Eräs stabiilin väestön ja Eilert Sundtin lain matemaattinen tulkinta[1]

Fil. kand. HEIKKI LAUTKARI
Tilastollinen päätoimisto

1. Demografinen tausta[2]

1.1. *Kuolleisuus- ja eloonjäämistaulu*

Demografisen mittauksen ehkä suurimmat ponnistelut on suoritettu kuolleisuuden tutkimisessa. Tämä oli ensimmäinen demografian ala, joka joutui perusteellisen analyysin kohteeksi ja on löytänyt kaupallisia sovelluksia vakuutusalalla.

Kuolleisuutta esitetään perinteellisesti *kuolleisuus-* ja *eloonjäämistaululla,* joka lasketaan jollakin aikavälillä (usein 5 tai 10 vuotta) todetun kuolleisuuden perusteella. Tarkkuutensa ja selvyytensä perusteella se on eräs havainnollisimmista väestöilmiöiden mittaamiskeinoista. Sillä on tärkeä merkitys muussakin kuin kuolleisuuden tutkimisessa.

Kuolleisuus- ja eloonjäämistaulu on asteittain kuolemantapausten johdosta pienenevä hypoteettisen ihmisryhmän eli hypoteettisen *kohortin* elämäntarina. Taulu alkaa jokaisen jäsenen syntymästä ja jatkuu, kunnes kaikki jäsenet ovat kuolleet. Kohortti on sellainen kuviteltu joukko samanikäisiä henkilöitä, joka noudattaa seuraavia yksinkertaistavia olettamuksia:

a. Kohorttiin ei muuta uusia jäseniä sen ulkopuolelta, eikä kohortista muuta jäseniä sen ulkopuolelle. Ainoat jäsenmäärän muutokset aiheutuvat kuolemantapauksista. Kohortti muodostaa siis *suljetun* väestön.

b. Ihmiset kuolevat kussakin iässä ennakolta määrätyn ja muuttumattoman *kaavion* mukaan.

c. Kohortti saa alkunsa *normeeratusta syntyneiden määrästä* (aina jokin tasaluku, kuten 1 000, 10 000 tai 100 000), jota kutsutaan taulun *juureksi.* Tämä normeeraus tekee mahdolliseksi vertailun erilaisten kuol-

---

[1] Esitys on referaatti tekijän matemaattisluontoisesta tilastotieteen laudatur-tutkielmasta. Aiheen olen saanut prof. *G. Elfvingiltä,* jolta myös olen saanut arvokkaita neuvoja työn kuluessa.

[2] Kohdat 1.1., 1.2. A ja 1.2 B. perustuvat pääasiassa *Barclay'n* teokseen Techniques of Population Analysis (Princeton, N.J., 1958).

leisuus- ja eloonjäämistaulujen välillä. Myös syntyneistä määrätyssä iässä elossa olevien suhteellinen osuus ilmenee yhdellä silmäyksellä itse taulusta. Jos esimerkiksi 10 000 jäsenen kohortista 5 420 oli elossa 67 vuoden iässä, merkitsee se, että täsmälleen 54.2 % saavutti mainitun iän.

d. Joka iässä (lukuun ottamatta ensimmäisiä elinvuosia) kuolemantapaukset ovat *tasaisesti jakautuneet kahden peräkkäisen syntymäpäivän välille.* Toisin sanoen puolet odotetuista kuolemantapauksista esimerkiksi 9 ja 10 vuoden välillä tapahtuu ennen 9.5 vuoden ikää.

e. Kohortti sisältää tavallisesti *vain yhden sukupuolen jäseniä.* On mahdollista konstruoida molempien sukupuolien yhteinen taulu, mutta ero naisten ja miesten kuolleisuuden välillä on useimmissa ikäluokissa niin huomattava, että erillinen käsittely on perusteltua.

1.2. Kuolleisuus- ja eloonjäämistauluun perustuvia hypoteettisia malleja

1.2.A. Stationäärinen väestö

Kohdassa 1.1. kuolleisuus- ja eloonjäämistaulu määriteltiin samana ajanjaksona syntyneiden ihmisten hypoteettisena kohorttina, joka menettää ennakolta määrätyn osan väestöstään kussakin iässä. Siitä ilmenee vakiomäärästä (esim. 100 000) syntyneitä kussakin tarkassa iässä x elossa olevien kohortin jäsenten lukumäärä l_x. Soveltamalla olettamusta d kohdan 1.1. lopussa, saadaan laskemalla kahden peräkkäisen l_x-luvun keskiarvo ($L_x = \dfrac{l_x + l_{x+1}}{2}$, paitsi ensimmäisille ikävuosille, jolloin kaava on hieman toisenlainen) x ja (x + 1) vuoden iän välillä elossa olevien kohorttiin kuuluvien henkilöiden keskimääräinen lukumäärä. Suorittamalla tämä laskelma kaikille 1-vuotisikäväleille saadaan taulukko, joka muistuttaa jonakin vuonna suoritetusta väestölaskennasta saatua väestön ikäryhmitystä. Saraketta L_x voidaan siten yhtä hyvin pitää erään määrätyn ajankohdan väestönä kuin kohorttina, jota seurataan peräkkäin kussakin iässä.

Tarkastelemme seuraavassa toisin sanoen hypoteettista väestöä, jossa vallitsee kuolleisuus- ja eloonjäämistauluissa esitetty kuolleisuus, ja jonka ikäjakautuma ja syntyneisyys tietyllä alkuajankohdalla ovat sellaiset, että yhdessä vuodessa syntyy tasan kuolleisuus- ja eloonjäämistaulun edellyttämä yksilölukumäärä (esim. 100 000). Jokainen tämän väestön vuosiluokka tulee olemaan kohortti, joka ajan kuluessa pienenee taulukon ilmoittamalla tavalla, ja jokaisella ajankohdalla tulevat eri ikäluokat olemaan kuolleisuus- ja eloonjäämistaulun lukujen mukaiset. Tällaista suljettua väestöä sanotaan *stationääriseksi väestöksi* eli *vakioväestöksi*; kuolleisuus- ja eloonjäämistaulun sarake L_x on samalla stationäärisen väestön ikäjakautumataulukko.[1] Tähdennämme vielä, että stationäärinen väestö edellyttää syntyneisyyden olevan kuolleisuuden kanssa tasapainossa.

