

## MATEMATIIKAN OPISKELUMOTIIVIEN YHTEYS ITSE VALITTUJEN TEHTÄVIEN TIEDONALAPAINOTUKSEEN

Lasse Eronen, Antti Viholainen & Matias Kolström

Itä-Suomen yliopisto

### TIIVISTELMÄ

*Matematiikan opiskelun motiivit määrittävät opiskelijan opiskelua. Tutkimuksessa tarkastellaan Pitkän matematiikan opiskelijoiden (N=88) kokemuksia ja mieluisimman tehtävän valintaa yhtälöparin opiskeluun kehitetyistä erityyppisistä konseptuaalis- ja proseduraalispainotteisista tehtävistä. Opiskelijoiden valinnat ja niiden perusteet vaihtelivat, ja riippuivat opiskelijoiden osaamistasosta ja motiiveista pitkän matematiikan valinnalle. Kiinnostus matematiikka kohtaan oppiaineena osoittautui olevan merkittävä selittävä tekijä sen suhteen valitsevatko opiskelijat konseptuaalis- vai proseduraalispainotteisia tehtäviä mieluisimmaksi tehtäväksi. Konseptuaalispainotteisten tehtävien suosio kasvaa opintomenestyksen kasvaessa. Virheen etsimistä edellyttävä tehtävätyyppi tuo tähän poikkeuksen ja vaikuttaa hyvältä mahdollisuudelta tarkastella konseptuaalista tietoa erilaisista osaamisen kokemuksista huolimatta.*

### JOHDANTO

Viimeisimmät toisen asteen jälkeisiin opintoihin hakeutumista muuttaneet uudistukset ovat huomattavasti kasvattaneet lukion pitkän matematiikan arvosanan merkitystä opiskelupaikan hakemisessa. Samalla pitkän matematiikan opiskelusta on tullut aiempaa suositumpaa. Tästä johtuen on perusteltua ainakin epäillä, että yhä useammin lukiolaisten pitkän matematiikan opiskelun pääasiallisena motivaatiotekijänä ei ole aito kiinnostus matematiikkaa kohtaan oppiaineena, vaan tavoite saavuttaa hyviä arvosanoja ja siten mahdollistaa menestymisen tulevaisuudessa opiskelu- tai työpaikan haussa. Hannulan (2012) mukaan oppimisorientoitunut oppija on sisäisesti kiinnostunut opiskeltavasta asiasta, kun taas suoritusorientoitunut oppija tavoittelee ensisijaisesti hyviä arvosanoja ja niiden tarjoamia hyötyjä. Erilaiset motivaatiotekijät saattavat näkyä erilaisina opiskelukäytänteinä opiskelijoiden keskuudessa.

Opetuksen yksilöllistäminen ja oppijan osaamisen tunnistaminen opiskeluprosessia suunniteltaessa ovat teemoja, jotka ovat eri maissa haastaneet opettajia kehittämään opetustaan. Tutkimukset ovat osoittaneet, että opetuksen yksilöllistäminen kehittää oppijan metakognitiivisia taitoja tarkkailla omaa kehittymistään

(Immordino-Yang & Sylvan, 2010; Kauffman, 2001). Kenties helpoin muutos matematiikan opetuksen yksilöllistämiseksi on tarjota opiskelijoille mahdollisuuksia valita itselleen sopivan tasoista harjoittelumateriaalia, esimerkiksi opettajan etukäteen valitsemista tehtävistä (Eronen & Haapasalo, 2020). Etukäteisvalinnassa opettaja voi asettaa tehtävät näkemyksensä pohjalta intuitiivisesti oletettuun vaikeusjärjestykseen helpottaakseen opiskelijan tehtävän valintaprosessia. Vaikeusjärjestys ei kuitenkaan voi juuri koskaan olla absoluuttinen, koska tehtävien vaikeuden kokemukset vaihtelevat opiskelijoiden välillä. Erityisesti opiskelijoiden käsitykset omasta matemaattisesta kyvykkyydestä ja osaamisesta vaikuttavat siihen, millaisista tehtävistä he uskovat selviytyvänsä ja millaiset tehtävät he kokevat itselleen mielekkäiksi.

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan lukion pitkän matematiikan opiskelijoiden tehtävävalintojen riippuvuutta heidän opiskelunsa motivaatiotekijöistä ja opintomenestyksestään. Artikkeliki keskittyy tapaukseen, jossa kolme amerikkalaista opettajaa suunnittelivat oman opetuksensa yksilöllistämiseksi yhtälöparin opettamiseen neljän eri tason tehtäviä. Tehtävien tasoluokitus perustui heidän intuitiiviseen näkemykseen tehtävien vaikeudesta. Tehtävät käännettiin suomeksi, ja niitä käytettiin itäsuomalaisen lukion MAA5-kurssilla eri opetusryhmissä samanaikaisesti. Opiskelijoita (N=88) pyydettiin myös arvioimaan tehtäviä eri ominaisuuksien suhteen ja valitsemaan itselleen mieluisin tehtävätaso. Artikkelissa tarkastellaan opiskelijoiden vastauksia näihin kysymyksiin ja analysoidaan niiden riippuvuutta pitkän matematiikan valintaan johtaneista motiiveista ja opintomenestyksestä.

## MATEMAATTISTEN TEHTÄVIEN LUOKITTELUN VÄLINEITÄ

Matematiikan opetuksessa ja oppimisessa harjoitustehtävät ovat hyvin keskeinen tekijä. Tehtävät, jotka ovat helppoja ymmärtää ja lähestyä ovat kiinnostavia, ja tehtävien ollessa kiinnostavia oppijoiden asennoituminen matematiikan opiskeluun paranee (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000). Edelleen asennoitumisen suhteen tärkeässä osassa on oppijan näkemys siitä, miten tehtävissä näkyvä matematiikka auttaa omien tavoitteiden saavuttamisessa (Hannula, 2012; Di Martoni & Zan, 2011). Niinpä tehtävien valinta on hyvin tärkeässä roolissa opetusta suunniteltaessa. Yksilöllistämistä painottavassa opetuksessa oppijat ainakin josakin määrin osallistuvat harjoitustehtäviensä valintaan.

