaman prosessin tulkintaan erityisesti murtoluvun ja suhteen käsitteiden suhteen.



Kuva 1. Opiskelijoiden tehtävä: ”Kerro, mitä kuvassa on tapahtunut kuvioiden ja matematiikan symbolikielen suhteen.”

Tutkimuskysymyksemme on: miten luokanopettajaopiskelijat tulkitsevat annetun kuvan (Kuva 1) kuviokielen ja matematiikan symbolikielen suhteen?

Vuonna 2017 yhteensä 102 Tampereen yliopiston (EDU) ja Jyväskylän yliopiston (Kokkolan yliopistokeskus Chydenius) luokanopettajaopiskelijaa pohti edellä annettua tehtävää itsenäisesti harjoitustehtävänä viikon ajan. Mainituista opiskelijoista 92 palautti tehtävän ja antoi luvan käyttää palauttamiaan ratkaisuja tähän tutkimukseen.

Tutkimusmetodina käytimme teoriaohjaavaa sisällönanalyysiä (Schreier, 2013; Tuomi & Sarajärvi, 2012), jonka perusteella löysimme tehtävän eri ratkaisuvaiheista luokkia, jotka kuvaavat opiskelijoiden tulkintoja. Sisällönanalyysia voidaan käyttää kirjoitettujen kuultujen ja nähtyjen aineistojen sisältöjen analysointiin, jolloin pyritään muodostamaan aineistosta kokonaiskuva. Kirjoitettuna aineistona meillä on luokanopettajaopiskelijoiden pohdinnat Kuvan 1 tehtävästä. Teoriaohjaavassa sisällönanalyysissa tutkimuksen teoreettiset kytkennät tuodaan esille tutkimuksen viitekehyksessä ja ne toimivat apuna analyysissa kuten meidänkin tutkimuksessamme. Teoreettiset lähtökohdat antavat tukea ajatteluun ja tulkintaan. Teoriaohjaavan sisällönanalyysin mukaisesti rakensimme opiskelijoiden tuottamista Kuvan 1 ratkaisuvaiheista aineistolähtöisiä alaluokkia, joista sitten muodostimme yläkategorioita teoreettisen viitekehyksen ohjaamana. Näin teoreettinen viitekehys tuki ajatteluprosessiamme aineiston tarkastelussa, jotta voimme muodostaa aineiston rakenteesta ja sisällöstä selkeän kuvan opiskelijoiden tehtävätulkinnoista teoreettisen viitekehyksemme ohjaamana. Kumpikin tutkija analysoi aineiston ja epäselvät tapaukset käsiteltiin yhdessä. Kaikista tulkinnoista saavutimme yksimielisyyden.

TULOKSET

Tarkastelemme ratkaisuprosessia (Kuva 1) tyypillisen ratkaisumallin mukaisesti. Kaikki opiskelijat (N=92) tulkitsivat kuvaa ylhäältä alas eli että aluksi oli erillään yksi valkoinen pallo (”pallo” yleisin nimitys) ja yksi punainen pallo sekä toisessa paikassa (esimerkiksi ”pussissa”) kaksi valkoista ja yksi punainen pallo. Ratkaisuprosessin selitykset voidaan jakaa vaiheiden mukaan seuraaviin luokkiin: A) ”$\frac{1}{2}$” ja ”$\frac{2}{3}$” merkitykset, B) lausekkeet ”$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$” ja ”$\frac{1+2}{2+3}$” ja C) yhtälö ”$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1+2}{2+3}$” ja D) kuvapäättely.

Luokassa A (”$\frac{1}{2}$” ja ”$\frac{2}{3}$” merkitykset) löytyi kolme alaluokkaa (suluissa vastausten lukumäärä). Esimerkkinä ensimmäinen ”$\frac{1}{2}$”: A1 ”*valkoisten pallojen määrän suhde kaikkiin palloihin*” (N=7), A2 ”*yksi valkoinen pallo kahdesta pallosta*” (N=6) ja A3 ”*yksi kahdesosa kaikista palloista*” (N=19). Alaluokat A1 ja A2 edustavat Taulukon 1 murtolukutulkinnan ensimmäistä ”osa-kokonaisuus” -merkitystä ja A3 toista ”murto-osa kokonaisesta” -merkitystä. Alaluokassa A1 tulee esille myös suhteen käsite. Suurin osa opiskelijoista ei erikseen kuvaillut ”$\frac{1}{2}$” ja ”$\frac{2}{3}$” merkityksiä, vaan siirtyivät kommentoimaan niistä muodostettuja lausekkeita. Kuvan 1 yläosasta kaikki tunnistivat, että esimerkiksi murolukujen osoittajat kuvaavat valkoisten pallojen lukumääriä eikä punaisten, kuten seuraavasta esimerkistä ilmenee: ”*Tyhjien ympyröiden suhde värillisiin (kaksi ylintä ok)*” (Vastaaja 27).