1.2.B. Stabiili väestö

Stationäärisessä väestössä jokainen kohortti alkaa samasta syntyneiden määrästä (100 000 tai yleisesti l_0 kuolleisuus- ja eloonjäämistaulussa). Jos sen sijaan syntyneiden määrän oletetaan *kasvavan tai vähenevän* kohortista toiseen vakioprosentin verran, saadaan ns. *stabiili väestö*[2]. Tällöin tarkalleen x-vuotiaiden määrä väestössä on $l_x\varrho^{-x}$, missä ϱ on kasvu- tai vähenemiskerroin. Jos syntyneiden määrä kasvaa kohortista toiseen ($\varrho > 1$), saadaan ns. *progressiivinen väestö,* jos se taas pienenee ($\varrho < 1$), saadaan ns. *regressiivinen väestö.* Stationäärinen väestö on itse asiassa stabiili väestö ϱ:n arvolla 1.

Kasvu- tai vähenemiskerroin voidaan, kuten kohdassa 3.2. tulemme näkemään, kullakin ajankohdalla määrätä todellisen väestön syntyneisyyden ja kuolleisuuden perusteella, ja näin saadun ϱ:n arvon sekä kuolleisuus- ja eloonjäämistaulun perusteella voidaan laskemalla «konstruoida« stabiili väestö, joka parhaalla mahdollisella tavalla liittyy todellisen väestön kehitystendenssiin tarkasteltuna ajankohtana.

Stabiili väestö vaikuttaa sellaisenaan määriteltynä enemmän tai vähemmän keinotekoiselta mallilta. Se saa kuitenkin luonnollisen sisällön, kun kohdassa 2 osoitamme, että se on *odotettu rajamuoto,* jota *jokainen* suljettu[3] naispuolinen väestö rajattomasti lähenee, jos sen hedelmällisyys ja kuolleisuus ikäluokittain pysyy samansuuruisena. Korostettakoon jo tässä yhteydessä, että seuraavassa esitettävää teoriaa voidaan, tarvittaessa modifikatioin, soveltaa myös muihin biologisiin väestöihin tai jopa epäorgaanisiin populaatioihin.

1.3. Eilert Sundtin laki

Monista väestönkehitystä koskevista teorioista, joita väestöteorian historian aikana on esitetty, on luonteeltaan ehkä kaikkein matemaattisin *Eilert Sundtin laki,* joskin sen ensimmäinen keksijä norjalainen pappi ja yhteiskuntaolojen tutkija *Eilert Sundt* († 1875) esitti sen täysin empiirisenä havaintona. Ruotsissa ja Suomessa ovat vastaavia tutkimuksia suorittaneet mm. *Sundbärg* (1907) ja *O. K. Kilpi* (1913). Lisäksi on mainittava saksalainen *Lösch* (1936). «Selvitellessään syitä siihen, miksi Norjassa 1840-

---

[1] Seuraavassa emme enää palaa l_x:n ja L_x:n väliseen yhteyteen, vaan puhumme ainoastaan l_x:stä tai sen teoreettisesta vastineesta r_x.

[2] Tämäkin yleisempi väestö on suljettu, koska sen muutokset perustuvat vain uusien jäsenten syntymiseen ja vanhojen kuolemiseen.

[3] Kun seuraavassa esityksessämme puhumme väestöstä, tarkoitamme ilman muuta, että se myös on suljettu.

luvulla solmittiin poikkeuksellisen paljon avioliittoja, Sundt huomasi, että noin kolmisenkymmentä vuotta aikaisemmin avioliittojen luku niinikään oli ollut huomattavan suuri ja siitä johtuen syntyneisyyskin korkea. Näiden huomioittensa nojalla Sundt päätteli, että suurinta syntyvyyttä edustavilta ajanjaksoilta peräisin olevat ikäpolvet säilyvät väestössä suhteellisen väkirikkaina ikäkaudesta toiseen, samoin kuin alhaisilta syntyvyyskausilta lähtevät ikäpolvet pysyvät vajaväkisinä halki elämän. Tullessaan avioliittoikään väkirikkaat ikäpolvet saattavat antaa aiheen uuteen avioliittojen ja syntyvyyden nousukauteen, vajaväkiset polvet taas vastaavaan laskukauteen. Tätä demografisten jaksojen toistumista on sittemmin nimitetty Eilert Sundtin laiksi.« (*Lento,* 1955, s. 54—55.)

Yleispätevää matemaattista tulkintaa Eilert Sundtin laille lienee vaikeaa esittää. Sen sijaan voidaan — kuten kohdasta 3.2. ilmenee — siinä yksinkertaisessa epärealistisessa erikoistapauksessa, että annettu naispuolinen lähtöväestö kehittyy kiinteiden ikäluokittaisten hedelmällisyys- ja kuolleisuuslukujen mukaan, osoittaa, että lähtöväestön ikäluokittaiset poikkeamat stabiilista väestöstä aiheuttavat lyhyellä tähtäimellä likimääräisesti jaksollista ja vaimenevaa poikkeamaa syntyneiden odotetun lukumäärän stabiilista kasvulaista.

2. Matemaattinen teoria [1]

2.1. *Tarvittavien muuttujien ja parametrien määrittely*

Kuten kohdan 1.2.B. lopussa huomautimme, voidaan esillä olevaa matemaattista teoriaa sopivin modifikaatioin soveltaa jonkun biologisen väestön uutta väestöä synnyttävän osan muutoksiin. Ottaen huomioon sovellutuksen kohdassa 3.2. sovimme kuitenkin ja tässä vaiheessa, että seuraavissa määritelmissä on kysymyksessä naispuolinen ihmisväestö ja siitä syntyvä uusi naispuolinen ihmisväestö sekä että riittävän suuri miespuolinen väestö on olemassa. Aikayksikkönä käytämme normaalin demografisen käytännön mukaan yhtä vuotta.

Asetamme seuraavat määritelmät:

2.1.1. $v_k\ (o) =$ k-vuotiaiden [2] lukumäärä ensimmäisen kalenterivuoden alussa ($0 \leqq k \leqq \omega$, missä ω on korkein ikä, minkä väestöön kuuluva nainen voi saavuttaa)

---

[1] Esitettävä stabiilin väestön teoria on jo vanhastaan tunnettu. *A. J. Lotka* on hieman toisin kuin kirjoittaja käsitellyt sitä artikkeleissaan. Sitäpaitsi on maassamme prof. *Leo Törnqvist* käsitellyt tähän aihepiiriin liittyvien väestötilastollisten laskelmien teoriaa yleisemmässä muodossa.

[2] Iällä k vuotta tarkoitetaan ikää ½ vuotta k:nnen syntymäpäivän molemmin puolin (poikkeus: Ikä 0 vuotta, jolla tarkoitetaan ikää syntymähetken ja ½ vuoden iän välillä).