### Matemaattisen tiedon esitysmuodot ja käsitteenmuodostusprosessi

Varsin konkreettinen tapa tarkastella matemaattisia tehtäviä on keskittyä siihen, millaisia tiedon eri esitysmuotojen (verbaalisen, kuvallisen ja symbolisen) välisiä yhteyksiä tehtävän ratkaisemisessa vaaditaan. Käsitteenmuodostusprosessin (Haapasalo, 2004) mukaisesti tehtävät voidaan jakaa *orientaatio- ja määrittelyvaiheen* tehtäviin, joissa tavoitellaan uuden tarkastelussa olevan käsitteen tai käsittekokonaisuuden rajaamista siten, että käsitteen kannalta keskeiset vaikuttimet (ns. relevantit attribuutit) tulevat hyvin esille. Tehtävät ovat pääasiassa dialektisia ongelmia, joihin ratkaisija tuottaa ratkaisun omista lähtökohdistaan. Seuraavan vaiheen, eli *tunnistamisen vaiheen* tehtävissä ratkaisijan odotetaan löytävän tehtävän keskeisiä attribuutteja eri esitysmuotojen väliltä kuin saman esitysmuo-

don erilaisien ilmiöiden väliltä. Kolmannessa vaiheessa *tuottamisvaiheessa* ratkaisijaa pyydetään tuottamaan ratkaisu annettuun ongelman alkutilaan. Myös tässä varioidaan sekä tiedon eri esitysmuotojen sisällä että esitysmuotojen välisillä tehtävänäannoilla. Viimeinen eli *lujittamisvaiheen* tehtävän tarkoituksena on käsitteilyssä oleva kokonaisuus saattaa osaksi konseptuaalista tietoverkkoa. Tämä tarkoittaa opiskeltavan asian kytkemistä aikaisempiin käsitekokonaisuuksiin, mikä tarjoaa pohjan uusien käsitekokonaisuuksien opiskelulle.

### **Konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto**

*Konseptuaalinen tieto* määritellään semanttisena tietoverkkona, jonka solmujen ja linkkien tulkitsemiseen yksilö kykenee osallistumaan tiedostaen ja ymmärtäen toimintansa perusteet ja logiikan (Haapasalo & Kadijevich, 2000; ks. Rittle-Johnson 2015; Hiebert ja Lefevre, 1986). Verkon solmut ja linkit voivat olla esimerkiksi käsitteitä tai niiden tunnuspiirteitä eli attribuutteja, toimintoja, näkökulmia tai jopa ongelmia, sillä ratkaistu ongelma tuottaa usein jonkin uuden käsitteen tai säännön. Solmut ja linkit voivat olla myös yksilön omia mentaalisia konstruktioita, niiden ei välttämättä tarvitse perustua objektiiviseen tietoon. Uusia käsitteitä voi syntyä joko käsitteiden muodostamisen tai niiden yhteen sulautumisen eli assimilaation kautta (Haapasalo & Kadijevich, 2000).

Hiebertin ja Lefevren (1986) mukaan *proseduraalinen tieto* on menetelmiin liittyvää tietoa symbolijärjestelmistä ja algoritmeista. Tätä määritelmää täydentää Haapasalon ja Kadijevichin (2000) tulkinta, jossa proseduraalinen tieto on dynaamista ja tarkoituksenmukaista sääntöjen, menetelmien tai algoritmien eli toimintakaavojen suorittamista käyttäen hyväksi tiettyjä esitystapoja. Tämä edellyttää tavallisesti näiden esitystapojen pohjana olevien tietojärjestelmien kielen ja esitysmuotojen ymmärtämistä, mutta ei sen sijaan välttämättä näiden ominaisuuksien tietoista ajattelemista, ainakaan jos suoritus on automatisoitunut (Rittle-Johnsson, 2015).

Tutkijoiden kesken vallitsee yksimielisyys siitä, että puhtaasti konseptuaalista tai proseduraalista tietoa painottavien tehtävien laatiminen on erittäin vaikeaa. Prosessin ja käsitteen välillä on nimittäin duaalinen yhteys, joka edellyttää vuorovaikutusta niiden välillä (Gray & Tall, 1994; Tall, 2004). Tätä näkemystä puoltaa toisaalta myös se, että kokemus matemaattisen tiedon luonteesta on myös henkilökohtainen ja aikaan sidottu. Aluksi paljon konseptuaalista tiedon käsittelyä vaativa tehtävä voi harjaantumisen myötä muuttua rutiinomaiseksi algoritmiseksi tekemiseksi, joka on vahvasti proseduraalista tietoa painottavaa. Tehtäviä analysoidessa on kuitenkin mahdollista arvioida, millaista proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon painotusta tehtävän ratkaiseminen keskimääräiseltä opiskelijalta edellyttää. Analyysia suoritettaessa kannattaa pohtia, vaatiiko tehtävän ratkaisu esimerkiksi yhden tai useamman algoritmin suoraa suorittamista, jolloin tehtävässä proseduraalinen tieto on korostuneessa osassa, vai onko tehtävän ratkaisu enemmän käsitteiden ja käsitteiden välisten yhteyksien pohtimista, jolloin taas tehtävän suorittamisessa konseptuaalinen tieto on korostuneessa roolissa. Haapasalo (2013) on päätenyt tehtävätarkastelussaan tarkastelemaan sitä, millaista konseptuaalista ja proseduraalista tietoa tehtävässä on tarjolla ja toisaalta millaista uutta tietämystä tehtävän tekeminen tuottaa. Tämä tarkastelu

voidaan tehdä keskittyen annetun ongelman tarkasteluun kysymyksen asetteluun, ongelman alkutilan, vaaditun prosessin ja toivotun lopputilan kautta, keskittyen edelleen siihen mitä näistä tiedoista on annettu ja ovatko annetut tiedot tosia vai epätosia. Tällä tavoin Haapasalo esittelee 81 tietopainotukseltaan erilaista tehtävää samasta ongelmalähtökohdasta käsin.

## MOTIIVIT MATEMATIIKAN OPISKELUUN

Opiskeluorientaatioiden ja matematiikan opiskelun motivaatioiden määrittämisessä eräs käytetty malli on odotukset-arvo -malli (Eccles, 1983; Wigfield & Eccles, 2000). Se on motivaatiomalli, missä ihmistä on tarkasteltu ajattelevana ja järkevänä olentona, jolla on omat uskomukset ja odotukset tulevista. Mallissa tarkastellaan yksilön koulusuoriutumiseen, koulunkäyntiin ja opintoihin liittyviä valintoja psykologisten ja sosiokulttuuristen tekijöiden vaikutuksia (Viljaranta, 2017).

