info

Steven J. Brams and Alan D. Taylor (1996): *Fair Division: From Cake-Cutting to Dispute Resolution*. Cambridge University Press, Cambridge. xiv+272 s.

Raamatun dramaattisimpiin kohtiin kuuluu kertomus päätöksestä, jolla kuningas Salomon pääsi oikeudenmukaisen miehen maineeseen ratkaistessaan kahden naisen välistä kiistaa lapsesta. Kummankin todistellessa olevansa lapsen äiti ja siten oikeutettu saamaan lapsi huostaansa Salomon määräsi kiistan kohteen puolitettavaksi arvellen ovelasti, että oikea äiti ei ainakaan hyväksyisi puolitusratkaisua vaan tyytyisi mieluummin antamaan lapsensa kokonaisena valeäidin huostaan. Ratkaisun alunperin salatun osan mukaan lapsi pitikin siis antaa naisista sille, joka jyrkimmin protestoi ratkaisua vastaan (Pyhä Raamattu, 1 Kun. 3: 16–28).

Salomonin ratkaisu tuskin olisi toiminut useammin kuin kerran, sillä valeäidit olisivat ajan mittaan varmaankin oppineet protestoimaan nopeasti ja vakuuttavasti, jolloin kiistat olisivat pitkän päälle muuttuneet ilmaisutaidollisiksi kilvoitteluiksi. Salomonin tuomio ei oikeastaan olekaan jako-ongelman ratkaisu, koska lopputuloksen ajateltiin muodostuvan muuksi kuin se, josta tuomiossa puhutaan. Kiinteän kokonaisuuden jako-ongelma on osoittautunut varsin hankalaksi jopa silloin, kun tuo kokonaisuus, 'kakku', on (erotukseksi Salomonin eteen tulleesta ongelmasta) tärveltymättä jaettavissa loputtoman pieniin osiin ja kun jakotulokselta edellytetään sitä, että molemmat osapuolet pitävät tulosta oikeudenmukaisena.

Steven J. Bramsin ja Alan D. Taylorin uudessa kirjassa *Fair Division* tarkastellaan käytössä olevia ja kehiteltyjä menetelmiä erilaisten kokonaisuuksien oikeudenmukaiseksi jakamiseksi osapuolten kesken. Kirjan esimerkit sisältävät todellisia ja kuviteltuja tapauksia muun muassa kansainvälisten konfliktien, perinnönjaon, suhteellisten vaalitapojen ja avioeron jälkeisen omaisuuden osituksen piiristä. Minimivaatimus kahden hengen kakunjaon oikeudenmukaisuudelle on se, että molemmat osapuolet pitävät jakoa reiluna, toisin sanoen kumpikaan ei katso saaneensa vähempää kuin puolet kakusta. Reilu jako takaa tällöin myös sen, ettei kumpikaan osapuoli kadehdi toisen saamaa palasta. Näin ollen voimme olettaa kakunjaon tulleen suoritetuksi oikeudenmukaisesti, kun se on tehty reilulla tavalla. Ainakin tulosta voidaan pitää stabiilina siinä mielessä, ettei osapuolista kumpikaan kyseenalaista sitä.

Kahden osapuolen tapauksessa reilu jako voidaan toimeenpanna esimerkiksi siten, että toinen osapuolista (jakaja) jakaa kakun osiin, joista toinen osapuoli (valitsija) sitten saa valita haluamansa palasen. Jäljelle jäänyt pala jää jakajalle. Menettely tuottaa tuloksen, joka ei jätä sijaa osapuolten väliselle kateudelle.

Ratkaisu reilun jaon ongelmaan on aina korkeintaan yhtä vaikea kuin ratkaisu kateutta herättämättömän jaon ongelmaan. Kahden henkilön tapauksessa näillä ongelmilla ei ole eroa: jos jako on reilu, toisin sanoen kumpikin katsoo saaneensa vähintään puolet kakusta, vie se pohjan myös kateudelta. Yleisemmin sanottuna reiluus on kateudettomuuden välttämätön ehto. Useamman kuin kahden henkilön jaossa ehto on ei-riittävä.

Esimerkiksi kolmen henkilön jakaessa kakkua, vaikka kukin jakajista kokisikin saaneensa kolmanneksen, ei mikään estä kutakin heistä kadehtimasta jommankumman muun saamaa osaa. Siten kaikki osapuolet saattavat pitää omaa osuuttaan sinänsä reiluna mutta silti protestoida lopputulosta vastaan.