2.1.2. v_k (n) = k-vuotiaiden odotettu lukumäärä kalenterivuoden n lopussa

2.1.3. b_n = alkuperäiseen väestöön kuuluville äideille kalenterivuonna n syntyneiden odotettu lukumäärä

2.1.4. u_n = kaikkien kalenterivuonna n syntyneiden odotettu lukumäärä

2.1.5. β_k = todennäköisyys sille, että k-vuotias nainen saa tyttölapsen

2.1.6. a_i = todennäköisyys syntymähetkellä sille, että nainen kuolee i-vuotiaana

2.1.7. $r_k = \sum_{i=k+1}^{\omega} a_i$ = todennäköisyys syntymähetkellä sille, että nainen on elossa k-vuotiaana

2.1.8. $c_k = r_k \beta_k$ = todennäköisyys syntymähetkellä saada tyttölapsi k-vuoden iässä

Esitetyt määritelmät vaikuttavat (määritelmiä 2.1.1.—4. lukuunottamatta) hieman monimutkaisilta. Näillä kaikilla on kuitenkin demografiassa yleisesti tunnetut vastineet. Niinpä β_k vastaa k-vuotiaiden *bruttoerikoishedelmällisyyslukua,* a_i *kuolemanvaaralukua,* r_k *k-vuotiaana elossa olevien lukua* kuolleisuus- ja eloonjäämistaulun mukaan, c_k *netto-erikoishedelmällisyyslukua.*

2.2. Syntyneiden odotusarvon asymptoottinen suhtautuminen. Väestön ikäjakautuman stabiilin rajamuodon olemassaolo ja pysyvyys

Tekemällä määrättyjä olettamuksia voidaan todennäköisyyslaskennan avulla johtaa seuraava palautusyhtälö kalenterivuonna n syntyneiden odotetulle lukumäärälle u_n:

2.2.1. $u_n = b_n + \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu c_{n-\nu}$, missä

2.2.2. $b_n = \sum_{k=0}^{\omega} v_k(0) \dfrac{c_{k+n}}{r_k}$

Lähempi tarkastelu osoittaa, että viimeksi esitetyt yhtälöt vastaavat täysin väestöprognoosissa tavallisimmin käytettyä laskumenettelyä, kun oletetaan ikäluokittaisten syntyneisyys- ja kuolleisuuslukujen pysyvän samansuuruisina ennustekaudella.

Niin ikään voidaan johtaa seuraavat yhtälöt, joiden avulla määräytyy k-vuotiaiden odotettu lukumäärä $v_k(n)$ kalenterivuoden n lopussa.

2.2.3. $v_k(n) = u_{n-k}\, r_k \quad (k < n)$

2.2.4. $v_k(n) = v_k(0) \dfrac{r_k}{r_{k-n}} \quad (k \geq n)$

Yhtälö 2.2.3. edustaa ennustekaudella syntyneistä kalenterivuoden n lopussa elossa olevien lukua, yhtälö 2.2.4. alkuperäiseen väestöön kuuluvien vastaavaa lukua.

Pitäen yhtälöitä 2.2.1.—4. lähtökohtana voidaan oleellisesti todennäköisyyslaskennan emäfunktiomenetelmää käyttäen todistaa oikeiksi seuraavat perustavaa laatua olevat lauseet:

Lause 1

Väestön ikäjakautuma

$$v_0(o),\ v_1(o),\ v_2(o),\ \ldots\ldots,\ v_\omega(o)$$

määrätyn lähtövuoden alussa, hedelmällisyysluvut[1] c_m, c_{m+1}, ..., c_{m+p}[2] ja eloonjäämisluvut r_0, r_1, ..., r_ω olkoot annetut. Oletamme, että seuraavina kalenterivuosina syntyneiden ja kuolleiden odotetut lukumäärät määräytyvät lähtöväestön ikäjakautuman ja annettujen hedelmällisyys- sekä eloonjäämislukujen mukaan. Jos ajattelemme näin määritellyn väestön kehitysprosessin jatketuksi äärettömiin (n kasvaa rajatta), lähenee lauseke $\dfrac{u_n}{\varrho^n}$ vakiota C ja lauseke $\dfrac{v_k(n)}{\varrho^n}$ lauseketta $Cr_k\varrho^{-k}$, missä C on lähtöväestön ikäjakautuman ja annettujen hedelmällisyys- sekä eloonjäämislukujen yksikäsitteisesti määräämä vakio. Tämä saadaan yhtälöstä

$$2.2.5.\quad C = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\varrho^{-n}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n\varrho^{-n}},$$

missä $\dfrac{1}{\varrho}$ on yhtälön

$$2.2.6.\quad C(s) = c_m s^m + c_{m+1}s^{m+1} + \ldots\ldots + c_{m+p}s^{m+p} = 1$$

pienin positiivinen juuri.[3]

Lause 2

Väestön ikäjakautuma määrätyn lähtövuoden alussa olkoon stabiili

$$2.2.7.\quad Cr_0,\ Cr_1\varrho^{-1},\ Cr_2\varrho^{-2},\ \ldots\ldots\ldots,\ Cr_\omega\varrho^{-\omega},$$

missä C kuten seuraavassakin on vakio ja ϱ määritelty kuten lauseessa 1. Siinä esiintyvät hedelmällisyysluvut c_m, c_{m+1}, ..., c_{m+p} ja eloonjäämisluvut r_0, r_1, ..., r_ω olkoot annetut. Oletamme, että seuraavina kalenterivuosina syntyneiden ja kuol-

[1] Oikeastaan tässä pitäisi puhua vastaavista todennäköisyyksistä, mutta sovellutusten kannalta on mukavampi käyttää demografista terminologiaa.

[2] Matemaattinen teoria vaatii lisäksi, että lukujono c_m, ..., c_{m+p}, missä m on alhaisin ja m+p korkein hedelmällinen ikävuosi, on *jaksoton*. Tällä teoreettisella ehdolla ei kuitenkaan kohdassa 3.2. esitettävän sovellutuksen kannalta ole mitään merkitystä.

[3] ϱ on Lotkan määrittelemä *luonnollisen kasvun vakio*. Koska yhtälön 2.2.6. vasempana puolena esiintyvä polynomi C(s) s:n arvolla 1 on sama kuin muodollisesta demografiasta tunnettu nettouusiutumisluku, on $\varrho \gtreqless 1$ riippuen siitä, onko nettouusiutumisluku $\gtreqless 1$ (samat merkit epäyhtälöissä voimassa yht'aikaa).

leiden odotetut lukumäärät määräytyvät lähtöväestön ikäjakautuman ja annettujen hedelmällisyys- sekä eloonjäämislukujen mukaan. Tällöin tulee u_n olemaan tarkkaan yhtäkuin lauseke $C\varrho^n$, ja väestön ikäjakautuma vuoden n lopussa tulee pysymään stabiilina ja yhtäkuin

2.2.8. $Cr_0\varrho^n, Cr_1\varrho^{n-1}, \ldots\ldots\ldots, Cr_\omega\varrho^{n-\omega}$.