Odotukset-arvo -mallissa yksilön suhtautumistavat, odotukset sekä ennakoinnit vaihtelevat motivaation kohteena olevan tehtävän mukaan. Esimerkiksi Salmela-Aron ja Nurmen (2017) mukaan jos yksilön käsitys omista matemaattisista taidoista on myönteinen, hän uskoo pärjäävänsä matematiikan tehtävissä myös myöhemmin. Arvolla tarkoitetaan sitä, miten yksilö liittyy arvostukseen toimintaan tai tehtävään. Tehtävän arvolla tarkoitetaan sitä, kuinka kiinnostavana ja puoleensavetävänä yksilön sitä pitää ja kuinka hän sitoutuu siihen. Tehtävän arvo voidaan jakaa edelleen kolmeen osatekijään: saavutusarvoon, kiinnostusarvoon ja hyötyarvoon. Vaikka näitä osatekijöitä tarkastellaan yleensä toisistaan erillisinä, ne ovat silti käytännössä voimakkaasti toisiinsa yhteydessä (Viljaranta, 2017). Saavutusarvo merkitsee toiminnan ja tehtävän tärkeyttä yksilölle. Kiinnostusarvo kuvaa sitä, kuinka paljon yksilö pitää tai on kiinnostunut tehtävästä tai toiminnasta. Hyötyarvo taas kuvaa sitä, että jokin toiminta tai tehtävä auttaa välineenä saavuttamaan jonkin yksilölle merkittävämmän tavoitteen. Kiinnostusarvo voidaan ajatella olevan lähellä sisäistä motivaatiota ja hyötyarvo taas on käsitteellisesti lähellä ulkoista motivaatiota. Tehtäviin ja työskentelyyn sitoutumiseen vaikuttaa saavutusarvon, kiinnostusarvon ja hyötyarvon lisäksi kustannukset. Kustannukset ovat niitä tekijöitä, jotka vähentävät yksilön halua sitoutua tehtävään tai työskentelyyn. Odotukset operationaalistetaan mallissa kykyuskomuksina omasta osaamisen tasosta sekä suhteessa luokkatovereihin ja muihin oppiaineisiin ja odotuksina menestymisestä tulevilla kurssilla tai tulevana vuotena (Wigfield & Eccles, 2000; Wigfield, Eccles, Schiefele, Roeser & Davis-Kean, 2006).

Aikaisemman tutkimuksen perusteella on vahvoja viitteitä siitä, että oppijan onnistumisen ja kyvykkyyden tunteet voivat olla ratkaisevan tärkeitä kiinnostuksen syntymiselle ja ylläpitämiselle (Viljaranta & Tuominen, 2018). Kiinnostunut oppija suuntautuu taas matematiikan tehtäviin innokkaammin ja sinnikkäämmin, mikä nostaa tehtävässä onnistumisen todennäköisyyttä ja vahvistaa kiinnostusta. Myös oppiaineen kokeminen tärkeäksi ja hyödylliseksi saa oppijan panostamaan opiskeluun ja lisää sinnikkyyttä, mikä myös nostaa tehtävässä onnistumisen todennäköisyyttä (Viljaranta & Tuominen, 2018). Kykyuskomusten on havaittu kanadalaisessa tutkimuksessa (Chouinrad, Karsenti & Roy, 2007) olevan

positiivisesti yhteydessä yläkouluikäisten ponnisteluihin matematiikan tehtävien tekemisessä, tehtävän hyötyarvoon sekä suotuisiin tavoiteorientaatioihin (tehtäväorientaatio ja suoritus-lähestymisorientaatio), mutta käänteisessä yhteydessä haitallisiin tavoiteorientaatioihin (tehtävän välttely). Vastaavasti yhdysvaltalaisessa 7. luokan oppilaiden (N = 1870) matematiikan opiskelun tavoiteorientaatioita ja motivationaalisia uskomusmalleja selvittävässä tutkimuksessa havaittiin, että suotuisat tavoiteorientaatiot olivat kohtalaisesti yhteydessä kiinnostusarvoon ja hyötyarvoon sekä saavutusarvoon. Koetut kustannukset olivat vahvemmin yhteydessä haitallisiin tavoiteorientaatioihin (suoritus-välttämisorientaatio) ja riippumattomia kykyuskomuksista (Conley, 2012).

## **TUTKIMUKSEN TOTEUTUS**

### **Tutkimuksen tavoitteet**

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan lukion pitkän matematiikan opiskelijoiden mieluisimman harjoitustehtävän valintaa, kun valittavana on proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon painotuksen suhteen eritasoisia tehtäviä. Lisäksi tutkitaan heidän mieluisimmalle harjoitustehtävälleen asettamia kriteereitä ja näiden tulosten riippuvuutta opintomenestyksestä ja motiiveista pitkän matematiikan valinnalle. Tutkimuskysymykset ovat seuraavat:

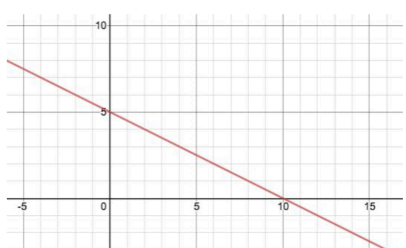
1. Millaisia ovat opiskelijoiden kokemukset eri tehtävätasojen tehtävien ominaisuuksista?
2. Millä tavoin opiskelijoiden tekemät mieluisimman tehtävän valinnat riippuvat opintomenestyksestä ja motiiveista pitkän matematiikan opiskeluun?

### **Tutkimuksessa käytetyt tehtävät**

Tutkimuksessa käytettiin kolmen amerikkalaisen opettajan suunnittelemaan tehtäväsarjaa, jossa opiskellaan ja vahvistetaan yhtälöparin ratkaisemisen taitoa. Tehtäväsarja sisältää neljän eri vaikeustason tehtäviä. Tehtävät käännettiin suomeksi. Käytetyt tehtävät jakautuivat eri tasoille oletetun vaikeustason mukaan. Seuraavassa esitellään käytetyt tehtävät ja analysoidaan niitä Haapasalon (2004) käsitteenmuodostusprosessiteorian ja matemaattisen tiedon eri esitysmuotojen pohjalta. Lisäksi tehtäviä tarkastellaan ongelman asettelun suhteen ja arvioidaan, missä määrin tehtävät edellyttävät konseptuaalista ja missä määrin proseduraalista tietoa.

