

## Kolmiulotteisen muodon mallinnuksesta

Karri Muinonen<sup>1)</sup>, Johanna Torppa<sup>1,2)</sup> ja Jari P. T. Valkonen<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> *Observatorio, PL 14, 00014 Helsingin Yliopisto*

<sup>2)</sup> *Soveltavan biologian laitos, PL 27, 00014 Helsingin Yliopisto*

### Tiivistelmä

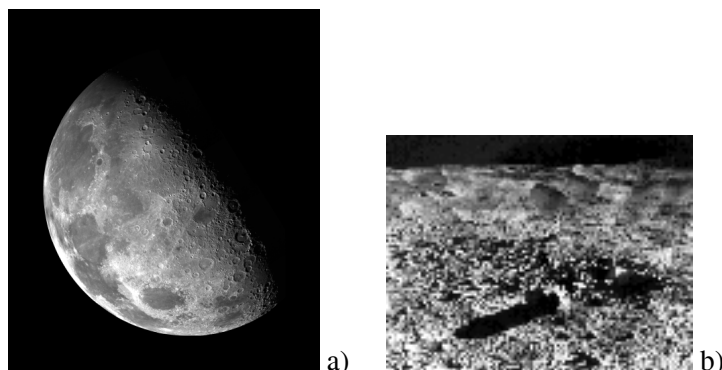
Luonnossa esiintyvät kolmiulotteiset muodot ovat epäsäännöllisiä. Muotojen teoreettiseen mallintamiseen voidaan käyttää tilastollisia menetelmiä, joissa pyritään mahdollisimman vähäiseen vapaiden parametrien lukumäärään. Asteroidien ja perunan mukuloiden kolmiulotteisten muotojen samankaltaisuus on tiedostettu tähtitieteessä ja kasvipatologiassa jo toistakymmentä vuotta. Tässä työssä laajennetaan asteroidien muodon mallinnukseen kehitettyjä menetelmiä perunoiden muotojen mallinnukseen. Vastavuoroisesti havaitaan, että uusi perunan muotomalli edesauttaa asteroidien muotojen mallinnusta.

Perunan mukulan muoto on tärkeä geneettisesti määräytyvä lajikkeen ominaisuus, johon vaikuttavat myös ympäristötekijät. Tässä tutkimuksessa määrätään kahden perunalajikkeen (Van Gogh ja Yukon Gold) pääsääntöinen muoto ellipsoidimallin avulla. Yksityiskohtaisemmat piirteet kuvataan palloharmonisten funktioiden sarjakehityksen avulla. Tämän jälkeen menetelmää sovelletaan neljän muun lajikkeen mukuloiden muodon määrittämiseen (Bellona, Lady Rosetta, Pito ja Sabina). Tilastollisen muotomallin sovellus perunan mukuloihin osoittaa, että ellipsoidi kuvaa pääsääntöistä muotoa hyvin suurella suhteellisella tarkkuudella ja että palloharmoninen osa on alustavasti tilastollisessa mielessä samankaltainen kaikilla lajikkeilla. Uusi perunan mukulan tilastollinen muotomalli voi osoittautua hyödylliseksi muotoerojen luokittelussa, muotoeroihin vaikuttavien geneettisten ja ympäristötekijöiden vaikutusten kvantifioinnissa sekä konenäköön perustuvissa sovelluksissa.

**Asiasanat:** Peruna, *Solanum tuberosum*; 3D; asteroidi, Gaussin statistiikka, palloharmoninen kehitysmalli

## Johdanto

Puolikuu tarjoaa kiikaroijalle mahdollisuuden katsoa muotojen kirjoa Maan ulkopuolisessa planeettakunnassa. Valon ja varjon rajamailla avautuu kraattereiden arpeuttama pinta. Tämä vaikutelma korostuu amerikkalaisen Galileo-avaruusluotaimen Kuusta ottamista kuvista (Kuva 1).



Kuva 1.

(a) Galileo-luotaimen Kuusta sen pohjoisnavan suunnasta ottama 18 kuvan kooste joulukuuta 1992, kun luotain oli matkalla tutkimaan Jupiterin systeemiä. Kuvan vasen osa näkyy Maahan, oikea taas ei ja Kuun pohjoisnapa on varjossa keskellä ylhäällä.

(b) Surveyor 7 luotaimen Kuun Tycho-kraatterin läheisyydestä ottama kuvamosaiikki.

(Kuva NASA/JPL)

Perunan mukulan muoto ja koko ovat tärkeitä laatutekijöitä mukulasadon kaikessa kaupallisessa hyödyntämisessä (Burton 1989; Struik ym. 1990). Vaikka mukuloiden muoto määräytyykin geneettisesti, mukuloiden muoto voi vaihdella huomattavasti kasvuolosuhteiden mukaan (Ortiz ja Huaman 1994). Mukuloiden pääsääntöistä muotoa voidaan kohtuullisella tarkkuudella kuvata yksinkertaisella ellipsoidilla (esim. Blahovec 2005), mutta yksityiskohtaisen muodon mallinnus on haastavampi tehtävä.