Lopputulosten toivottujen ominaisuuksien tarkastelu on luonnollisesti tärkeää, mutta yhtä lailla olennaista on tietää, onko olemassa menettelyjä toivottujen tulosten saavuttamiseksi. Kahden henkilön tapauksessa ikivanha edellä kuvattu leikkaa-ja-valitse -protokolla takaa lopputuloksen kateudettomuuden. Koska jakaja tietää saavansa sen osan, jota valitsija ei huoli, on hänen intressinsä mukaista jakaa kakku siten, että valitsi toinen osapuoli minkä osan tahansa, jakajalla ei ole syytä kateuteen. Valitsija puolestaan saa valita suuremmaksi katsomansa palasen, joten hänelläkään ei ole syytä kateuteen lopputuloksen suhteen.

Jakoprotokollien historiaa käsitellään Bramsin ja Taylorin teoksessa melko perusteellisesti. Kirjan tarkastelemien ongelmien selventämiseksi lienee syytä esitellä joitakin varhaisemmista tuloksista.

Puolalaisilla matemaatikoilla on merkittävä rooli kakunjakoprotokollien historiassa. Protokolla kolmen henkilön reilua kakunjakoa varten kehiteltiin 1940-luvulla. Tämän Hugo Steinhausin esittämän protokollan ydin on siinä, että tiettyä tehtyä jakoehdotusta voivat muut osapuolet muuttaa, mikäli pitävät esitystä epäreiluna.

1940-luvulle ajoittuu myös toinen Puolassa kehitetty ja luonteeltaan yleisempi menettely, niin kutsuttu Banach-Knaster -protokolla, joka päätyy reiluun kakunkajoon n:n henkilön kesken (ks. Steinhaus 1948). Siihen sisältyy sittemmin käyttökelpoiseksi muissakin jakoprotokollissa osoittautunut ajatus palasten typistämisestä ja typistystähteiden yhdistämisestä vielä jakamatta olevaan kakkuun. Protokollan käytön edellytys on, että jaettavan kakun pitää olla periaatteessa loputtomasti jaettavissa ja jälleen yhdisteltävissä.

On syytä panna merkille, etteivät edellä mainitut puolalaiset protokollat poista syitä kateuteen, sillä vaikka jokainen pelaaja katsookin saaneensa vähintään 1/n kakusta, ei tästä suinkaan seuraa, ettei hän voisi katsoa jonkun muun saaneen suurempaa palasta. Kuten sanottu kahden henkilön jaossa reiluus tietysti takaa myös kateuden puutteen. Kateutta herättämättömän kakunjaon protokollan kehittäminen on huomattavasti hankalampi tehtävä kuin reilun jaon protokollan laatiminen n:n henkilön tapauksessa. Miten siis taata, että kakunjako päätyy lopputulokseen, jossa kenelläkään n:stä osapuolesta ei ole syytä kadehtia yhdenkään toisen saamaa palasta? Seuraavan protokollan kolmen henkilön kakunjakoon esittivät Conway, Guy ja Selfridge vuoden 1980 tienoilla. Tämäkin protokolla perustuu kakun typistämiseen ja typistettyjen osien yhdistämiseen uuden jaon kohteeksi (ks. Woodall 1980).

Askel 1: Pelaaja 1 leikkaa kakun 3 osaan, joita hän pitää yhtä suurina.

Askel 2: Pelaaja 2 voi joko hyväksyä jaon tai typistää yhtä kolmesta palasesta. Poisleikattu palanen, L, pannaan sivuun. Ideana tässä on se, että pelaaja 2 hyväksyy jaon, jos hän pitää kaikkia palasia yhtä suurina tai kahta palasta yhtä suurina ja samalla suurimpina. Hän ei siis hyväksy jakoa, jos vain yksi palanen on hänestä muita suurempi. Tässä tapauksessa hän typistää suurimmaksi katsomaansa palasta.

Askel 3: Pelaajat järjestyksessä 3, 2 ja 1 valitsevat kukin yhden kolmesta palasesta. Pelaajan 2 on kuitenkin valittava typistämänsä palanen, mikäli pelaaja 3 ei sitä valitse. Muutenhan pelaaja 2 voi pakottaa pelaajan 1 valitsemaan muita pienemmäksi typistämänsä palasen. Jos pelaaja 2 hyväksyy pelaajan 1 suorittaman jaon, niin lopputulos on kateudeton kakunjako. Pelaajan 3 kateudettomuuden takaa se, että hän valitsee ensin. Pelaaja 2 taas hyväksyttyään pelaajan 1 tekemän jaon voi valita yhden niistä palasista, joita pitää yhtä suurina (pelaajan 3 valinnan jälkeen ainakin yksi niistä on vielä jäljellä). Pelaaja 1 puolestaan takaa kateudettomuuden omalta osaltaan suorittaessaan jaon. Nämä huomiot koskevat kuitenkin vain tapausta, jossa pelaaja 2 hyväksyy tehdyn jaon. Jos hän ei sitä hyväksy, tarvitaan lisävaiheita.