## Taso 0

Tason 0 tehtävät on esitetty Kuvassa 1. Käsitteenmuodostusprosessin mukaisesti tarkasteltuna tehtävissä a ja b on orientaatiovaiheen tunnusmerkkejä siinä, että seuraavin tehtävien aikana yhtälöparin ratkaisumenetelmät tulevat käytetyksi. Myös määrittelyvaihetta voidaan ajatella olevan siinä, että tehtävää tehtäessä opiskelija joutuu pohtimaan menetelmien toimivuutta erilaisissa tilanteissa. Orientaatio- sekä määrittelyvaihe tapahtuvat symbolisen tiedon perusteella ja vastaus annetaan verbaalisena. Lisäksi tehtävissä vaadittava ensimmäisen vaiheen auki kirjoittaminen edustaa tuottamistehtävää symbolisessa tiedon esitysmuodossa. Kohta c on puolestaan tuottamistehtävä, jossa tuotetaan kuvallisesta tehtävänannosta symbolinen ratkaisu. Ongelmanasettelun suhteen tarkasteltuna tehtävässä on annettu kysymys ja alkutila ja kysytään prosessin aloitusta kohdissa a ja b, sekä prosessia ja sen lopputilaa kohdassa c.

<p>a)</p> $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$ <p>Tämä yhtälöpari on helpoin ratkaista _____-menetelmällä, koska...</p> <p>Näytä miten ratkaisu lähtee liikkeelle, mutta yhtälöparia ei tarvitse ratkaista.</p> <p>b)</p> $\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 8x + 4y = 11 \end{cases}$ <p>Tämä yhtälöpari on helpoin ratkaista _____-menetelmällä, koska...</p> <p>Näytä miten ratkaisu lähtee liikkeelle, mutta yhtälöparia ei tarvitse ratkaista.</p>	<p>c) Kirjoita kuvaajan suoran yhtälö</p> 
--	---

Kuva 1. Tason 0 tehtävät.

Konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon näkökulmasta, tehtävässä korostuu konseptuaalinen ymmärtäminen erityisesti a ja b kohdissa, jossa analysoidaan tilannetta ja perustellaan siihen sopivin työkalu. Toisaalta kohdassa c taas toteutetaan hivenen enemmän proseduraalispainotteista asian käsittelyä. Kokonaisuudessaan kuitenkin enemmän proseduraalista tietoutta painottava tehtävä, sillä tehtävä on suunniteltu lähtötasotehtäväksi eli osoittaa tekijälle millaista aikaisemmasta tietämystä aihealueesta tarvitaan uuden oppimisessa.

## Taso 1

Kuvassa 2 esitetyt Tason 1 tehtävät ovat tuottamistason tehtävä, joissa jokaisessa toimitaan symbolisen tiedon varassa. Tehtävässä d on ongelmanasettelu verbaalisessa muodossa, mutta ratkaisuvaihtoehtojen valinnan puuttuessa tunnistamisvaihe jää ratkaisuprosessista puuttumaan. Tehtävä toimiikin lähinnä orientaatina verbaalisten tehtävien ratkaisemiseen yhtälöparin avulla. Tason 1 tehtävä on ongelman asettelultaan tehtävä, jossa kysymys ja alkutila annettu ja siinä kysytään sekä ratkaisuprosessia että lopputilaa.

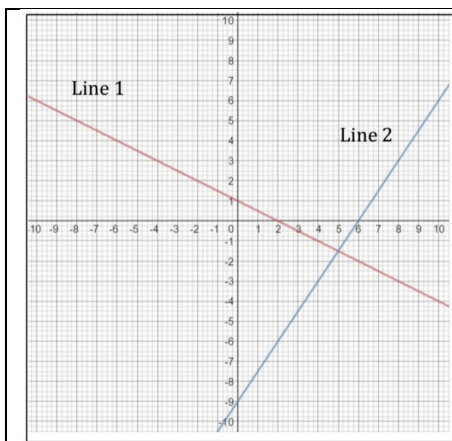
<p>a) Ratkaise yhtälöpari</p> $\begin{cases} 5x + y = 9 \\ 10x - 7y = -18 \end{cases}$	<p>b) Ratkaise yhtälöpari</p> $\begin{cases} 5x + 4y = -14 \\ 3x + 6y = 6 \end{cases}$	<p>c) Ratkaise yhtälöpari</p> $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$
--	--	--

- d) Stefanin koulu myy lippuja kuorokonserttiin. Ensimmäisenä myyntipäivänä myytiin 3 eläkeläisten lippua ja 1 lasten lippu yhteensä 38€. Koulu sai myyntiä toisena päivänä 52€ myymällä 3 eläkeläisten lippua ja 2 lasten lippua. Määritä eläkeläisen ja lapsen lipun hinta. (Alla valmis yhtälöpari tilanteeseen.)

$$\begin{cases} 3x + y = 38 \\ 3x + 2y = 52 \end{cases}$$

Kuva 2. Tason 1 tehtävät.

Tason 1 tehtävät ovat keskenään samanlaisia, niiden sisältönä ollessa yhtälöparin ratkaiseminen. Ratkaisuun tarvitaan konseptuaalista tietoa siitä, miten yhtälöpari ratkaistaan, mutta varsinainen ratkaisun tuottaminen tapahtuu algoritmia soveltaen. Näin tehtävä on kokonaisuudessaan vahvasti proseduraalista tietoa painottava.



- a) Määritä suorien muodostama yhtälöpari kuvaajasta.  
 b) Ratkaise yhtälöpari algebrallisesti.  
 c) Täsmääkö ratkaisusi kuvaajan kanssa? Perustele.  
 d) Sinulla on 3.35 \$ verran rahaa 25 sentin ja 10 sentin kolikkoina. Jos sinulla on 23 kolikkoa, niin ratkaise eri kolikkojen lukumäärät, miten sinulla voi olla kutakin kolikkoa. Kirjoita tilanteesta yhtälöpari ja ratkaise se.

Kuva 3. Tason 2 tehtävät.

### Taso 2

Tason 2 tehtävissä (Kuva 3) ratkaisija joutuu toimimaan vahvasti tuottamisen tasolla. Ratkaisijalta vaaditaan myös yhtälöpariin liittyvien eri esitysmuotojen välisten yhteyksien ymmärtämistä. Tehtävässä a asetelma on kuvallis-symbolinen, tehtävässä b symbolis-symbolinen ja tehtävässä d verbaalis-symbolinen. Kohta c täyttää tunnistamisvaiheen tehtävän ominaisuudet, ja siinä vaaditaan symbolisen ja kuvallisen esitysmuotojen välisten yhteyksien ymmärtämistä. Kaikissa tason 2 tehtävissä on asetettu kysymys ja alkutila. Tehtävissä a ja b kysytään prosessia ja lopputilaa, sekä kohdassa c lopputilan vahvistamista.