Perunoiden mukuloiden lajittelussa käytetään monia konenäköön perustuvia menetelmiä (Tao ym. 1995; Heinemann ym. 1996; Zhou ym. 1998; Hofstee ja Molema 2002). Yllämainituissa tutkimuksissa mukuloita kuvataan kuitenkin kaksiulotteisilla muotomalleilla. Automaattisten konenäköön perustuvien menetelmien edelleen kehittäminen vaatii tarkempien kolmiulotteisten muotomallien kehittämistä. Lisäksi muodon ja sen vaihtelun tarkka kuvaaminen eri mukulapopulaatioille voi olla merkittävää ajankohtaisen perustutkimuksen kannalta, mistä esimerkkinä on tutkimus geneettisten ja ympäristötekijöiden vaikutuksesta mukuloiden muotoon. Tällaista muototietoa voidaan hyödyntää esim. perunan jalostuksessa, sillä se mahdollistaa muotoerojen kvantifioinnin (Ortiz ja Huaman 1994; Croxdale ym. 1997).

Ellipsoidi on käytännöllinen ja stabiili muotomalli ja sitä on sovellettu lukuisiin kohteisiin. Ellipsoidin määräävät kolme puoliakselia  $a \geq b \geq c$  ja varsinaisen muodon määräävät kaksi akselisuhdetta, esim.  $b/a$  ja  $c/b$ . Vaikka ellipsoidi onkin kolmiulotteinen, sen muotoa kuvaa matemaattisesti kaksiulotteinen pinta. Viime vuosituhaten lopulle saakka ellipsoidi on ollut käytännössä ainoa muotomalli planeettakuntamme pienkappaleille (esim. Magnusson ym. 1989), jotka muistuttavat muodoltaan hämmästyttävän paljon perunan mukuloita. Suurimpien planeettakunnan kappaleiden (planeetat, suuret kuut ja suurimmat asteroidit) tapauksessa ellipsoidi kuvaa muotoa erittäin tarkasti, mutta pienten kappaleiden epäsäännöllisten muotojen kuvaukseen on kehitetty monimutkaisempia malleja. Nämä sisältävät sekä konvekseja (Torppa ym. 2003) että ei-konvekseja malleja (Muinonen 1998), joista viimeainituissa on hyödynnetty palloharmonisten funktioiden sarjakehitelmänä esitettävää Gaussin satunnaisuusmuotoa. Palloharmoniset funktiot muodostavat pallogeometrian täydellisen kantafunktiojoukon, ja niiden sarjakehitelmänä voidaan esittää mielivaltainen matemaattisesti tähtiyhtenäinen muoto.

Maaperän laadun ja/tai sen vaihtelun johdosta voi perunan mukuloissa esiintyä huomattavia epäsäännöllisyyksiä, joita voidaan kuvata palloharmoniskehittelmillä. Yhdistetyn ellipsoidi-palloharmonismallin avulla voidaan kuvata tarkasti ei-konveksien perunan mukuloiden muotoa (Torppa ym. 2005a). Muotoparametrien avulla voidaan seurata geneettisten tekijöiden ja ympäristön vaikutusta perunan mukulan muotoon. Esitämme seuraavassa perunan mukulan kolmiulotteisen muotomallin. Sitä ennen esitämme taustaksi planeettakunnan muotokirjoa.

## Planeettakunnan kappaleiden muotokirjoa

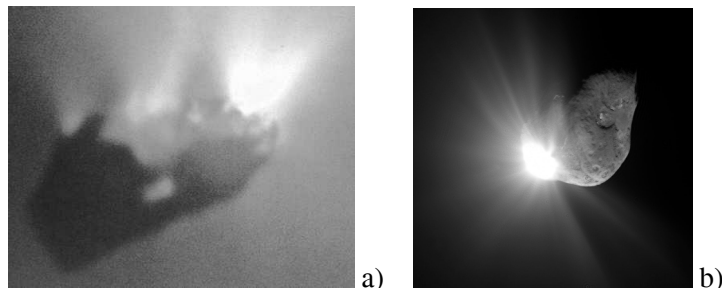
**Planeettojen muodot.** Jotta planeetta olisi täysin pallomainen, se ei saa pyöriä ja sen sisäosan täytyy olla hydrostaattisessa tasapainossa. Kaikki planeetat kuitenkin pyörivät ja tuolloin planeetan muoto ja sen painovoimakentän muoto litistyvät navoilta pyörähdyssymmetrisesti. Maankaltaisista planeetoista pallomaisimpia ovat hitaasti pyörivät Merkurius ja Venus, kun taas Maa ja Mars ovat navoiltaan selvästi litistyneitä (litistyneisyys vastaavasti  $F=1-c/b=1/298$  ja  $F=1/154$ ). Planeetta Pluto on yksi Neptunuksen takaisista kohteista ja lähes pallomainen. Kuukin on lievästi navoiltaan litistynyt,  $F=1/833$ .

Jättiläisplaneetat Jupiter, Saturnus, Uranus ja Neptunus pyörivät hyvin nopeasti (Maata nopeammin) ja niiden muoto poikkeaa huomattavasti pallosta. Tästä tuntuvasta ekvaattorisäteiden levenemisestä voidaan johtaa tietoa planeetan sisäisestä tiheysjakaumasta. Jättiläisplaneettojen litistyneisyys on edellä esitetyssä järjestyksessä  $F=1/15$ ,  $1/10$ ,  $1/43$  ja  $1/59$ . Saturnus on erityisen litistynyt, minkä voi todeta omin silmin jo pienellä kaukoputkella.

**Epäsäännölliset pienkappaleet.** Planeettakunnan epäsäännöllisimmät muodot löytyvät kuitenkin sen pienkappaleista, asteroideista, komeetanytimistä ja planeettojen kuista. Jatkossa kuvataan ennenkaikkea asteroideja ja komeettoja, vaikka erityisesti jättiläisplaneettojen pienet kuut tarjoavat nekin rikkaan muotovalikoiman.