Lause 1 ilmaisee lyhyesti sanottuna sen tosiseikan, että väestön ikäjakautuma hedelmällisyys- ja eloonjäämislukujen pysyessä muuttumattomina lähenee rajamuotoa, joka on riippumaton lähtöväestön ikäjakautumasta.[1] (Vakio C on yhteisenä tekijänä kaikissa luvuissa $Cr_k\varrho^{-k}$, eikä siis vaikuta ikäluokkien keskinäisiin suhdelukuihin).

Sitäpaitsi lauseesta 1 ilmenee, että lauseke $\frac{u_n}{\varrho^n}$ yllämainituilla edellytyksillä lähestyy vakiota C.

Tästä ei kuitenkaan, kuten luonnolliselta tuntuisi, välttämättä seuraa, että u_n lähestyisi lauseketta $C\varrho^n$. Tämä ilmenee seuraavasta lyhyestä teoreettisesta tarkastelusta.

Lauseessa esitetyn väitteen tarkka matemaattinen ilmaisu on seuraava:

Olipa ε miten pieni positiivinen kokonaisluku tahansa, on aina olemassa sellainen kokonaisluku n_ε, että

2.2.9. $\left| \frac{u_n}{\varrho^n} - C \right| < \varepsilon$, kun $n > n_\varepsilon$, mistä välittömästi seuraa:

$$-\varepsilon < \frac{u_n}{\varrho^n} - C < \varepsilon, \quad C - \varepsilon < \frac{u_n}{\varrho^n} < C + \varepsilon,$$

2.2.10. $C\varrho^n - \varepsilon\varrho^n < u_n < C\varrho^n + \varepsilon\varrho^n$.

Epäyhtälön 2.2.10. mukaan u_n jatkuvasti poikkeaa lausekkeesta $C\varrho^n$ korkeintaan $\varepsilon\varrho^n$:n verran. Tämän poikkeaman ei välttämättä tarvitse lähestyä nollaa, koska ε voi tulla miten pieneksi, mutta ϱ^n miten suureksi tahansa.[2]

Lauseen 2 mukaan stabiili rajamuoto on *pysyvä*, ts. jos lähtöväestön ikäjakautuma on stabiili, se myös pysyy stabiilina, jos hedelmällisyys- ja eloonjäämisluvut pysyvät muuttumattomina. Niin ikään syntyneiden odotettu lukumäärä kasvaa jatkuvasti tarkkaan stabiilin kasvulain $C\varrho^n$ mukaan.

---

[1] Tämä on esimerkki todennäköisyyslaskennassa tunnetusta stokastisesta prosessista.

[2] Itse asiassa ε ja ϱ^n riippuvat lähtöväestöstä $\{v_k(o)\}$, lukujonoista $\{c_k\}$ ja $\{r_k\}$ sekä n:stä.

3. Matemaattisen teorian sovellutus

3.1. Lauseista 1 ja 2 tehtäviä johtopäätöksiä
Miten lähtöjakautuman ikäluokittaiset poikkeamat stabiilista ikäjakautumasta vaikuttavat odotetun syntyneisyyden poikkeamaan stabiilista kasvulaista $C\varrho^n$

Lauseet 1 ja 2 ilmaisevat matemaattisen väestömallimme kaksi oleellista ominaisuutta, odotetun ikäjakautuman *stabiilin rajamuodon olemassaolon* ja odotetun ikäjakautuman *säilymisen stabiilina* kuluneesta ajasta riippumatta, mikäli se alunperin on stabiili. Tätä taustaa vastaan herää luonnollinen kysymys: Kuinka nopeata ja minkä luonteista on lauseessa 1 mainittu asymptoottinen lähestyminen stabiilia rajamuotoa kohti, ts. kuinka nopeasti ja miten lähestyy k-vuotiaiden odotettu lukumäärä $v_k(n)$ lauseketta $Cr_k\varrho^{n-k}$ ja odotettu syntyneisyys u_n stabiilia kasvulakia $C\varrho^n$, kun n kasvaa rajatta? Rajoitumme seuraavassa jälkimmäisen kysymyksen tarkasteluun.

Jotta voisimme käyttää hyväksi lausetta 2 jaamme k-vuotiaiden lukumäärän mielivaltaisessa lähtöjakautumassa $\{v_k(o)\}$ kahteen osaan, stabiiliin osaan $Cr_k\varrho^{n-k}$ ja poikkeamaosaan δ_k, missä C on lauseessa 1 määritelty vakio:

3.1.1. $v_k(o) = Cr_k\varrho^{n-k} + \delta_k$

Syntyneiden odotettu lukumäärä u_n jakautuu vastaavasti stabiiliin osaan $C\varrho^n$ ja poikkeamaosaan $\triangle u_n$. Siis

3.1.2. $u_n = C\varrho^n + \triangle u_n$[1], mistä seuraa

3.1.3. $\Delta u_n = u_n - C\varrho^n$

Matemaattisesta teoriastamme voidaan johtaa seuraava esitysmuoto u_n:lle:

3.1.4. $u_n = \sum_{k=o}^{\omega} \frac{v_k(o)}{r_k} \cdot P_k^n$, missä

suureet P_k^n määräytyvät rekursiivisesti yhtälöistä

[1] $\triangle u_n$ on sama kuin $\varepsilon\varrho^n$ lauseeseen 1 liittyvässä petiitillä painetussa teoreettisessa tarkastelussa.

$$P^1_k = c_{k+1}$$

$$P^2_k = c_{k+2} + c_1 P^1_k$$

$$3.1.5. \quad P^3_k = c_{k+3} + c_2 P^1_k + c_1 P^2_k$$

$$P^n_k = c_{k+n} + c_{n-1} P^1_k + c_{n-2} P^2_k + \ldots\ldots + c_1 P^{n-1}_k$$

Yhtälöistä 3.1.3., 3.1.4. ja 3.1.5. seuraa, että mille tahansa empiirisesti annetulle lähtöjakautumalle $\{v_k(o)\}$ sekä hedelmällisyyslukujonolle $\{c_k\}$ ja eloonjäämislukujonolle $\{r_k\}$ voidaan laskea odotettu syntyneiden lukumäärä u_n ja syntyneisyyspoikkeama $\triangle u_n$. Kun lisäksi jokaisella n:n arvolla on olemassa omat c_k-polynominsa P^n_k, jotka voidaan etukäteen laskea valmiiksi, on mahdollista määrätä u_n ja $\triangle u_n$ millä n:n arvoväleillä tahansa (esim. vaikka suoraan n:n arvolle 50).