Tason 2 tehtävissä painotetaan kokonaisuutena sekä konseptuaalista että proseduraalista tietoa tasapuolisesti. Tehtävissä vaaditaan algoritmien toteuttamista ja siinä mielessä siinä on vahva proseduraalista tietoa painottava ominaisuus. Toisaalta tehtävän tiedon vahvistamista vaativa osuus, sekä sanallisen tehtävän ratkaiseminen asettavat tehtävälle myös konseptuaalista tietoa painottavan ominaisuuden.

## Taso 3

Tason 3 tehtävissä (Kuva 4) toimitaan symbolisen tiedon varassa ja vastaukseksi pyydetään perustelua, joka esitetään verbaalista ja symbolista esitystapaa käyttäen. Molemmissa tehtävissä ratkaisijan tulee arvioida kriittisesti yhtälöparin ratkaisuprosessin oikeellisuutta. Ratkaisuprosessit perustuvat tunnettuihin ratkaisualgoritmeihin, joten tehtävät voidaan tulkita tunnistustehtäviksi, joissa ratkaisijan tulee tunnistaa esitetyistä ratkaisusta ratkaisualgoritmien vaiheet. Toisaalta tehtävät voitaisiin nähdä lujittamisvaiheen tehtävinä, joissa lujitetaan ratkaisualgoritmien hallintaa tarkastelemalla ja arvioimalla tehdyn ratkaisun vaiheita. Tehtävissä on myös tuottamistehtävän ominaisuuksia siinä, että virheen löytyessä ratkaisijan on myös tuotettava oikea ratkaisu tehtävään. Tason 3 tehtävien tarkasteluissa koko prosessi on annettu ja kysytään mielipidettä niiden oikeellisuudesta. Tarkemmin katsottuna tehtävässä on annettu kysymys ja alkutila, sekä virheelliset prosessit ja lopputila. Proseduurin arvioiminen on voimakkaasti konseptuaaliseen tietoon pohjautuvaa, joten tehtävässä on vahva konseptuaalinen painotus. Proseduraalista tietoa tehtävässä edustaa algoritmin suorittaminen virheen löytyessä.

3. Onko ratkaisu oikea? Jos ei ole, niin selitä virhe ja ratkaise yhtälöpari oikein	
3.a	3.b
$\begin{cases} 7x + 2y = 30 \\ 4x + y = 30 \end{cases}$	$\begin{cases} 7x + y = 3 \\ 4x + 3y = 34 \end{cases}$
$\begin{cases} 7x + 2y = 30 \\ 8x + 2y = 60 \end{cases}$	$\begin{cases} y = 7x + 3 \\ 4x + 3y = 34 \end{cases}$
$15x = 90$ $x = 6$	$4x + 3(7x + 3) = 34$ $4x + 21x + 9 = 34$ $25x = 25$ $x = 1$
Tämä sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön	Tämä sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön
$4 \cdot 6 + y = 30$ $24 + y = 30$ $y = 6$	$7 \cdot 1 + y = 3$ $y = -4$
Ratkaisu: (6,6)	Ratkaisu: (1,-4)

Kuva 4. Tason 3 tehtävät.

Asetettaessa tehtävätasot järjestykseen niiden numeron mukaan siten, että Taso 0 on matalin ja Taso 3 korkein voidaan sanoa, että tehtävätason noustessa tehtävien vaatiman konseptuaalisen tiedon ja matemaattisen tiedon eri esitysmuotojen välisten yhteyksien ymmärtämisen merkitys kasvavat. Niinpä voidaan sanoa, että Tasojen 0 ja 1 tehtävissä on korostunut proseduraalisen tiedon painotus ja Tasojen 2 ja 3 tehtävissä puolestaan korostunut konseptuaalisen tiedon painotus.

### Osallistujat ja aineistonkeruu

Tutkimukseen osallistui itäsuomalaisen lukion kaikki analyttisen geometrian kursseille (MAA5, 4 ryhmää) osallistuneet opiskelijat (N=88, joista 41 nais- ja 45 miesopiskelija ja 2 ei ilmoittanut sukupuoltaan). He saivat kyseiset tehtävät tutustuttavaksi ja tehtäväksi siinä vaiheessa, kun niissä vaadittava sisällöllinen ja menetelmällinen tarkastelu oli opetuksessa juuri käsitelty. Tämän jälkeen opiskelijat vastasivat sähköisesti toteutettuun kyselyyn, jossa kysyttiin opiskelijoiden



näkemyksiä tehtävien vaikeustasosta, houkuttelevuudesta, ymmärrettävyydestä, työläydestä ja hyödyllisyydestä oppimisen kannalta. Lisäksi taustatietoina opiskelijoita pyydettiin määrittämään oman matematiikan osaamisensa taso kouluarvosanana ja kertomaan syitä pitkän matematiikan valinnalle lukiossa.

### Analyysimenetelmät

Opiskelijoiden vastauksista raportoitiin keskiluvut ja hajonnat, sekä tutkittiin vastauksien jakaumia ja poikkeavia havaintoja. Tarkastelun perusteella päädyttiin parametrisen testien käyttämiseen. Eri tehtävätasojen vertailemiseksi toisiinsa käytettiin yksisuuntaista t-testiä selvittäessä yksittäisen tason yhteyttä tasojen keskiarvoon.

Kategoriamuuttujittain tehdyt vertailut suoritettiin Khin neliötestillä, testituloksen käytännön merkittävyyttä tarkastelemiseksi testisuureelle määritettiin Cramerin V, sekä poikkeamat määritettiin standardoitujen poikkeamien eli residuaalien (sr) avulla, keskittyen itseisarvoltaan yli 1.66 standardipoikkeaman saamiin kategoria-arvoihin. Tapauksissa, joissa Khin neliötestin oletukset (odotettuja frekvenssejä alle 5 korkeintaan 20 % soluja ja pienen odotettu arvo yli 1) eivät toteutuneet tuloksen varmistamiseksi käytettiin Monte-Carlo -simulaatiota (Field, 2009).

## TULOKSET

### Itseraportoitu matematiikan osaaminen

Taulukosta 1 nähdään, että opintomenestyksen suhteen opiskelijat jakaantuivat melko tasaisesti kolmeen arvosanakategoriaan: "Alle 8", "Tasan 8" ja "Yli 8". Arvosanakategorioihin sijoittumisessa ei löytynyt tilastollista eroa sukupuolten välillä.