Luokassa B summalausekkeen oikeellisuuteen kiinnitettiin vain vähän huomiota. Kaksi opiskelijaa totesi, että summalauseke ei ole oikein laadittu kahden suhteen summalle. Tässä opiskelijat ovat tulkinneet ″$\frac{1}{2}$″ ja ″$\frac{2}{3}$″ suhteiksi. Esimerkiksi Vastaaja 22 perusteli asiaa näin:

″Ratkaisija on sekoittanut määrään liittyviä suhteellisuuksia merkitsevään määrään keskenään. Yllä olevissa murtoluvuissa osoittaja ei siis ilmaise esim. asioiden määrää sinänsä, vaan on suhdeluku, joka ilmaisee osuutta kokonaismäärästä tai suhteellisuutta suhteessa kokonaismäärään.″

Toiset kaksi opiskelijaa kommentoivat, että yhteenlaskulauseke ei voi olla oikein, koska murtoluvut on otettu eri kokonaisista. Alkuperäisten joukot olivat kaksi ja kolme palloa ja näistä kokonaisista laskettaisiin murto-osat ″$\frac{1}{2}$″ ja ″$\frac{2}{3}$″ (vrt. operaattori Taulukko 1). Moni opiskelija (N=19) pohti, että lauseke ″$\frac{1+2}{2+3}$″ on oikein kuvan perusteella, vaikka on ristiriidassa murtolukujen yhteenlaskusääntöjen kanssa. Tässä syntyy käsitteellinen ristiriita yhtälössä vasemman puolen murtolukujen ja oikean puolen suhde -käsitteen kanssa, mikä näkyy kummankin puolen mielekkäänä tulkintana kuvien perusteella (Kuva 1). Näissä huomioissa on ymmärrykseen perustuva *käsitteellinen lähestymistapa*. Näitä huomioita on vain kovin vähän vastausjoukossa!

Luokan C yhtälön ″$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1+2}{2+3}$″ totesi virheelliseksi (ts. epätodeksi) 31 opiskelijaa ja he totesivat, että siinä yhtälön vasemman puolen murtoluvut on laskettu väärin yhteen. Nämä opiskelijat sievensivät lisäksi yhtälön vasemman puolen murtolukujen yhteenlaskusäännöllä ja saivat summan arvoksi $\frac{7}{6}$ kuten seuraavasta aineistolainauksesta ilmenee:

″Jaa-a Tässä tehtävässä on $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ *laskettu yhteen virheellisesti. Jos nimittäjä on eri tulee ne laventaa tai supistaa samannimisiksi ennen yhteenlaskua* $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$″. (Vastaaja 8)

Näistä 31 opiskelijasta 18 opiskelijaa piti tätä lopullisena oikeana vastauksena huolimatta siitä, että yhtälön yläpuolella oleva kuva ei tukenut lopputuloksen oikeellisuutta. Loput 13 opiskelijaa ilmoittivat, että sieventämällä saatu summan arvo $\frac{7}{6}$ on oikea laskutulos, mutta jotain on väärin, koska kuva on ristiriidassa tuloksen kanssa. Nämä johtopäätökset perustunevat opittuun murtolukujen yhteenlaskusääntöön ja siitä saatava summan arvo oli monelle opiskelijalle jo riittävä eikä sen merkitystä pohdittu lukuarvona eikä suhteessa kuvaan. Selvästikin yhtälön vasemman puolen tulkitseminen suhteeksi on outo ajatus, sillä niiden yhteenlasku ei ole tuttua koulumatematiikassa. Vain neljä opiskelijaa itse asiassa kyseenalaisti yhtälön vasemman puolen mielekkyyden suhteessa kuviin (ks.

luokka B). Laskutoimituksen mekaaniseen soveltamiseen perustuvat johtopäätökset olemme nimenneet *proseduraaliseksi lähestymistavaksi* tämän annetun ongelman ratkaisemiseen.