Kohdassa 3.2. sovellamme yhtälöitä 3.1.3., 3.1.4. ja 3.1.5. Suomen naispuoliseen väestöön 31/12 1955.

3.2. *Suomessa syntyvien tyttölasten odotettu ja stabiilin kasvulain mukainen lukumäärä sekä syntyneisyyspoikkeama v. 1960—2005.*

Kuten aikaisemmin esityksen kuluessa on todettu, on luvuilla r_k, β_k ja c_k tunnetut demografiset vastineet:

$$3.2.1. \quad r_k = \frac{\text{naisten eloonjäämisluku } l_k{}^{1}}{\text{juuri } l_o}$$

$$3.2.2. \quad \beta_k = \frac{\text{k-vuotiaille naisille n-vuotiskautena syntyneiden tyttölasten luku}}{\text{n} \cdot \text{(k-vuotiaitten naisten keskiväkiluku n-vuotiskautena)}} =$$

$$= \text{naisten brutto-erikoishedelmällisyysluku}$$

$$3.2.3. \quad c_k = \text{naisten netto-erikoishedelmällisyysluku}$$

Taulussa 1 esitetään maamme naispuolisen 0—49-vuotiaan väestön ikäjakautuma 31/12 1955 $\{v_k\ (o)\}$ sekä vuosien 1951—55 syntyneisyyteen ja kuolleisuuteen perustuvat r_k-, β_k-[2] ja c_k-luvut.

---

[1] Tämä vastaavaisuus ei ole aivan tarkka, koska l_k on *tarkassa* iässä k elossa olevien luku, kun taas r_k tarkoittaa todennäköisyyttä olla elossa iässä, joka on ½ *vuotta k:nnen syntymäpäivän molemmin puolin.* (Vrt. määritelmiä kohdan 2.1. alussa). Kuitenkin lienevät ylläesitetyt r_k:n ja β_k:n estimaatit riittävän tarkkoja odotetun syntyneisyyden kehityssuunnan määräämiseen.

[2] Perusparametri β_k on laskettu yhtälöstä 3.2.2. käyttämällä n:n arvoa 5 (5-vuotiskausi).

Taulu 1. Perusparametrit $v_k(o)$, r_k, β_k ja c_k.
Table 1. The primary parameters $v_k(o)$, r_k, β_k and c_k.

k	$v_k(o)$	r_k	β_k	c_k
0	42749	1.00000	—	—
1	42892	0.97175	—	—
2	42822	0.96899	—	—
3	44331	0.96763	—	—
4	43516	0.96657	—	—
5	46160	0.96578	—	—
6	48047	0.96506	—	—
7	49977	0.96449	—	—
8	49880	0.96400	—	—
9	49225	0.96353	—	—
10	44206	0.96313	—	—
11	35941	0.96275	—	—
12	34242	0.96234	—	—
13	28223	0.96183	—	—
14	40585	0.96133	—	—
15	29611	0.96082	0.0000369506	0.000035503
16	34981	0.96028	0.000759042	0.000728890
17	33672	0.95968	0.005462310	0.005242100
18	32022	0.95898	0.017420600	0.016706000
19	30809	0.95808	0.033621500	0.032212000
20	30780	0.95721	0.050360900	0.048206000
21	30038	0.95620	0.064125000	0.061316000
22	28407	0.95514	0.076112000	0.072698000
23	30369	0.95415	0.082058800	0.078296000
24	30869	0.95293	0.084083700	0.080126000
25	32564	0.95183	0.083228100	0.079219000
26	32202	0.95072	0.081860800	0.077770000
27	31927	0.94948	0.079066500	0.075072000
28	30918	0.94818	0.074307700	0.070457000
29	31060	0.94669	0.070298800	0.066551000
30	31829	0.94517	0.068213100	0.064473000
31	31205	0.94365	0.062850100	0.059308000
32	32129	0.94214	0.058823900	0.055420000
33	30943	0.94049	0.054049700	0.050833000
34	31868	0.93881	0.051440800	0.048293000
35	32597	0.93697	0.046576900	0.043641000
36	24057	0.93512	0.042313800	0.039568000
37	28729	0.93318	0.038994300	0.036389000
38	28420	0.93108	0.033987900	0.031645000
39	27597	0.92891	0.030472100	0.028306000
40	28603	0.92681	0.026560800	0.024617000
41	29895	0.92463	0.021009900	0.019426000
42	29785	0.92192	0.017023300	0.015694000
43	31071	0.91938	0.011662500	0.010722000
44	30474	0.91665	0.007404630	0.006787500
45	30705	0.91374	0.004345840	0.003971000
46	30869	0.91058	0.002189460	0.001993700
47	29684	0.90683	0.001150500	0.001043300
48	29710	0.90308	0.001103690	0.000996720
49	28616	0.89908	0.000182786	0.000164340

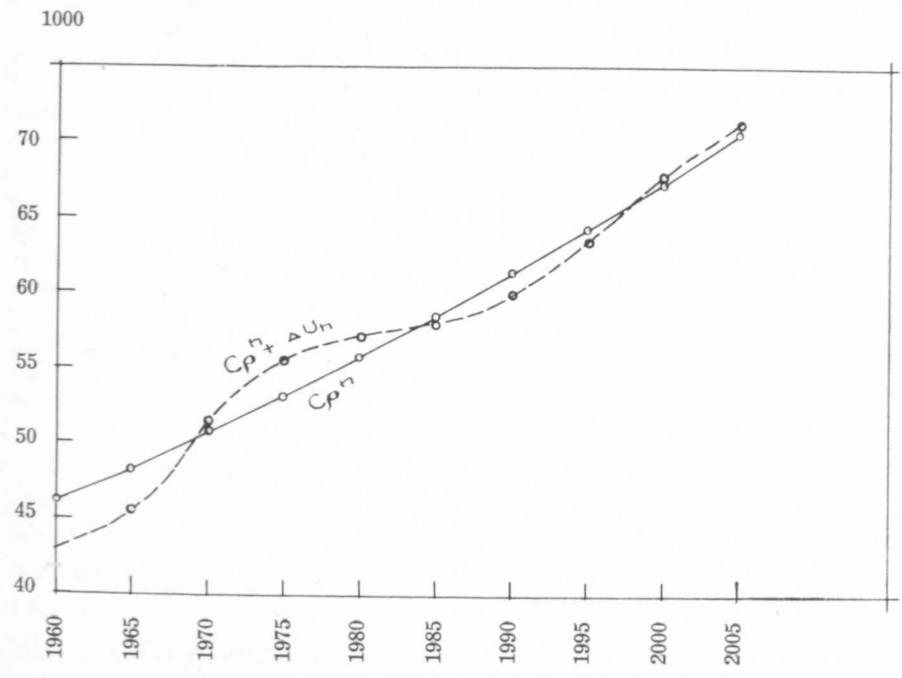
Taulu 2. Syntyneiden odotetun lukumäärän u_n määrääminen.
Table 2. The determination of the expected number of births u_n.