Taulukko 1. Itseraportoitu matematiikan osaaminen ja arvosanakategoriat sukupuolittain

Arvosanakategoria	"Alle 8"	"Tasan 8"	"Yli 8"
n	30	31	27
nainen/mies/ei ilmoittanut	18/12/0	15/15/1	8/18/1

### Motiivit pitkän matematiikan opiskeluun

Opiskelijoilta kysyttiin motiiveja siihen, että he ovat päätyneet opiskelemaan pitkää matematiikkaa. Opiskelijat saivat valita niin monta motiivia kuin halusivat. Taulukossa 2 on esitettyä eri vastausvaihtoehtojen osuudet vastauksista.

Taulukosta 2 nähdään, että tarve pitkän matematiikan arvosanalle jatkokoulutuspaikkaa haettaessa oli eniten valittu motiivi pitkän matematiikan valinnalle. Sen valitsi lähes puolet (37 opiskelijaa, 48 %) vastanneista. Myös kyselyn kolme muuta motiivia tulivat melko tasaisesti valittua vastaajien joukossa. 32 opiskelijaa (36 % vastaajista) ei valinnut mitään kyselyssä annetuista motiiveista.

Taulukko 2. Opiskelijoiden (n=88) ilmoittamat motiivit pitkän matematiikan opiskeluun

Motiivi pitkän matematiikan opiskeluun	n
Matematiikka aineena itsessään kiinnostaa minua.	37 (42 %)
Hyvä matemaattinen osaaminen on hyödyksi tulevassa ammatissani.	30 (32 %)
Tarvitsen pitkän matematiikan arvosanaa jatkokoulutuspaikkaan hakemisessa.	42 (48 %)
Pitkän matematiikan suorittaminen on minulle tärkeä saavutus.	33 (38 %)
Ei vastausta.	32 (36 %)

Tarkasteltaessa motiivien jakautumista Taulukossa 1 mainituissa arvosanakategoriat poikkesivat motiivin "Matematiikka itsessään kiinnostaa minua" suhteen ( $\chi^2(2)=10.955$ ,  $p=.004$ ,  $V=0.35$ ). "Yli 8"-arvosanakategoriassa tämän motiivin valinneet opiskelijat olivat yliedustettuina (standardoidu erotus = 1.7), ja vastaavasti "Alle 8"-arvosanakategoriassa tämän motiivin valinneet opiskelijat olivat aliedustettuina (standardoidu erotus = -1.9). Sen sijaan muut motiivit olivat jakaantuneet tasaisesti arvosanakategorioiden suhteen.

### Mielipiteet tehtävien ominaisuuksista

Kyselylomakkeessa vastaajien tuli ottaa kantaa viisiportaisella Likert-asteikolla kunkin tehtävätason tehtävien helppouteen, houkuttelevuuteen, selkeyteen ja ymmärrettävyyteen, työläyteen ja opettavaisuuteen. Tulokset on tehtävästaitain esitettyinä Taulukossa 3.

Taulukko 3. Opiskelijoiden (N=88) näkemykset tehtävätasojen ominaisuuksista. Vastausten keskiarvot ja hajonnat. Tilastolliset merkitsevät ( $p<.05$ ) poikkeamat yhteiskeskiaarvosta on merkitty tähdellä (\*).

Ominaisuus	Taso 0	Taso 1	Taso 2	Taso 3	Yht. ka
Helppous	(4.3, 0.7)*	(4.1, 1.0)*	(3.0, 1.2)*	(3.6, 1.2)	(3.7, 0.8)
Houkuttelevuus	(3.2, 1.1)	(3.3, 1.1)	(2.7, 1.1)*	(3.2, 1.1)	(3.1, 0.9)
Selkeys	(4.1, 0.9)*	(4.2, 0.8)*	(3.3, 1.1)*	(3.7, 1.0)	(3.8, 0.7)
Työläys	(2.1, 1.0)*	(2.6, 1.1)	(3.2, 1.0)*	(2.8, 1.1)	(2.7, 0.7)
Opettavaisuus	(3.2, 1.0)	(3.3, 1.0)	(3.3, 1.1)	(3.2, 1.0)	(3.2, 0.8)

\*Perustuen t-testiin riskitasolla  $p<.05$

Opiskelijoiden mielipiteet eri tehtävätasojen tehtävistä vaihtelivat eniten helppouden, selkeyden ja ymmärrettävyyden osalta. Proseduraalisesti painottuvat Tason 0 ja 1 tehtävät koettiin helpoimpina ja selkeämpinä tehtävinä kuin tehtävämateriaali yleisesti. Lisäksi Tason 0 tehtävät koettiin vähiten työläiksi. Konseptuaalisesti painottuneista tehtävistä Tason 2 tehtävä koettiin sitä vastoin muita tehtäviä työläämpänä, epäselvempänä ja vaikeana sekä vähemmän houkuttelevana. Sitä vastoin Tason 3 tehtävä ei poikennut ominaisuuksiltaan koko tehtävämateriaalin keskiarvosta.

### Mieluisimman tehtävätason valinta

Kun opiskelijoilta kysyttiin mieluisinta tehtävätasoa ja perusteita sille, 77 opiskelijaa vastasi tähän kysymykseen. Heidän vastauksensa (Taulukko 4) jakaantuivat siten, että Tason 1 ja Tason 3 tehtävät saivat eniten kannatusta. Opiskelijat, jotka valitsivat mieluisimmaksi tehtävätasoksi jomman kumman proseduraalista tietoa painottavasta tasosta (joko Tason 0 tai Tason 1), perustelivat valintaansa pääasiassa tehtävien helppoudella. Konseptuaalista tietoa painottavan Tason 2 valinnan perusteluissa painottui erityisesti tehtävien oikea vaativuustaso itselle. Myös Tason 3 tehtävien valinnan perusteluissa mainittiin muun muassa tehtävien mielenkiintoisuus ja virheiden etsimisen kokeminen mielekkääksi.

Taulukko 4. Opiskelijoiden (N=88) valinnat mieluisimmaksi tehtävätasoksi ja valintojen perusteet.