Askel 4: Jos pelaaja 2 ei hyväksy pelaajan 1 tekemää jakoa, hän typistää yhtä palasta. Siten valittaessa järjestyksessä 3, 2, 1 joko pelaaja 3 tai pelaaja 2 saavat typistetyn palasen (pelaajan 2:han pitää valita typistämänsä palanen, jos pelaaja 3 ei sitä valitse). Se, joka ei saa typistettyä palasta, jakaa typistämisessä poisleikatun osan L kolmeen yhtä suurina pitämäänsä osaan. Sanotaan tätä pelaajaa A:ksi ja typistetyn palasen valinnutta pelaajaa B:ksi.

Askel 5: L jaetaan järjestyksessä B, 1 ja A. Koska B ei suorita jakoa askeleessa 4 ja koska hän pääsee valitsemaan ensinnä, ei hän kadehdi muiden saamia osuuksia. Pelaaja 1 puolestaan ei kadehdi B:tä, vaikka L jaettaisiin millä tavalla, sillä B:hän saa typistetyn palasen. Näin ollen vaikka L annettaisiin kokonaan B:lle, pelaaja 1 ei tätä kadehtisi. Toisaalta pelaaja 1 ei kadehdi A:takaan, sillä pelaaja 1 valitsee ennen A:ta. A ei myöskään kadehdi muita, koska hän jakaa L:n yhtä suuriin osiin.

Äskeinen protokolla siis toimii kolmen henkilön tapauksessa. Ensi näkemältä varsin lähelle kateutta herättämätöntä kakunjako-ongelman ratkaisua päästiin, kun Dubins ja Spanier (1961) todistivat, että mikäli n:n henkilön käsitykset kakun palasista poikkeavat toisistaan edes jonkin verran, on olemassa jako, jossa jokainen katsoo saaneensa suuremman osan kuin 1/n kakusta. Todistus ei ole konstruktiivinen, mutta Woodall (1986) on myöhemmin esittänyt algoritmin tällaisen jaon suorittamiseksi. Vaikka jokainen katsookin jaossa saaneensa suuremman osuuden kuin 1/n, ei tästä silti seuraa, että jako olisi kateudeton, joten kateudettoman kakunjaon ongelmaan n:n henkilön tapauksessa ei tästä suoraan saada ratkaisua.

Itse asiassa ajatuksen, jonka mukaan erilaiset näkemykset oikeastaan helpottavat reilua kakunjakoa, esitti Steinhausin (1948) mukaan Bronislaw Knaster jo 1940-luvulla. Jako helpottuu siksi, että tällöin on olemassa aina sellainen jako, joka antaa jokaiselle osapuolelle palasen, joka hänen oman näkemyksensä mukaan on suurempi kuin 1/n. Steinhausin huomautus ei kuitenkaan sisällä viittausta väitteen todistukseen.

Todistuksia kateudettoman kakunjaon mahdollisuudesta n:n henkilön tapauksessa esitettiin 1980-luvulla (Woodall 1980; Weller 1985). Ne eivät kuitenkaan olleet konstruktiivisia, toisin sanoen niihin ei sisältynyt efektiivistä menettelyä tai algoritmia jaon tekemiseksi. Sellainen keksittiin vasta tämän vuosikymmenen alussa.

Kun pelaajien lukumäärä kasvaa kolmea suuremmaksi, muodostuu kateudettoman voitonjakomenettelynkin kehittely oleellisesti edellisiä protokollia mutkikkaammaksi. Seuraavassa esitellään pääpiirteet Bramsin ja Taylorin (1995) kehittämästä protokollasta (ks. myös Nurmi 1994). Perusajatuksena on se, että pelaajat typistävät kakunpalasia muodostaen mielestään yhtä suuria palasia. Uusi ja yksinkertaisuudessaan nerokas ajatus on se, että useimmissa kakunjaon vaiheissa jako tehdään pelaajien lukumäärää suurempaan määrään osia. Siten neljän pelaajan tapauksessa yksi pelaaja, sanokaamme pelaaja 1, jakaa ensin kakun viiteen yhtä suureksi katsomaansa osaan. Pelaajalle 2 annetaan sen jälkeen mahdollisuus typistää kahta palasta luodakseen kolme yhtä suurta ja samalla suurinta palasta. Sen jälkeen pelaaja 3 saa typistää yhtä palasta luodakseen mielestään kaksi yhtä suurta ja samalla suurinta palasta. Lopuksi pelaajat järjestyksessä 4, 3, 2 ja 1 valitsevat kukin palasen niin, että pelaajien 2 ja 3 pitää valita typistämänsä palanen, jos sellainen on tarjolla. Jokainen pelaaja on sitä mieltä, että hänen valitsemansa on joko suurin tai sitten yksi yhtä suurista suurimmista palasista. Siten jako on kateudeton. Kovin käytännölliseksi protokollaa ei voi sanoa, sillä siihen kuuluu mahdollisesti jokaista pelaajaparia kohti jopa parikymmentä askelta.