k	$v_k(o)/r_k$	$v_k(o)/r_k \times P_k^{5}$	$v_k(o)/r_k \times P_k^{10}$	$v_k(o)/r_k \times P_k^{15}$	$v_k(o)/r_k \times P_k^{20}$	$v_k(o)/r_k \times P_k^{25}$	$v_k(o)/r_k \times P_k^{30}$	$v_k(o)/r_k \times P_k^{35}$	$v_k(o)/r_k \times P_k^{40}$	$v_k(o)/r_k \times P_k^{45}$	$v_k(o)/r_k \times P_k^{50}$
0	42 749	—	—	2	2 061	3 387	2 756	1 875	1 465	1 760	2 625
1	44 139	—	—	32	2 706	3 433	2 618	1 777	1 483	1 985	2 848
2	44 192	—	—	231	3 213	3 318	2 449	1 682	1 552	2 184	2 963
3	45 814	—	—	766	3 587	3 227	2 329	1 606	1 646	2 486	3 160
4	45 021	—	—	1 450	3 608	2 996	2 177	1 546	1 710	2 602	3 165
5	47 795	—	2	2 304	3 787	3 081	2 097	1 638	1 968	2 934	3 397
6	49 787	—	36	3 053	3 872	2 953	2 004	1 672	2 239	3 212	3 552
7	51 817	—	272	3 767	3 890	2 872	1 972	1 821	2 561	3 474	3 688
8	51 743	—	864	4 051	3 645	2 631	1 813	1 859	2 808	3 568	3 652
9	51 088	—	1 646	4 093	3 400	2 470	1 754	1 941	2 953	3 592	3 561
10	45 898	2	2 213	3 636	2 959	2 013	1 573	1 890	2 818	3 262	3 145
11	37 332	27	2 289	2 903	2 214	1 503	1 255	1 679	2 409	2 663	2 507
12	35 582	186	2 586	2 672	1 972	1 354	1 250	1 758	2 386	2 532	2 337
13	29 343	490	2 298	2 068	1 492	1 028	1 054	1 593	2 024	2 071	1 882
14	42 218	1 360	3 383	2 810	2 041	1 450	1 604	2 440	2 968	2 942	2 645
15	30 819	1 485	2 442	1 987	1 352	1 056	1 269	1 892	2 191	2 112	1 890
16	36 428	2 234	2 832	2 161	1 465	1 222	1 636	2 349	2 598	2 445	2 196
17	35 087	2 551	2 634	1 944	1 325	1 216	1 720	2 343	2 489	2 296	2 081
18	33 392	2 614	2 352	1 698	1 130	1 140	1 764	2 270	2 332	2 110	1 937
19	32 157	2 577	2 140	1 553	1 007	1 083	1 749	2 187	2 180	1 938	1 807
20	32 156	2 547	2 073	1 403	909	1 067	1 773	2 149	2 089	1 825	1 728
21	31 414	2 443	1 863	1 243	740	1 017	1 721	2 032	1 932	1 659	1 593
22	29 741	2 233	1 648	1 083	596	937	1 587	1 837	1 707	1 442	1 404
23	31 828	2 243	1 618	1 007	480	982	1 631	1 856	1 684	1 401	1 384
24	32 394	2 155	1 565	917	359	939	1 577	1 768	1 565	1 286	1 289
25	34 212	2 205	1 493	843	278	942	1 573	1 734	1 494	1 215	1 238
26	33 871	2 009	1 340	658	203	885	1 458	1 578	1 323	1 068	1 109
27	33 626	1 863	1 224	528	161	826	1 347	1 427	1 165	936	990
28	32 608	1 658	1 031	350	149	752	1 211	1 250	993	797	862
29	32 809	1 584	928	223	117	708	1 121	1 124	873	701	775
30	33 675	1 470	829	133	106	671	1 046	1 016	772	623	705
31	33 068	1 309	642	66	96	608	927	869	649	527	611
32	34 102	1 241	535	36	92	574	852	772	567	464	553
33	32 901	1 041	353	33	83	505	723	632	458	381	465
34	33 945	961	230	5	78	467	642	543	390	328	411
35	34 790	856	138	—	72	424	556	458	326	279	359
36	25 726	499	51	—	48	273	340	273	192	168	222
37	30 786	483	32	—	50	276	326	256	180	161	216
38	30 524	328	30	—	44	226	252	194	136	125	172
39	29 709	201	5	—	36	172	183	140	97	92	128
40	30 862	123	—	—	29	132	135	101	70	68	96
41	32 332	65	—	—	24	96	95	71	50	49	70
42	32 307	34	—	—	15	61	59	43	30	30	44
43	33 796	34	—	—	10	38	36	26	18	18	27
44	33 245	5	—	—	5	21	19	14	10	10	14
45	33 604	—	—	—	3	11	10	8	5	5	8
46	33 900	—	—	—	2	5	5	3	2	3	4
47	32 734	—	—	—	1	3	2	2	1	1	2
48	32 898	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
u_n		43 116	45 617	51 709	55 512	57 051	58 050	59 994	63 558	67 830	71 517

Taulu 3. Syntyneiden odotettu lukumäärä u_n, stabiilin kasvulain mukainen syntyneiden määrä $C\varrho^n$ ja syntyneisyyspoikkeama $\triangle u_n$.

Table 3. The expected number of births u_n, the number of births according to the stable law of growth $C\varrho^n$, and the birth deviation $\triangle u_n$.

n	u_n	$C\varrho^n$	$\triangle u_n$
5	43 116	46 215	— 3 099
10	45 617	48 442	— 2 825
15	51 709	50 775	+ 934
20	55 512	53 220	+ 2 292
25	57 051	55 783	+ 1 268
30	58 050	58 470	— 420
35	59 994	61 287	— 1 293
40	63 558	64 239	— 681
45	67 830	67 332	+ 498
50	71 517	70 575	+ 942



Kuvio 1. Suomessa v. 1960—2005 syntyvien tyttölasten odotettu (- - -) ja stabiilin kasvulain mukainen (——) lukumäärä.

Figure 1. The expected number of female births (- - -) and the number of female births according to the stable law of growth (——) in Finland during the years 1960—2005.

Tarvittavat P_k^n - ja ϱ^n-luvut on laskettu elektronilaskukoneilla[1] (IBM 1620 ja ESKO). Vakion C arvoksi on saatu yhtälöstä 2.2.5. 44 093, ϱ:n arvoksi 1.009452436. Luvut u_n, $C\varrho^n$ ja $\triangle u_n$ on laskettu n:n arvoilla 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, kuten *tauluista 2 ja 3* ilmenee [2].