Taso	M(n)	Perusteet valinnalle
Taso 0	12 (14 %)	Helppoin (9), En ennättänyt muita (2), Tekeminen mukavaa (1)
Taso 1	24 (27 %)	Helppo tai ymmärrettävä (10), Sanalliset kivoja (2), Pelkää laskemista (2), Mielenkiintoinen/mieluisa (2)
Taso 2	14 (16 %)	Sopivan helppo (2), Sopivan haastava (5), Piti myös tulkita (1), Piti itse miettiä yhtälöt ja soveltaa (2), Pidin kuvaajista (2)
Taso 3	22 (25 %)	Mielenkiintoinen ja mukava (6), Haastava sai pohtia (3), Kiva etsiä virhettä (5), Opettavaista (2)
Ei valintaa	16 (18 %)	

Arvosanakategorioiden välillä havaittiin eroja mieluisimman tehtävätason valinnan suhteen ( $\chi^2(6)=20.25$  (Monte-Carlo simulaatiolla),  $p=.002$ ,  $V=.38$ ). Jakauma poikkeaa tasaisesta kohtalaisella efektillä siten, että Tason 2 (standardoitu erotus = 1.9) ja Tason 3 (standardoitu erotus = 1.5) suhteen "Yli 8"-arvosanakategorian opiskelijat ovat yliedustettuina, samoin Tason 1 suhteen "alle 8"-kategorian opiskelijat (standardoitu erotus = 2.0). Aliedustusta löytyi arvosanakategorian "Alle 8" -opiskelijoilla Tason 2 suhteen (standardoitu erotus = -1.9) ja Tason 1 suhteen "Yli 8"-kategorian opiskelijat (standardoitu erotus = -2.0). Arvosanakategoriassa "Tasan 8" mieluisimman tehtävätason valinta oli tasaisesti jakautunut eri tehtävätasojen välille

Tarkasteltaessa mieluisimman tehtävätason valinnan riippuvuutta pitkän matematiikan valinnan motiiveista havaittiin, että ainoastaan motiivi "Matematiikka aineena itsessään kiinnostaa minua" tuotti poikkeamia mieluisimman tehtävätason valintajakaumassa ( $\chi^2(3)=9.149$ ,  $p=.027$ ,  $V=.356$ ). Jakauma poikkeaa tasaisesta kohtalaisella efektillä siten, että Tason 3 suhteen oli yliedustus joukossa, joka ilmoitti tämän motiivikseen (standardoitu erotus = 1.8), ja toisaalta aliedustus niiden joukossa, jotka eivät tätä motiivivia valinneet (standardoitu erotus = -1.6).

Rajoitettaessa tarkastelu vain niihin opiskelijoihin, jotka olivat valinneet motiivin "Matematiikka aineena itsessään kiinnostaa minua" havaittiin, että Tason 1 mieluisimmaksi valinneiden joukossa arvosanakategorian "Yli 8" opiskelijat olivat aliedustettuina (standardoitu erotus = -1.6) ja kategorian "Alle 8" opiskelijat yliedustettuina (standardoitu erotus = 2.3). Sen sijaan niiden joukossa, jotka eivät olleet tätä motiivia valinneet mieluisimman tehtävätason valinta riippui arvostanasta ( $\chi^2(3)=13.59$ ,  $p=.016$ ,  $V=.41$ ) siten, että Tason 2 mieluisimmaksi valinneiden joukossa oli yliedustettuna arvosanakategoria "Yli 8" (standardoitu erotus =1.7) ja aliedustettuna kategorian "Alle 8" (standardoitu erotus =-1.5). Lisäksi Tason 3 valinneiden joukossa aliedustettuna oli arvosanakategoria "Tasan 8" (standardoitu erotus =-1.5).

## JOHTOPÄÄTÖKSET JA POHDINTA

Opiskelijoiden kokemuksena proseduraalis-painotteiset tehtävät ovat houkuttelevampia, helpompia ja vähemmän työläitä verrattuna konseptuaalis-painotteisiin tehtäviin, erityisesti tasoon 2 tehtäviin nähden. Tason 3 tehtävät näyttävät mahdollisesti vähemmän työläitä verrattuna Tason 2 tehtäviin, sillä niissä ei tarvitse itse tuottaa ratkaisua vaan vahvistaa olemassa oleva prosessi ja tunnistaa siitä mahdolliset virheet (vrt. Haapasalo 2004). Sitä vastoin Taso 2 koostuu monesta erilaisesta tehtävästä, joka voi selittää työläiden kokemusta. Työläys voi puolestaan implikoida vaikeuden ja houkuttelemattomuuden kokemusta. Tehtävän opettavaisuuden kokemukset eivät poikenneet tehtävätasojen välillä ja vastaukset kasautuivat lähelle arvoa 3. Tämä voi selittyä sillä, että opettavaisuuden arviointi on opiskelijoille vaikeaa.

Opintomenestys on yhteydessä mieluisimman tehtävätason valintaan siten, että parhaiten menestyvät valitsevat mieluummin konseptuaalis-painotteisia (Tasojen 2 tai 3) tehtäviä ja vastaavasti ne, joiden opintomenestys keskimääräistä heikompi valitsevat proseduraalis-painotteisia (Tason 0 ja 1) tehtäviä. Kaikki neljä tehtävätasoa saivat kannatusta vastaajien keskuudessa, mutta suurinta oli Tasojen 1 ja 3 kannatus. Myös valintojen perustelut vaihtelivat. Proseduraalis-painotteisten tehtävien valintaa perusteltiin usein niiden helppoudella, kun taas konseptuaalis-painotteisten tehtävien valintaperusteluissa usein viitattiin haastavuuteen ja mielenkiintoisuuteen. Vaikka arvosanakategorian "Yli 8" opiskelijat pitivät proseduraalis-painotteisia tehtäviä hyvin helppoina, he eivät silti valinneet niitä mieluisimmaksi tehtäväkseen. "Yli 8" -kategorian opiskelijoilla tehtävän helppous ei siis vaikuta olevan valintakriteeri mieluisinta tehtävää valittaessa. Kategorian "Alle 8" opiskelijat puolestaan korostivat tehtävän helppoutta perustellessaan proseduraalis-painotteisten tehtävien mieluisuutta.

Tason 1 ja Tason 2 tehtävän mieluisuuden kokemus oli vahvasti kytkeytynyt oman osaamisen kokemukseen. Mielenkiintoisen lisän tähän antaa Tason 3 konseptuaalis-painotteinen tehtävä "Alle 8" - arvosanakategoriassa. Siinä missä Tason 2 tehtävän mieluisuudessa "Alle 8" -kategoria oli voimakkaasti aliedustettuna, aliedustusta ei kuitenkaan löydy Tason 3 tehtävistä. Tulkinta voisikin olla niin, että Tason 3 tehtävät eivät ole arvosanakategoriassa "Alle 8" yhtä epämieluisia kuin monimutkaisempaa algoritmista työskentelyä vaativat Tason 2

tehtävät. Tämä voi selittyä sillä, että Tason 3 tehtävissä ehdotus ratkaisuprosessiksi on esitettyä, eikä sitä tarvitse tuottaa alusta alkaen itse kuten Tasolla 2.