Asteroidit ovat kivenjärkeitä tai niistä koostuvia rökkiöitä, joiden muotoa ei niiden pienestä koosta johtuen voida suoraan Maan pinnalta kuvaamalla määrittää - kaukoputkellakin näemme vain tähtimäisen, loistavan pisteen. Komeettojen ytimet ovat jään ja kiviaineksen muodostamia likaisia lumikasvoja tai lumisia likakasvoja, joita on vaikeaa havaita komeetan pienhiukkasista muodostuvan hunnan johdosta.

Ensimmäisenä Aurinkoa kiertäviä planeettakunnan pienkappaleita kuvasi Euroopan avaruusjärjestön ESA:n Giotto-avaruusluotain. Kuvassa 2a on kooste luotaimen Halley-komeetasta ottamista kuvista maaliskuulta 1986. Kuva paljastaa sekä epäsäännöllisen muotoisen komeetan ytimen että sen pinnalta avaruuteen syöksyvät suihkut. Tarkin kuva komeetan ytimestä on saatu Deep Impact -luotaimella. Kuva 2b Tempel-komeetan ytimestä (luotaimen lähettämän ammuksen osumisen jälkeen) osoittaa, että ytimen pinnan rakenne vaihtelee voimakkaasti paikasta toiseen.



Kuva 2.

(a) Kooste Giotto luotaimen Halley komeetta Giotto luotaimen kuvaamana maaliskuussa 1986. (ESA)

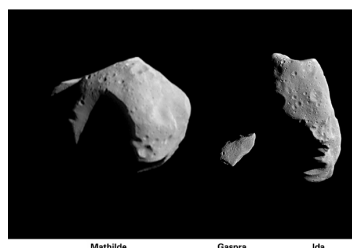
(b) Deep Space 1 luotaimen kuva Borrelly-komeetta Deep Space 1 luotaimen kuvaamana. (NASA/JPL)

Kaikkein suurimmat Marsin ja Jupiterin välisen päävyöhykkeen asteroidit (halkaisijaltaan lähes 1000 km) ovat planeettamaisen pyöreitä, mikä johtuu kappaleen osien välisestä vetovoimasta. Tätä pienemmistä kappaleista löytyy enemmän tai vähemmän epäsäännöllisen muotoisia yksilöitä riippuen kunkin törmäyshistoriasta ja koosta. Pienimmät ovat lähes poikkeuksetta hyvin epäsäännöllisiä.

Kuvassa 3 on kuvakooste Mathilde, Gaspra ja Ida-asteroideista niiden oikeassa suhteellisessa koossa. Yhdysvaltain avaruusjärjestön NASA:n Galileo-luotain kuvasi kaksi viimeainittua vuosina 1991 ja 1993 ja niinkään amerikkalainen NEAR Shoemaker kuvasi Mathilden kesäkuussa 1997. Mathilden näkyvä osa on 59 km leveä ja 47 km korkea ja sen pinta on kraatteroituneempi kuin Gaspran ja Idan. Todellisuudessa Mathilde on huomattavasti tummempi kuin Gaspra tai Ida: tässä kirkkaudet on muunnettu selkeyden vuoksi yhtäläisiksi. Syystä tai toisesta kuvatuissa asteroideissa on kussakin jättiläismäinen kraatteria muistuttava piirre. Jos kyseessä on ollut törmäys, suurempi tällainen olisi kaikesti hajottanut koko kappaleen.

Kuvassa 4 on NEAR-Shoemaker -luotaimen kuvasarja epäsäännöllisen pitkulaisesta Eros-asteroidista ja sen pyörimisestä helmikuulta 2000. Kuvissa Erosta tarkastellaan sen pohjoisnavan

suunnasta noin viiden tunnin aikana. Pinnalta voi erottaa parinsadan metrin kokoisia yksityiskohtia. Suurin teräväreunainen kraatteri on Eroksen kourumaisen halkeaman vastapuolella. Näiden muodostumien välillä sekä banaanimaisen Eroksen päiden suunnassa pinnalla on erotettavissa pienempiä kraattereita.



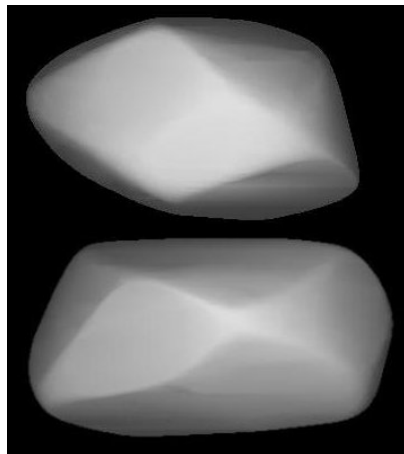
Kuva 3. Kuvakooste Mathilde, Gaspra ja Ida-asteroideista. Mathilden kuvasi NEAR Shoemaker luotain, Gaspran ja Idan Galileo-luotain. (NASA/JPL/Johns Hopkins University)



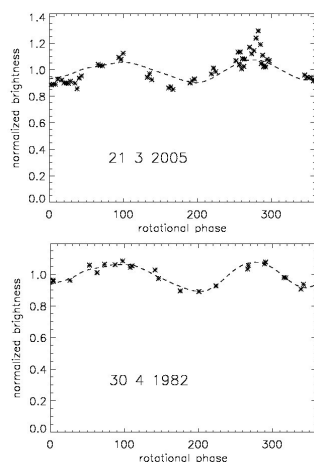
Kuva 4. Eros-asteroidin pyöriminen NEAR-Shoemaker luotaimen kuvaamana. (NASA/JPL/Johns Hopkins University)