Taulussa 3. esitetyt lopputulokset on havainnollistettu *kuviossa 1,* josta ilmenee, että syntyneisyyspoikkeama $\triangle u_n$ pienenee itseisarvoltaan lyhyellä tähtäimellä likimäärin vaimenevaa aaltoliikettä seuraten. Pidettäessä stabiilia väestöä normaaliolotilana, on positiivinen $\triangle u_n$ lähtöväestön runsasväkisestä (stabiilia suuremmasta) ikäpolvesta aiheutuva syntyneisyysylijäämä ja negatiivinen $\triangle u_n$ lähtöväestön vähäväkisestä (stabiilia pienemmästä) ikäpolvesta aiheutuva syntyneisyysalijäämä. Eilert Sundtin laki saa siis matemaattisen mallimme puitteissa seuraavan muodon: *Runsasväkisestä ikäpolvesta aiheutuva syntyneisyysylijäämä ja vähäväkisestä ikäpolvesta aiheutuva syntyneisyysalijäämä toistuu lyhyellä tähtäimellä likimäärin jaksollisesti mutta jatkuvasti vaimenevana.*

Yhtälöiden 3.1.3.—5. perusteella voidaan edellä empiirisesti todettu syntyneisyyspoikkeaman Δu_n vaimeneva jaksollisuus todistaa yleispätevästi siinä epärealistisessa erikoistapauksessa, että väestöön kuuluvilla naisilla on vain yksi hedelmällisyysikä m, ts. $c_m \neq 0$, $c_1 = c_2 = \ldots\ldots = c_{m-1} = c_{m+1} = c_{m+2} = \ldots\ldots = 0$.

Yhtälöistä 3.1.5. ja tehdyistä olettamuksista seuraa tällöin:

$$P^1_{m-1} = P^2_{m-2} = \ldots\ldots = P^m_o = c_m$$

$$P^{m+1}_{m-1} = P^{m+2}_{m-2} = \ldots\ldots = P^{2m}_o = c_m P^1_{m-1} = c^2_m$$

$$P^{2m+1}_{m-1} = P^{2m+2}_{m-2} = \ldots\ldots = P^{3m}_o = c_m P^{m+1}_{m-1} = c^3_m$$

ja yleisesti

$$3.2.4.\quad P^{(\mu-1)m+1}_{m-1} = P^{(\mu-1)m+2}_{m-2} = \ldots\ldots = P^{\mu m}_o = c_m P^{(\mu-2)m+1}_{m-1} = c^{\mu}_m$$

Yhtälön 3.1.4. mukaan on siis

$$u_{m-k} = \frac{v_k(o)}{r_k} c_m \qquad (0 \leq k \leq m-1;\ \mu \geq 1)$$

$$u_{2m-k} = \frac{v_k(o)}{r_k} c^2_m$$

---

[1] Myös tauluissa 2 ja 3 esiintyvät laskelmat (jopa mahdollisesti kuvion 1 piirtäminen) voidaan ohjelmoida elektronikoneille. Tässä tutkimuksessa on kuitenkin kustannusten rajoittamiseksi tyydytty käyttämään mainittuja koneita vain kaikkein raskaimpaan laskutyöhön (P^n_k - ja ϱ^n-lukujen määräämiseen.).

[2] Laskelmissa muodostuu huomattavia pyöristysvirheitä, mutta siitä huolimatta voitaneen lukuja taulussa 3 pitää *kehityssuuntaa* ilmaisevina.

ja yleisesti

$$3.2.5.\quad u_{\mu m-k} = \frac{v_k(o)}{r_k} c_m^{\mu}$$

Kasvutekijä ϱ on yhtälön $c_m s^m = 1$ (vrt. lause 1) pienimmän positiivisen juuren käänteisarvo, joten

$$\varrho = c_m^{\frac{1}{m}}$$

Stabiilin kasvulain lauseke saa siis tässä tapauksessa muodon

$$3.2.6.\quad C\varrho^{\mu m-k} = Cc_m^{\frac{\mu m-k}{m}} = Cc_m^{\mu-\frac{k}{m}}$$

Yhtälöiden 3.2.5., 3.2.6. ja 3.1.3. perusteella on vihdoin

$$\Delta u_{\mu m-k} = u_{\mu m-k} - C\varrho^{\mu m-k} =$$

$$= \frac{v_k(o)}{r_k} c_m^{\mu} - Cc_m^{\mu-\frac{k}{m}} =$$

$$= c_m^{\mu-\frac{k}{m}} \left(\frac{v_k(o)}{r_k} c_m^{\frac{k}{m}} - C \right).$$

Viimeksi saadusta lausekkeesta ilmenee, että kunkin kalenterivuoden syntyneisyyspoikkeamaan vaikuttaa vain yksi k-vuotiaiden ikäluokka. Kunkin ikäluokan aiheuttama syntyneisyyspoikkeama toistuu siis m vuoden jaksoin kerrottuna vaimennuskertoimella c_m.

Todistus yleiselle tapaukselle, jolloin on kyseessä hedelmällisyysikäväli m, m + 1, ..., m + p, on paljon mutkikkaampi. Mutta jos oletamme, että hedelmällisyys keskittyy läheisesti tietyn ikävuoden m ympärille, seuraa syntyneisyyspoikkeaman likimääräinen ja vaimeneva jaksollisuus lyhyellä tähtäimellä yleisessä tapauksessa erikoistapauksen todistuksesta. Tätä ei voi pitää tarkkana päättelynä, mutta väitteen oikeus tuntuu kuitenkin todennäköiseltä.

4. Lopputoteamuksia

Koska käytännössä hedelmällisyys ja kuolleisuus muuttuvat varsin nopeasti ajan mukana, ei esitetty matemaattinen väestömalli ole sopiva edes lähiajan syntyneisyyden ennustamiseen. Tulee lähinnä mieleen yrittää seuraavan tapaista menetelmää.[1] Koetetaan kuvailla perustavat lukujonot $\{a_i\}$ ja $\{\beta_j\}$ muutamien harvojen tunnuslukujen avulla; voimme ajatella esim. toiselta puolen kuoliniän keskiarvoa ja hajontaa, toiselta puolen lasten keskilukumäärää sekä synnytysiän keskiarvoa ja hajontaa. Stabiilissa mallissa ennustusarvot u_n ja $v_k(n)$ riippuvat lukujonoista $\{a_i\}$ ja $\{\beta_j\}$ ja ensisijassa — otaksuttavasti — niiden yllämainituista tunnusluvuista.

[1] Tämä idea on prof. Elfvingin esittämä.