Mielenkiintoinen on myös luokan D niiden 35 opiskelijan tulkinta, että matematiikan symbolikielisessä ratkaisussa ei ollut mitään huomautettavaa:

"Tässä havainnollistetaan, miksi murtolukuja yhteen laskettaessa ylemmät ja alemmat luvut voi laskea yhteen. Aluksi en ymmärtänyt lainkaan, mistä oli kyse, kun tuijotin vain punaisia palloja. Olisi ollut havainnollisempaa mielestäni, jos värilliset pallot olisivat ilmoittaneet paljonko. Toisaalta tämä versio sai ajattelemaan enemmän". (Vastaaja 6)

Tähän on saattanut vaikuttaa se, että Kuvassa 1 esitetyn yhtälön oikea puoli on perusteltavissa sen yläpuolella olevan kuvion kanssa eikä yhtälön vasenta puolta ole pohdittu erikseen käsitteellisestä näkökulmasta. Lopputulos "$\frac{3}{5}$" on yhteneväinen kuvapäättelyn kanssa ja siksi matematiikan symbolikielisten lausekkeiden muodostus ei ole ehkä ollut kiinnostuksen kohteena. Kutsumme tätä *kuvapäättelyksi*, jossa matemaattisesta ratkaisuprosessista on huomioitu vain tulos. Näiden opiskelijoiden määrä on yli kolmannes vastanneista. Seuraavaan Taulukkoon 2 olemme koonneet luokanopettajaopiskelijoiden (N=92) tulkintojen perusteita Kuvan 1 tehtävän ratkaisusta.

Taulukko 2. Luokanopettajaopiskelijoiden (N=92) tulkintojen perusteita Kuvan 1 tehtävän ratkaisusta (Nm: murtolukutulkintojen määrä, Ns: suhdetulkintojen määrä)

Peruste	Lkm Nm+Ns	Murtoluku	Suhde
Käsitteellinen			
"$\frac{a}{b}$"	19+33	Murto-osa kokonaisesta	Osa-kokonaisuus
"$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$"	4+4	"Murto-osa (eri)kokonaisesta"	"suhteiden yhteenlasku"
Proseduraalinen	31+0	murtolukujen yhteenlaskulausekkeen sievennys	-
Kuvapäättely	35	kuvasarja ja lausekkeen sievennetty lopputulos	
Muut	22	ei luokiteltu	

Edellä olevassa Taulukossa 2 on koottu yhteen luokittelemalla opiskelijoiden johtopäätösten perusteet Käsitteelliseen, Proseduraaliseen, Kuvapäättelyyn ja Muut. Luokittelu ei ole poissulkeva eli samoja opiskelijoita voi olla useammassa luokassa. Käsitteellisissä tulkinnoissa löytyvät sekä murtoluku ja suhde tulkintoja merkinnälle "$\frac{a}{b}$". Proseduraalinen peruste ratkaisuprosessin oikeellisuuden kuvaukselle fokusoituu murtolukujen yhteenlaskulausekkeen sievennykseen. Kuvapäättelyssä matematiikan symbolikielinen lauseke jää vähälle huomiolle ja johtopäätökset perustuvat kuviin ja matemaattisen lopputuloksen tulkintaan yhdessä. Taulukon 2 ryhmässä ”Muut” selityksille ei löytynyt yhtenäisiä perusteluokkia.

POHDINTA

Taulukon 2 tuloksista voimme nähdä, että molemmat merkitykset murtoluku ja suhde tunnistetaan merkinnässä ”$\frac{a}{b}$” ja suhde -tulkinta on jopa yleisempi niiden kohdalla, jotka olivat kuvanneet tämän. Tässä yksinkertaisessa merkinnässä molemmat merkitykset ovat ilmeisesti hyvin tunnistettavissa, mutta ei ole selvää, kuinka moni opiskelija on tietoinen molemmista näkökulmista. Yhteenlaskulausekkeen tulkinnassa vain harva (N_s=2) lähti pohtimaan lausekkeen merkitystä suhteiden yhteenlaskun näkökulmasta. Murtolukutulkinnan mielekkyyttä pohti myös yhtä pieni joukko opiskelijoita (N_m=2). Nämä on hyvä huomioida luokanopettajien perus- ja täydennyskoulutuksessa.