**Asteroidien muodon määrittäminen.** Toisin kuin tähdet, asteroidit eivät tuota loistettaan sisäisillä prosesseilla, vaan havaittu valo on niiden pinnan pöykerroksesta heijastunutta Auringon valoa. Koska asteroidit pyörivät pyörähdysakselinsa ympäri, havaittu kirkkaus vaihtelee johtuen ennenkaikkea niiden epäsäännöllisestä muodosta. Jos katselemme pitkulaista asteroidia sen pään suunnasta, on heijastuneen valon määrä pienempi kuin katsoessamme sen pitkää sivua. Kun kirkkaushavaintoja tehdään tarpeeksi tiheään pyörähdysjakson aikana, voidaan havainnoista muodostaa ns. valokäyrä.

Kirkkauden vaihtelua tutkimalla voidaan määrittää asteroidien ominaisuuksia, esimerkiksi niiden muoto (Kaasalainen ym. 2001, Torppa ym. 2005b). Nyky menetelmin muoto saadaan ratkaistua tarkkuudella, jolla esimerkiksi pinnan painaumat eivät suoraan näy, vaan ilmenevät suurina tasankoina. Kuvassa 5a on esitetty muotoratkaisu Maan lähiavaruuden Apollo-asteroidille (Torppa ym. 2005b) ja kuvassa 5b kaksi esimerkkiä mallin sopivuudesta havaittuihin valokäyriin, joita oli yhteensä 26. Mallina on käytetty monitahokasta, jossa on tuhatkunta pintaelementtiä. Apollo on pieni (1.4 km) lähiasteroidi, jota voisi luonnehtia ellipsoidilla, jonka pinnalla on epäsäännöllisiä piirteitä.



a)



b)

Kuva 5. (a) Valokäyriä käyttäen saatu malli Apollo-asteroidista. (b) Kaksi esimerkkiä Apollosta havaituista valokäyristä. Tähtisymbolit ovat havaintoja ja katkoviiva on mallin tuottama valokäyrä.

Asteroidien muotoja voidaan luonnehtia tilastollisesti Gaussin muodon avulla (Muinonen 1998). Vapaita parametrejä ovat sädevektorin pituuden keskiarvo ja standardipoikkeama  $\sigma$  sekä kahden sädevektorin pituuksien korrelaatio niiden välisen kulman funktiona. Sädevektorilla tarkoitetaan pinta-alkion sijaintia kappaleen keskipisteen suhteen. Tämä korrelaatiofunktio saadaan Legendren polynomien (eli kertalukua nolla olevien palloharmonisten funktioiden) sarjasta, jossa polynomien kertoimet ovat vapaita parametreja. Nämä ei-negatiiviset painokertoimet antavat suoraan Gaussin muodoissa esiintyvien palloharmonisten kirjjon.

Gaussin satunnaismuodon vapaita parametrejä kuvaavat kappaleen kokoa ja muotoa. Luonnossa esiintyvien muotojen tapauksessa voidaan laskuja usein yksinkertaistaa, sillä toistaiseksi selittämättömästä syystä korrelaatiofunktion kertoimet pyrkivät noudattamaan potenssilakia  $l^{-\nu}$  ( $l \geq 2$  on asteluku). Vapaita muotoparametrejä jää vain kaksi: sädevektorin pituuden standardipoikkeama  $\sigma$

ja potenssilain indeksi  $v$ . Muotojen realisaatioita varten arvotaan palloharmonisten funktioiden kertoimia, Gaussin satunnaislukuja, joiden standardipoikkeamat liittyvät suoraan mallin parametreihin.

Maan painovoimapotentiaalinen muoto palloharmonisten funktioiden asteluvuilla  $3 \leq l \leq 15$  noudattaa tarkasti potenssilakia  $v = 4$  (Kaula 1968; ks. myös Poutanen 2003). Arvo  $v = 4$  vastaa fraktaalianalyysissä dimensiota  $D = 2$  eli sileää ei-fraktaalimaista muotoa. Arvoilla  $v < 4$  syntyy äärettömien sarjakehitelmien tapauksessa fraktaalimuotoja, jolloin muotorealisaatiot eivät enää ole derivoituvia (Peitgen ja Saupe 1988).

Aurinkokunnan pienkappaleiden korrelaatiofunktio seurailee karkeasti samaa potenssi-lakia  $v = 4$  alhaisilla asteluvuilla  $2 \leq l \leq 7$ , mutta standardipoikkeama  $\sigma$  kasvaa pienkappaleiden koon pientyessä (Muinonen 2002, Muinonen ja Lagerros 1998). Samainen korrelaatiofunktio sopii aina Saharan muutamien kymmenien mikrometrien kokoisille pölyhiukkasillekin (Nousiainen ym. 2003). Korrelaatiofunktio pysyy siis samankaltaisena pituusalueella  $10^{-4} - 10^7$  m.

## Perunan kolmiulotteinen muoto

**Mukuloiden muodon mallinnus.** Perunan kolmiulotteisen muodon tutkimus aloitettiin kuvaamalla kuuden eri perunalajikkeen (Yukon Gold, Van Gogh, Pito, Bellona, Lady Rosetta ja Sabina) mukuloita kolmesta ellipsoidin pääakseleista vastaavasta suunnasta. Pääakselisuunnat arvioitiin silmämääräisesti. Tarkkuus todettiin hyväksyttäväksi toistokuvausten avulla. Kukin silhuetti esitettiin reaaliarvoisena Fourier-sarjana.