Brams ja Taylor esittävät siis ratkaisun merkittävään teoreettiseen ongelmaan: kateudettomaan ja siten reiluun kakunjakoon yleisessä n:n henkilön tapauksessa. Kirjassaan he esittelevät myös katsauksen aiempiin jakoprotokolliin. Erityisen kiinnostavia politologiselta kannalta ovat voitot, jotka koostuvat tietyistä jakamattomista osista. Monissa arkielämän konflikteissa on juuri kysymys kiistoista, jotka koskevat omistuksia, oikeuksia ja hyötyjä, joita ei voi loputtomiin jakaa pienempiin osiin. Kakku koostuu siis näissä tapauksissa kokkareista, jotka jäävät kokonaisiksi jaon päätyttyä. Kokkareisuus merkitsee tietysti myös heterogeenisuutta, jolloin osapuolten mieltymykset eri kakun osiin voivat vaihdella koosta riippumatta.

Bramsin ja Taylorin esimerkkitapauksiin kuuluvat Panaman kanavaneuvottelut 1970-luvun alkupuolella (osapuolina Yhdysvallat ja Panama), avioeron jälkeinen omaisuudenjakotapaus, huutokauppaan perustuvat jaot sekä suhteelliset vaalit. Ensimmäisessä tapauksessa jaettava kakku koostuu muun muassa sellaisista osista kuin kanavan käyttöoikeus, Yhdysvaltain puolustushallinnon oikeudet, sopimuksen kesto, korvaukset ja niin edelleen. Omaisuudenjakoesimerkissä kakun muodostavat muun muassa entisen pariskunnan asunto Pariisissa, maatila Yhdysvalloissa, asunto New Yorkissa, arvopaperit, henkivakuutukset ja niin edelleen.

Oikeudenmukaisen jaon problematiikka on siis aidosti monitieteinen. Valtio-opin osuus siitä on kuitenkin niin huomattava, että Bramsin ja Taylorin kirjaa voi hyvin suositella oppikirjaksi pitemmälle ehtineille valtio-opin opiskelijoille. Kirja sisältää teknisesti vaativia jaksoja, mutta liitteet sivuuttamalla sanoma viestittyy myös matematiikkaa kaihtavalle lukijalle. On toki huomattava, että tämäntyyppinen teksti vaatii lukijalta ennen muuta tarkkaavaisuutta ja varovaista etenemistä. Teksti ei sovi pikalukuun. Kärsivälliselle lukijalle on kuitenkin tarjolla uusia perspektiivejä avaava, sivistävä ja ajoittain suorastaan hauska lukukokemus, joka antaa runsaan tuoton investoidulle ajalle ja vaivalle.

LÄHTEET

Brams, S.J. and A.D. Taylor (1995): An Envy-Free Cake Division Protocol. *American Mathematical Monthly* 102, s. 9–18.

Dubins, L.E. and E.H. Spanier (1961): How to Cut a Cake Fairly. *American Mathematical Monthly* 68, s. 1–17.

Nurmi, H. (1994): Kakunjaon ongelma. Teoksessa A. Kovalainen ja J. Ikonen (toim.), *Tieteen boheemi: boheemin tiede*. Turun kauppakorkeakoulun julkaisuja 6. Turku. s. 157–166.

Steinhaus, H. (1948): The Problem of Fair Division. *Econometrica* 16, s. 101–104.

Weller, D. (1985): Fair Division of a Measurable Space. *Journal of Mathematical Economics* 14, s. 5–17.

Woodall, D.R. (1980): Dividing a Cake Fairly. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 78, s. 233–247.

Woodall, D.R. (1986): A Note on the Cake-Division Problem. *Journal of Combinatorial Theory*, Series A 42, s. 300–301.

HANNU NURMI