Tutkimuksemme tulosten perusteella on huolestuttavaa se, että noin kolmasosa tulevista luokanopettajista ei huomannut Kuvan 1 symbolikielisessä ratkaisuprosessissa mitään huomautettavaa. Pohdimme, että syynä saattaisi olla se, että opiskelijat ovat huomioineet ainoastaan sen, että lopputulokselle ”$\frac{3}{5}$” on löydettävissä perustelu kuvapäättelyn avulla. Kuvakielen ja symbolikielen välistä yhteyttä ei ole pohdittu, vaan ainoastaan vastauksen ja kuvan välistä yhteyttä. Tämäkin on tuttua koulumatematiikasta, missä on totuttu korostamaan oikean vastauksen merkitystä itse ratkaisuprosessin sijaan. Pehkonen ja Rossi (2018) tuovat esille, että opiskelijan tietorakenne voi olla hyvin hatara ja se voi rakentua erillisistä tiedoista ja assosiaatioista, joiden avulla opiskelija pystyy antamaan kuvan riittävästä osaamisesta tehtävien ratkaisun yhteydessä. Hyvä esimerkki tästä on koetilanteesta selviäminen siten, että osataan tarvittavat laskusäännöt, joiden avulla voidaan koetehtävät ratkaista. Erilaisten representaatioiden (piirrosten, luonnollisen kielen ja symbolikielen) välisten yhteyksien esille tuominen ja pohtiminen ei ole kovin tavallista koulumatematiikassa, vaikka opetussuunnitelmassa on ohjausta tällaiseen työskentelyyn. (vrt. Joutsenlahti & Perkkilä, 2019.) Edellä mainittujen lähestymistapojen avulla voidaan rakentaa siltaa esimerkiksi murtoluvun merkinnän ja suhteen käsitteen välille. Suhde on juuri sellainen käsite, joka jää melko vähälle huomiolle koulumatematiikassa ja tulee esille vain prototyyppimäisinä esimerkkeinä. Näin siitä ei rakennu kuvaa osana murtoluvun käsiteperhettä. Yhtenäisen käsitekuvan eheytymättömyys näkyi opiskelijoiden Kuvan 1 ratkaisuprosessien pohdinnoissa. Ainakin osaksi tässä on nähtävissä koulumatematiikan pohjalta rakentunut käsitekuva. Käsitekuva näyttäytyi opiskelijoiden vastauksissa irrallisina tietoina muun muassa erillisten laskusääntöjen osaamisena kuten Kuvan 1 tulkinnoissa murtolukujen yhteenlaskusäännön soveltamisena. Oppilaiden tulisikin kohdata koulumatematiikassa useiden käsitteiden ”käsiteperheitä” huolella valittujen esimerkkien avulla ja päästä pohtimaan käsitteiden välisiä merkityssuhteita. Kielentämisen keinot voisivat tuoda tähän tarkasteluun hyvän pedagogisen lähtökohdan (vrt. Joutsenlahti & Perkkilä, 2019; Moschkovich & Zahner, 2018).

Matemaattista osaamista ei voi saavuttaa Moschkovichin ja Zahnerin (2018) mukaan kehittämällä vain jotain tiettyä piirrettä kuten esimerkiksi laskusääntöjen osaamista. Mielestämme tämä tarkoittaa myös sitä, että koulumatematiikassa tulisi nähdä käsitteiden väliset yhteydet laaja-alaisesti siten, että niiden rakentuminen nähtäisiin sekä vertikaalisesti että horisontaalisesti peruskoulun aikana. Pelkällä laskurutiinien harjoittelulla tähän ei päästä. Jo ensimmäisistä kouluvuosista alkaen tulisi pohjustaa tulevien käsitteiden vaatimia taitoja ja samalla tehdä näkyväksi opiskelun kohteena olevien käsitteiden välisiä yhteyksiä. Juuri konseptuaaliseen eli käsitteelliseen ymmärtämiseen kuuluu ymmärrys matemaattisista käsitteistä, operaatioista ja näiden suhteista kuten esimerkiksi tämän artikkelin teeman murtoluku- ja suhde -käsitteen välisistä yhteyksistä. Käsitteiden välisten yhteyksien avaaminen ja rakentaminen tukee Moschkovichin ja Zahnerin (2018) esille tuomaa ajatusta siitä, että matemaattinen osaaminen rakentuu ajan kuluessa ja se voi olla monen tasoista.

Erityisesti on tärkeää, että opettaja osaa käyttää ja soveltaa matematiikan sisältötietoa sekä pedagogista ja opetussuunnitelmallista tietoa (vrt. Shulman, 1986) oppilaiden lähtökohtiin soveltuvalla tavalla. Kuitenkin oppikirjoihin sitoutuva opetus on varsin yleistä (Kupari, 1999; Perkkilä, 2002; Törnroos, 2005; Joutsenlahti & Vainionpää, 2010; Viholainen, Partanen, Piiroinen, Asikainen & Hirvonen, 2015) ja silloin oppikirjojen laskurutiineja painottava lähestymistapa on opiskeluympäristöjen keskiössä.