Ensiksi tutkittiin mahdollisuutta mallintaa mukulan kolmiulotteista muotoa puhtaasti Gaussin satunnaismuodon avulla. Kuvattuja mukuloiden silhouetteja verrattiin Gaussin satunnaismuodon antamiin silhouetteihin ja samalla arvioitiin satunnaismuodon vapaita parametrejä. Niiden avulla muodostettiin esimerkkimukuloita, joiden muotoja verrattiin todellisten mukuloiden muotoihin. Tällöin havaittiin, että mallin tuottamien mukuloiden joukossa oli tarkasteltavien lajikkeiden kannalta epärealistisia kaksiosaisia muotoja: nämä muistuttavat kahden toisissaan kiinni olevan pullistuman tuottamaa muotoa. Johtopäätöksenä oli, että mukuloiden muodon pääosa tulee eriyttää Gaussin satunnaismuoto-osasta ja että pääosan mallinnusta voidaan yrittää ellipsoidimuodolla (vrt. Maan muoto yllä).

Kuhunkin silhuettiin sovitettiin ellipsi ja kolmesta ellipsisovituksesta johdettiin tässä mielessä parhaiten kutakin yksittäistä perunaa kuvaava ellipsoidi. Todellisen silhuetin ja ellipsoidin antaman silhuetin suhteellista poikkeamaa kuvattiin Gaussin satunnaismuodon avulla. Ellipsoidisovituksista nähtiin, että mukulan muodon pääosa kuvautuu ellipsoidin avulla huomattavan tarkasti, jopa parin prosentin tarkkuudella.

Tilastollisessa perunan mukulan muotomallissa on kuusi vapaata parametriä. Ellipsoidiosaa kuvaavat pitkulaisuuden  $E=1-b/a$  ja litistyneisyyden  $F=1-c/b$  keskiarvot ja standardipoikkeamat. Todennäköisyystiheytenä voidaan sekä pitkulaisuudelle että litistyneisyydelle käyttää ensi kädessä yksiulotteista Gaussin jakaumaa. Seuraavassa vaiheessa suureille voi käyttää kaksiulotteista Gaussin jakaumaa (tai lognormaalista jakaumaa), jossa lisäparametrinä olisi suureiden korrelaatiokerroin. Lopullinen perunan muoto saadaan kertomalla ellipsoidiosaa Gaussin satunnaismuodolla, jossa palloharmoniskehitemä on eksponenttifunktion argumenttina. Osoittautuu, että minimiastelukuna on ensi vaiheessa syytä käyttää arvoa  $l_{\min} = 3$  (vrt. jälleen Maan muodon mallinnus yllä), sillä pitkulaisuus ja litistyneisyys kuvataan riittävällä tarkkuudella ellipsoidiosalla. Gaussin osan vapaita parametrejä on kaksi, sädevektorin pituuden standardipoikkeama  $\sigma$  ja potenssilain indeksi  $v$ . Jälleen on todettava, että kyseessä on alustava mallinnus, sillä yleisessä tilanteessa vapaita parametrejä olisivat  $\sigma$  sekä korrelaatiofunktion Legendre-kehitemän kunkin kantafunktion ei-negatiivinen kerroin (kertoimien summa on kuitenkin ykkönen). Vapaiden parametrien lukumäärä olisi tuolloin käytettyjen astelukujen lukumäärä, sillä sädevektorin pituuden standardipoikkeama voidaan sisällyttää näihin kertoimiin (tuloksena kovarianssifunktion sarjakehitelmä).

Kuuden vapaan parametrin arvioiminen silhuettikuvien muodostamasta data-aineistosta on vaikea matemaattinen käänteisongelma. Vastaava käänteisongelma on ratkaistu puhtaalle Gaussin satunnaisympyrälle menetelmällä, jossa kullekin suljetulle käyrälle etsitään parametrien arvioinnin yhteydessä origo (Lamberg ym. 2001; ks. myös Muinonen ja Lagerros 1998). Gaussin satunnaismuodon käänteisongelman tapauksessa vapaita parametrejä on siis kovarianssifunktion

Legendre-kehityksen astelukujen määrä lisättyä data-aineistoon sisältyvien silhuettien kaksinkertaisella lukumäärällä: kukin origo tuo mukanaan kaksi arvioitavaa koordinaattia.

Yhdistetyn ellipsoidi- ja Gaussin satunnaismuotomallin parametrien arviointi on periaatteessa edellistä haastavampaa, sillä ellipsoidiosa tuo muotomalliin lisää monimutkaisuutta. Käänteisongelman ratkaisua edesauttaa kuitenkin se, että Gaussin satunnaismuodon osa voidaan yllä kuvattujen ellipsisovitusperusteella olettaa pieneksi ellipsoidiosaan verrattuna. Tällöin ellipsoidiparametrit voidaan arvioida suoraan silhuettisovituksista, minkä jälkeen Gaussin satunnaismuodon parametrejä voidaan arvioida suhteellisesta poikkeamasta.

Gaussin satunnaismuodon parametrien johtamisessa käytetään tässä menettelyä, joka on aiempia yksinkertaisempi: data-aineistosta johdetaan yllä kuvatut  $\sigma$  ja  $v$  vertaamalla aineistosta laskettuja tunnuslukuja Gaussin satunnaismuodolle valmiiksi laskettuihin vastaaviin tunnuslukuihin. Kullekin silhuetille johdetaan ns. translaatioinvariantti kulma-asteikko välille  $[0, 2\pi]$  käyränpituuden funktiona siten, että silhuetin käyrän kokonaispituus normitetaan ykköseksi. Saadun invariantin kulman funktiona voidaan laskea erilaisten geometrinen suureiden korrelaatiota silhuetilla.