Aito kiinnostus matematiikkaa kohtaan implikoi konseptuaalispainotteisen tehtävän mielisyyden. "Tasan 8" arvosanakategoriassa Tason 3 tehtävän valinta mielisimmaksi tehtäväksi oli vahvasti riippuva siitä, oliko matematiikan kiinnostavuus itsessään motiivina pitkän matematiikan opiskelulle. Edelleen arvosanakategoriassa "Yli 8" ovat ylläpidettyinä aito kiinnostus matematiikka kohtaan sekä konseptuaalispainotteiset tehtävät mielisimpinä tehtävinä. Sitä vastoin "alle 8" kategoriassa kiinnostus matematiikka kohtaan oppiaineena on ali-edustettuna opiskelun perustana ja proseduraaliset tehtävät koetaan mielisimpinä. Opiskelijoiden tehtävävalintaa osaamisperusteisesti saattaisi ehkäistä se, että kategorioiden nimissä ei painotettaisi tehtävien vaikeustasoa vaan tehtävien sisältöväastavuus, kuten menetelmätietoa painottavat ja käsitteellistä tietoa painottavat tehtäväluokat, olisivat korostuneet. Edellä esitetyt näkökulmat vaativat vielä jatkoselvitystä tehtävän mielisyyksi kokemisen, matematiikan opiskelun motiivien ja opintomenestyksen välisistä yksityiskohtaisemmista yhteyksistä.

Matematiikan opiskeluasenteisiin vaikuttaa se, miten matematiikka auttaa omien tavoitteiden saavuttamisessa (Di Martinon & Anin, 2011; Hannula, 2012). Tehtävän valinnan vapautta puoltaa se, että kiinnostusarvon kokemus lisääntyy kyvykkyyden ja menestymisen kokemusten myötä (Viljaranta & Tuominen, 2018). Tutkimustulosten perusteella tosin näyttää siltä, että jos opiskelija saa valita tehtävänsä itse, hän valitsee sen todennäköisesti oman osaamistasonsa mukaisesti. Toisaalta heikko osaamisen kokemus voi näyttäytyä vaikeiden tehtävien välttelyinä (Conley, 2012). Oman osaamisen haastaminen on kuitenkin keskeinen osa oppimista. Opettajan onkin siis hyvä tunnistaa se missä määrin opiskelija tarvitsee rohkaisua yrittäessään kehittää omaa osaamistaan mukavuusalueen ulkopuolella ja milloin opiskelijan on hyvä tehdä tehtäviä vahvistaakseen ja ennen kaikkea osoittaakseen itselleen omaa osaamistaan mukavuusalueen tehtäviä tekemällä. Tässä tapauksessa Tason 3 tehtävä näyttäisi tarjoavan hyvän lähtökohdan mukavuusalueen laajentamiseksi. Parastahan olisi, jos opiskelijat valitsisivat tehtäviä niiden herättämän oppimisen uteliaisuuden perusteella.

## LÄHTEET

- Chouinard, R., Karsenti, T. & Roy, N. (2007). Relations among competence beliefs, utility value, achievement goals, and effort in mathematics. *British Journal of Educational Psychology*, 77, 501–517.
- Conley, AM. (2012). Patterns of motivation beliefs: Combining achievement goal and expectancy–value perspectives. *Journal of Educational Psychology*, 104(1), 32–47.
- Di Martino, P. & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions. *ZDM - The international journal on mathematics education*, 43(4), 471–482.
- Eccles, J.S. (1983). Expectancies, values, and academic behaviors. Teoksessa J. T. Spence (toim.), *Achievement and achievement motives* (s. 75–146). San Francisco, CA: Freeman.

- Eronen, L. & Haapasalo, L. (2020). A journey to the reappraisal of the term 'student-centred'. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology* 14(1), 18–37.
- Field A. (2009). *Discovering statistics using SPSS* (3. painos). Sage.
- Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic. *Journal of Research in Mathematics Education* 26(2), 115–141.
- Haapasalo, L., & Kadujevich, D. (2000). Two types of mathematical knowledge and their relation. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 21(2), 139–157.
- Haapasalo, L. (2004). Pitäisikö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitäisikö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (s. 50–83). Niilo Mäki -Instituutti.
- Haapasalo, L. 2013. Adapting assessment to instrumental genesis. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 20(3), 87–94.
- Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories. *Research in Mathematics Education*, 14(2), 137–161.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. Teoksessa J. Hiebert (toim.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*, (s. 1–27). Lawrence Erlbaum Ass.
- Immordino-Yang, M. H. & Sylvan, L. (2010). Admiration for virtue: Neuroscientific perspectives on a motivating emotion. *Contemporary Educational Psychology*, 35(2), 110–115.
- Kauffman, J. M. (2001). *Characteristics of emotional and behavioral disorders of children and youth* (7. painos). Merrill Prentice Hall.
- Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. R. (2015). Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review*, 27(4), 587–597.
- Salmela-Aro, K. & Nurmi, J. E. (2017). *Mikä meitä liikuttaa: Motivaatiopsykologian perusteet*. PS-kustannus.
- Tall, D. (2004). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 23(3), 29–33.
- Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse: Swets & Zeitlinger.
- Viljaranta, J. (2017). Odotusarvoteoria: odotusten ja arvostusten vaikutus oppimismotivaatioon. Teoksessa Salmela-Aro, K. & Nurmi, J. E. (toim.), *Mikä meitä liikuttaa: Motivaatiopsykologian perusteet* (s. 69–79). PS-kustannus.
- Viljaranta, J. & Tuominen, H. (2018). Oppiaineiden arvostukset: tärkeää, hyödyllistä, kiinnostavaa vai kuormittavaa? Teoksessa K. Salmela-Aro (toim.), *Motivaatio ja oppiminen* (s. 101–119). PS-kustannus.

- Wigfield, A., & Eccles, J. S. (2000). Expectancy-value theory of achievement motivation. *Contemporary Educational Psychology*, 25(1), 68–81. <https://doi.org/10.1006/ceps.1999.1015>
- Wigfield, A., Eccles, J. S., Schiefele, U., Roeser, R. W., & Davis-Kean, P. (2006). Development of Achievement Motivation. Teoksessa N. Eisenberg, W. Damon, & R. M. Lerner (toim.), *Handbook of child psychology: Social, emotional, and personality development* (s. 933–1002). John Wiley & Sons, Inc.