Opittua matemaattista tietoa pitäisi voida myös soveltaa ympäröivään yhteiskuntaan (kestävä kehitys). Kestävän kehityksen näkökulma voidaan tässä ymmärtää yhtenäisen käsitekuvan rakentumisena, jolloin oppilaalle kehittyy *strategisia taitoja* muotoilla, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia muun muassa ympäröivän yhteiskunnan näkökulmasta. (vrt. Joutsenlahti & Perkkilä, 2019; Moschkovich & Zahner, 2018; Killpatrick, Swardford & Findell, 2001). Näin avattaisiin oppilaille, että matematiikka on osa jokapäiväistä elämäämme (vrt. POPS, 2014). Katsomme, että yhteiskunta tarvitsee yhä enemmän sellaisia osaajia, joilla on matemaattisen mallintamisen taitoja ja jotka voivat näin edistää esimerkiksi ympäristöongelmien ratkaisuun johtavien mallien näkökulmasta kestävää kehitystä.

Tutkimuksemme johtopäätöksenä ehdotamme: (1) matemaattisen oppimateriaalin kehittämistä pedagogisen sisältötiedon pohjalta ja tulevien luokanopettajien (2) sisältötiedon vahvistamista matematiikassa (erityisesti käsitteellinen tieto) sekä (3) pedagogisen sisältötiedon opiskelua koulumatematiikasta (etenkin missä järjestyksessä opetamme matemaattisia käsitteitä ja kuinka meidän pitäisi tarkastella käsitteiden välisiä suhteita).

LÄHTEET

Joutsenlahti, J. & Perkkilä, P. (2019). Sustainability development in mathematics education – a case study of what kind of meanings do prospective class teachers find for the mathematical symbol "2/3"? *Sustainability*, 11(2),457. https://doi.org/10.3390/su11020457

Joutsenlahti , J., Perkkilä, P. & Tossavainen, T. (2017). Näytteitä murtoluvun käsitteestä eri aikakausien oppikirjoissa. *FMSERA Journal*, 1(1), 99–109. https://journal.fi/fmsera/article/view/60904

Joutsenlahti , J. & Vainionpää, J. (2010). Oppimateriaali matematiikan opetuksessa ja osaamisessa. Teoksessa E. K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.) *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008*. Opetushallitus. Koulutuksen Seurantaraportit 2010:2, 137–148.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* National Academy Press.

Kupari, P. (1999). *Laskutaitoharjoittelusta ongelmanratkaisuun: matematiikan opettajien matematiikkauskomukset opetuksen muovaajina.* Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitoksen tutkimuksia 7.

Lortie-Forgues, H.; Tian, J. & Siegler, R.S. 2015. Why Is Learning Fraction and Decimal Arithmetic So Difficult? *Developmental Review* 38: 201–221. https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008

Moschkovich, J. N. & Zahner, W. (2018). Using the academic literacy in mathematics framework to uncover multiple aspects of activity during peer mathematical discussions. *ZDM*, 50, 999–1011. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0982-9

Niemi, E. K. & Metsämuuronen, J. (toim.) 2010. *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008.* Koulutuksen seurantaraportit 2010:2. https://karvi.fi/app/uploads/2014/09/OPH_0410.pdf

Näveri, L. 2009. *Aritmetiikasta algebraan. Muutoksia osaamisessa peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden aikana.* Helsingin yliopisto. Tutkimuksia 309. Saatavilla https://helda.helsinki.fi/handle/10138/20064

Pantziara, M., & Philippou, G. (2012). Levels of students' conception of fractions. *Educational studies in mathematics*, 79(1), 61–68.

Park, J., Güçler, B., & McCrory, R. (2013). Teaching prospective teachers about fractions: historical and pedagogical perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 82 (3), 455–479. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9440-8

Pehkonen, E. & Rossi, M. 2018. *Hyvää matematiikan opetusta etsimässä.* MFKA.

Perkkilä, P. (2002). *Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa.* Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research 195. https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/42025

POPS 2014. *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014.* Opetushallitus.

Schreier, M. (2013). *Qualitative content analysis in practice* (2. painos). SAGE.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4–14.

Stewart, V. (2005). *Making sense of students' understanding of fractions: An exploratory study of sixth graders' construction of fraction concepts through the use of physical referents and realworld representations.* Doctoral thesis. The Florida State University. College of Education. 12 October 2005. https://diginole.lib.fsu.edu/islandora/object/fsu:168517/datastream/PDF/view

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151–169.

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. (2012*). Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi.* Tammi.

Törnroos, J. (2005). *Opetussuunnitelma, oppikirjat ja oppimistulokset - seitsemännen luokan matematiikan osaaminen arvioitavana.* Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 13.

Viholainen, A., Partanen, M., Piiroinen, J., Asikainen, M. & Hirvonen, P. E. (2015). The role of textbooks in Finnish upper secondary school mathematics: theory, examples and exercises. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20 (3–4), 157–178.