Tarkastellaan esimerkiksi kahta epäsäännöllisen silhuetin pistettä, jotka sijaitsevat tietyn invariantin kulman päässä toisistaan. Kun silhuetilta valitaan toinen pistepari siten, että pisteiden välinen invariantti kulma pysyy ennallaan, yhdistävän janan pituus pääsääntöisesti muuttuu. Mitatulle silhuettiaineistolle voidaan laskea janojen korrelaatiofunktio kahta pisteparia erottavan invariantin kulman funktiona. Vastaava korrelaatiofunktio voidaan laskea Gaussin satunnaismuodoille ja vertaamalla data-aineistosta ja mallista saatuja funktioita keskenään voidaan määrittää parhaan sovituksen parametrit. Perunan mukuloiden muotoanalyysissä päädyttiin korreloimaan yllä kuvattua jana-analyysia vastaavalla tavalla silhuetin kahden pisteen ulkonormaalivektoreiden suuntien kulmaerotusta kahden pisteparin välisen invariantin kulman funktiona.

Käänteisongelman ratkaisun jälkeen perunalajikkeiden mukuloiden satunnaismuotoja voidaan tuottaa satunnaislukujen avulla kertomalla keskenään satunnaismuodon ellipsoidi- ja palloharmonisotat ja diskretoimalla muodon esitys pallokoordinaatistossa.

## Tulokset

Kolmiulotteisen perunanmukulan muotomallin kuusi parametriä arvioitiin kuudelle lajikkeelle, joiden mukuloiden muodot vaihtelivat pyöreästä pitkulaiseen. Lajikkeista Van Gogh ja Yukon Gold tutkittiin kolme ja kaksi mukulaotosta, tässä järjestyksessä, kun taas Bellonan, Sabinan, Lady Rosettan ja Pidon tapauksessa mukulaotoksia oli yksi.

Koska mukuloiden pääakselisuunnat määrättiin silmämääräisesti, oli odotettavissa, että tästä seuraisi kokeellista virhettä. Virheen suuruutta arvioitiin toistokuvauksilla. Silhuetin muotoon kuvaustapa tuotti enimmillään 2,9 %:n suhteellisen virheen, tyypillisen virheen ollessa alle 2 %. Vaikka virhe oli hyväksyttävissä suhteessa kuvausmenetelmän yksinkertaisuuteen, on syytä korostaa täsmällisempien kuvausmenetelmien tarvetta jatkotutkimuksissa.

Muotoinversiomenetelmää sovellettiin ensiksi verifiointimielessä kahteen toisistaan riippumattomaan mukulaotokseen, jotka oli tuotettu samassa kasvuympäristössä. Verifiointiin otettiin mukaan kaksi lajiketta: 1) litistynyt ja pitkulainen Van Gogh ja 2) pyöreä Yukon Gold. Eri mukulaotoksille johdetut mallin parametrit olivat hyvin lähellä toisiaan (Taulukko 1) kummankin lajikkeen tapauksessa. Toisaalta eri kasvuympäristöstä peräisin oleva Van Goghin otos tuotti erilaiset ellipsoidiosan parametrit, mikä osoittaa, että mallia voidaan käyttää kasvuympäristön vaikutusten mittaamiseen.

Muista lajikkeista Lady Rosettan mukulat muistuttivat pyöreyydessään Yukon Gold -lajikkeen mukuloita (Taulukko 1). Pitkulaisimpia kaikista mukuloista olivat Bellonan, Sabinan, ja Van Goghin kolmannen otoksen mukulat, mutta ne olivat myös litistyneitä. Litistyneimpiä olivat Pidon mukulat.

Taulukko 1. Mukuloiden muotoparametrit analysoiduille perunalajikkeille.

Cultivar	n <sup>a</sup>	E <sup>b</sup>	$\sigma_E^c$	F <sup>d</sup>	$\sigma_F^e$	$\sigma_g^f$	v <sup>g</sup>	c/a <sup>h</sup>	rms <sub>e</sub> <sup>i</sup>	rms <sub>g</sub> <sup>j</sup>
Van Gogh (1) <sup>k</sup>	12	0,13	0,067	0,17	0,060	0,060	4,0	0,72	0,029	0,041
Van Gogh (2) <sup>k</sup>	23	0,13	0,063	0,16	0,043	0,030	3,8	0,73	0,023	0,036
Van Gogh (3) <sup>k</sup>	17	0,17	0,072	0,26	0,084	0,032	3,4	0,61	0,028	0,116
Yukon Gold (1) <sup>k</sup>	20	0,11	0,058	0,11	0,066	0,030	3,8	0,79	0,025	0,048
Yukon Gold (2) <sup>k</sup>	31	0,10	0,049	0,13	0,066	0,030	3,8	0,78	0,026	0,051
Bellona	18	0,17	0,039	0,24	0,043	0,032	3,4	0,63	0,022	0,087
Lady Rosetta	20	0,11	0,044	0,10	0,070	0,032	3,6	0,80	0,022	0,090
Pito	21	0,13	0,065	0,28	0,027	0,032	3,4	0,63	0,024	0,082
Sabina	20	0,17	0,076	0,26	0,080	0,032	3,4	0,61	0,024	0,085

<sup>a</sup> Analysoitujen mukuloiden määrä.