Jos tunnuslukujen kehityssuunta on arvioitavissa, on myös tämän kehityksen vaikutus ennustusarvoihin laskettavissa. Näin voidaan mahdollisesti päästä realistisempaan syntyneisyyden ennustamiseen.

Toinen kohdassa 2 esitetyn väestömallin puute on, että satunnaisia poikkeamia hedelmällisyyden ja kuolleisuuden odotetusta kehityksestä ei ole otettu huomioon.[1] Todennäköisyyslaskennan pitemmälle kehitettyä teoriaa soveltamalla voidaan konstruoida satunnaispoikkeamat huomioon ottava malli, mutta se lienee käytännöllisten laskelmien kannalta liian monimutkainen.

Kolmas puute on olettamus, että väestössä on tarpeeksi miehiä. Onhan historia toistuvasti osoittanut, että ennenkaikkea sodat vähentävät naimaikäisten miesten lukumääriä.

Myönteisenä piirteenä voidaan mainita, että kohdassa 2 esitetty väestömalli yleisen muotonsa ansiosta saattaa muodollisen demografian luonnolliseen yhteyteen matemaattisen biologian kanssa.[2]

Kohdassa 3.2. havaittu syntyneisyyspoikkeaman likimääräinen vaimeneva jaksollisuus johtaa helposti ajatukseen approksimoida mainittua poikkeamaa muotoa

4.1. $$a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t) e^{-c_\nu t}$$ [2]

olevalla lausekkeella. Todellisessa väestössä haivaittava syntyneisyyspoikkeaman aaltoliike on tällöin esitetty usean kohdan 3.2. tapaisen vaimenevan aaltoliikkeen *resultanttina*. Vastaavanlaista menettelyä on tiettävästi sovellettu taloudellisiin aikasarjoihin. (*Kendall* II, s. 423—435).

Kirjallisuutta

EILERT SUNDTIN LAKI:

Kilpi, O. K. Suomen ammatissatoimiva väestö ja sen yhteiskunnalliset luokat vuosina 1815/1875. I. Helsinki 1913.

Lento, Reino. Väestö ja hyvinvointi. Johdatusta väestötieteeseen. Porvoo 1956.

Lösch, A. Bevölkerungswellen und Wechsellagen. Jena 1936.

Sundbärg, Gustav. Bevölkerungsstatistik Schwedens 1750—1900. Stockholm 1907.

Sundt, Eilert. Om giftermaal i Norge. Kristiania 1855.

---

[1] Jos jonkin ajasta riippuvan todennäköisyysmallin varianssin voidaan osoittaa kasvavan rajatta, menettää koko malli arvonsa.

[2] Teorian tunnettu esittäjä *A. J. Lotka* oli matetaattinen biologi.

[3] Jos $e^{-e_\nu t}=1$, on kysymysessä *Fourier'n sarja*.

STABIILI VÄESTÖ, MUODOLLISTA DEMOGRAFIAA:

Barclay, George W. Techniques of Population Analysis. Princeton, N.J., 1958.

Dublin, L. I. ja *Lotka, Alfred J.* On the True Rate of Natural Increase as Exemplified by the Population of the U.S.A. 1920. Journal of the American Statistical Association. September 1925.

Lotka, Alfred J. The Stability of the Normal Age Distribution. Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A. Vol. 8, 1922.

Törnqvist, Leo. En befolkningsstatistisk jämförelse mellan Finland och Sverige. Ekonomiska Samfundets Tidskrift 3, 1948.

HARMONINEN ANALYYSI SOVELLETTUNA AIKASARJOIHIN:

Kendall, Maurice G. The Advanced Theory of Statistics. Vol. II. London 1951.

Summary:

A Mathematical Interpretation of the Concept of the Stable Population and Eilert Sundt's Law

By HEIKKI LAUTKARI
Central Statistical Office of Finland

By this summary is described an article which in itself constitutes an abridgment of the author's paper written for obtaining the mark of Laudatur in Statistics at the University of Helsinki. The subject for the investigation was suggested to me by Prof. G. Elfving of Helsinki, who also has given valuable advice during its performance.

The work consists of four main sections: a demographic background, the mathematical theory itself, an application of it, and finally, a discussion of the applicability of the theory.

As background are given the traditional definitions of the concepts of *life table, stationary population* and *stable population.* Moreover, the first part contains a statement of *the law of periodical changes in the number of annual human births* (Eilert Sundt's law).

In the second part a mathematical theory of the stable population is advanced, however without mathematical derivations. The primary parameters, variables and equations are introduced, together with two fundamental theorems. The first of these establishes the stable population as the limit of the age distribution of a female population, and the stable law of growth ($C\varrho^n$)[1] as the limit form of the expected number u_n of annual female births, providing that the birth and death rates by one-year age groups per years of life are assumed to be constant. The second theorem proves the permanence of the stable population, which implies the following: if the starting population is stable, and the annual birth and death rates per year of life are assumed to be constant, the population and the growth of the number of annual female births keep stable.

[1] The symbol ϱ indicates the true rate of natural increase, introduced by *A. J. Lotka.* The symbol C is a constant.

After this, in application of the above-mentioned fundamental theorems, are presented a number of formulas (3.1.3.—3.1.5) for calculating the expected number u_n of births and the birth excess or birth deficit $\triangle u_n$ caused by the deviation of the real starting population from the corresponding stable population. These formulas are in 3.2. applied to the female population of Finland at the end of 1955, in which connection it is assumed to develop according to the birth and death rates of the years 1951—55.[2] In the birth excess and deficit of the years 1960—2005 an *approximately decreasing periodic movement* can be clearly distinguished. This observation is in keeping with Eilert Sundt's law of the conditions above referred to. At the same point a mathematical verification is given of this law, under the schematic assumption that there exists only one fertility age m.

The fourth part of the article offers a criticism of the mathematical theory in its beginning, which runs in broad outline as follows: Birth and death rates never keep constant in real life. A population does not always contain enough males. Random deviations from the expected number of births ought to be taken into account as well when building up the theory comtemplated. Some suggestions are made, however, for its improvement, as e.g. that, to search for a good approximate expression for the dependence of the expected number of births on certain appropriate parameters that govern the birth and death rates. Another idea proposed is, to approximate the real birth excess and birth deficit by means of a damped Fourier series (4.1.). In any case, the general form of the theory as given in part 2 shows the natural interrelation between formal demography and mathematical biology.

---

[2] The primary parameters in table 1 mean as follows: The symbol $v_k(0)$ is the number of people k years of age in the starting population, r_k is the number of survivors according to the life table, β_k is the gross fertility rate and c_k the net fertility rate, all calculated for the years 1951—55. The symbol P_k^n in table 2 is defined by the equations 3.1.5. in the article.