<sup>b</sup> Ellipsoidikomponentin keskimääräinen pitkulaisuus (E).  $E=1-b/a$  (ellipsoidin kolme pääakselia:  $a \geq b \geq c$ ).

<sup>c</sup> E:n standardipoikkeama.

<sup>d</sup> Ellipsoidikomponentin keskimääräinen litistyneisyys (F).  $F=1-c/b$ .

<sup>e</sup> F:n standardipoikkeama.

<sup>f</sup> Palloharmoniskomponentin standardipoikkeama.

<sup>g</sup> Palloharmoniskomponentin potenssilain indeksi.

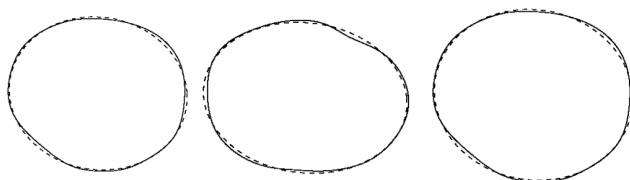
<sup>h</sup> Ellipsoidikomponentin c/a akselisuhte.

<sup>i</sup> Ellipsisovituksen rms-poikkeama (suhteessa keskimääräiseen säteeseen).

<sup>j</sup> Palloharmoniskomponentin rms-poikkeama.

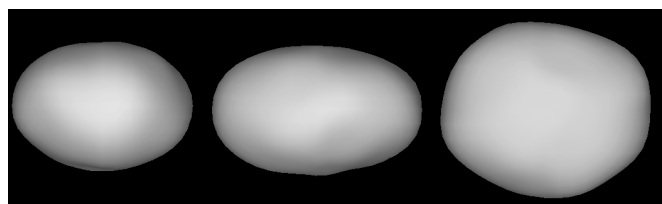
<sup>k</sup> Van Gogh:sta ja Yukon Gold:sta käytettiin useita testijoukkoja. Joukot (1) ja (2) kustakin lajikkeesta oli kasvatettu samalla pellolla, kun taas Van Gogh:n joukko (3) on kerätty eri pellolta.

Kuvassa 6 on esitetty yhden esimerkkimukulan siluetti kolmesta pääakselisuunnasta. Niinikään on esitetty parasta ellipsisovitusta vastaava ellipsi. Kuvassa 7 on esitetty mallin perusteella generoitu mukula kolmesta pääakselisuunnasta Van Goghille. Gaussin satunnaismuoto-osan parametrit olivat hyvin samankaltaisia kaikille mukulaotoksille. Kun kaikki mukulaotokset yhdistettiin ja satunnaismuoto-osa johdettiin koko aineistolle, saatiin tämän osan parametreiksi  $\sigma = 0,032$  ja  $v = 3,4$ . Data-aineistosta johdettujen kovarianssifunktioiden ja simuloituista Gaussin satunnaismuodoista johdettujen kovarianssifunktioiden yhteensopivuus oli hyväksyttävää tasoa: suhteessa maksimaaliseen varianssiin, vertailun rms-arvoksi saatiin n. 6 %.



Kuva 6.

Ellipsisovitus (katkoviiva) ja alkuperäinen siluetti (yhtenäinen viiva) keskimääräisen muotoiselle mukulalle Van Gogh (1) testijoukosta kolmesta pääakselisuunnasta katsottuna.



Kuva 7.

Van Goghille saatujen malliparametrien perusteella generoitu muoto kolmesta pääakselisuunnasta katsottuna.

## Johtopäätökset

Perunan eri käyttötarkoituksissa mukulan muoto on tärkeä laatutekijä (Burton 1989). Muotoa käytetään myös epäsuorasti muiden laatusuureiden kuten mukulan tiheyden ja tärkkelyspitoisuuden arvioinnissa (Blahovec 2005). Perunan mukulan muodon määräävät geneettiset tekijät: pyöreä muoto on pitkulaista yleisempi (Ortiz ja Huaman 1994). Lajikekohtaista mukulan muotoa kuvattiin tässä tutkimuksessa tarkalla kolmiulotteisella mallilla. Samalta viljelmältä kotoisin olevat mukulaotokset tuottivat johdonmukaisia tuloksia. Kasvuolosuhteet, päivän pituus ja monet muut ympäristötekijät aiheuttavat mukuloiden muotoihin merkittäviä epäsäännöllisyyksiä (Burton 1989; Ortiz ja Huaman 1994; Blahovec 2005). Tämän johdosta puhdas ellipsoidimalli ei ole riittävä kolmiulotteiseksi malliksi, vaikka sitä käytetäänkin automatisoituun lajitteluun konenäköön perustuvissa sovelluksissa (Tao ym. 1995; Heinemann ym. 1996; Zhou ym. 1998; Hofstee ja Molema 2002; Blahovec 2005). Muut tilastolliset lähestymistavat, kuten tässä esitetty Gaussin satunnaismuoto, helpottavat mukulan epäsäännöllisyyksien huomioon ottamista.

Kolmiulotteista muotomallia tarvitaan, jotta geneettisesti tekijöiden ja kasvuympäristön vaikutus mukulan muotoon pystytään kvantifioimaan ja esittämään numeerisesti. Menetelmällä on sovelluksia mm. mukulan muotoon vaikuttavien geenien (QTL, *quantitative trait loci*) kartoituksessa, perunanjalostuksessa sekä monissa konenäköön perustuvissa menetelmissä. Tutkimuksessa kehitettyä perunan mukulan muotomallia voidaan hyödyntää esimerkiksi vahvan painovoimakentän omaavien Aurinkokunnan pienkappaleiden muotomallinnuksessa. Tällaisia pienkappaleita ovat suurimmat päävyöhykkeen asteroidit ja lukuisat Neptunuksen takaisen alueen kohteet. Malli voi kuitenkin soveltua jopa Apollo-asteroidin (Kuva 5) kaltaisiin lähiavaruuden pienkappaleisiin.

## Kirjallisuus

- Blahovec, J.** 2005. Density and shape characteristics of *Agria* tubers cultivated at different conditions. *Res. Agr. Eng.* 51: 1-6.
- Burton, W. G.** 1989. *The Potato*. 3<sup>rd</sup> ed. Longman Scientific & Technical, New York, USA.
- Croxdale, J., Cook, M., Tibbitts, T. W., Brown, C. S. & Wheeler, R. M.** 1997. Structure of potato tubers formed during spaceflight. *J. Exp. Bot.* 48: 2037-2043.
- Heinemann, P. H., Pathere N. P. & Morrow, C. T.** 1996. An automated inspection station for machine-vision grading of potatoes. *Machine Vision Appl* 9: 14-19
- Hofstee, J. W. & Molema, G. J.** 2002. Machine vision based yield mapping of potatoes. ASAE Annual Meeting, Chigago, Illinois, USA, pp 28-31.
- Kaasalainen, M., Torppa, J. & Muinonen, K.** 2001. Optimization methods for asteroid lightcurve inversion. II. The complete inverse problem. *Icarus* 153: 37-51.
- Karttunen, H., Donner, K. J., Kröger, P., Oja, H. & Poutanen, M.** 1995. Tähtitieteen perusteet, Tähtitieteellinen yhdistys Ursa, Helsinki, 1995.
- Kaula, W. M.** 1968. *An Introduction to Planetary Physics. The Terrestrial Planets.* (Wiley, New York, 1968).
- Lamberg, L., Muinonen, K., Ylönen, J. & Lumme, K.** 2001. Spectral estimation of Gaussian random circles and spheres. *J. Comp. Appl. Math.* 136: 109-121.
- Magnusson, P., Barucci, M. A., Drummond, J. D., Lumme, K., Ostro, S., Surdej, J., Taylor, R. C. & Zappala, V.** 1989. Determination of pole orientations and shapes of asteroids. Binzel, R. P., Gehrels, T. & Matthews, M. S., eds. *Asteroids II.* The University of Arizona Press, Tuscon, pp 66-97.
- Muinonen, K.** 1998. Introducing the Gaussian hypothesis for asteroids and comets. *Astronomy Astrophys* 332: 1087-1098
- Muinonen, K.** 2002. Light-scattering approximations for small irregular particles, In *Electromagnetic and Light Scattering by Non-spherical Particles*, Gainesville 2002 (B. Gustafson, L. Kolokolova, and G. Videen, eds., Army Research Laboratory, Adelphi, Maryland, U.S.A.), 219-222.
- Muinonen, K. & Lagerros, J.** 1998. Inversion of shape statistics for small solar system bodies. *Astronomy Astrophys* 333: 753-761.



- Nousiainen, T., Muinonen, K. & Räisänen, P.** 2003. Scattering of light by large Saharan dust particles in a modified ray-optics approximation. *Journal of Geophysical Research (Atmospheres)* 108: D1, 4025, doi:10.1029/2001JD001277.
- Ortiz, R. & Huaman, Z.** 1994. Inheritance of morphological and tuber characteristics. Bradshaw, J. E. & Mackay, G. R., eds. *Potato Genetics*. CAB International, Wallingford, UK, pp 263-283
- Peitgen, H.-O. & Saupe, D.,** Eds. 1988. *The Science of Fractal Images* (Springer-Verlag, New York, 1988).
- Poutanen, M.,** toim., 2003. *Maan muoto*, Ursan julkaisuja 86, Painopaikka Gummerus Kirjapaino Oy, Jyväskylä.
- Struik, P. C., Haverkort, A. J., Vreugdenhil, D., Bus, C. B. & Dankert, R.** 1990. Manipulation of tuber-size distribution of a potato crop. *Potato Res.* 33: 417-432.
- Tao, Y., Morrow, C. T., Heinemann, P. H., Sommer, H. J.** 1995. Fourier-based separation techniques for shape grading of potatoes using machine vision. *Transact. ASAE* 38: 949-957.
- Torppa, J., Kaasalainen, M., Michalowski, T., Kwiatkowski, T., Kryszczynska, A., Denchev, P. & Kowalski, R.** 2003. Shapes and rotational properties of thirty asteroids from photometric data. *Icarus* 164: 346-383.
- Torppa, J., Valkonen, J. P. T., Muinonen, K.** 2005a. Three-dimensional stochastic shape modelling for potato tubers. *Potato Res.*, submitted.
- Torppa, J., Virtanen, J., Muinonen, K., Laakso, T., Niemelä, J., Näränen, J., Aksnes, K., Dai, Z., Lagerkvist, C.-I., Rickman, H., Hahn, G., Michelsen, R., Grav, T. & Jörgensen, O.-G.** 2005b. Physical and dynamical properties of near-Earth objects: first results from Nordic NEON. *Icarus*, 37 pp., submitted.
- Zhou, L. Y., Chalana, V., Kim, Y.** 1998. PC-based machine vision system for real-time computer-aided potato inspection. *Int. J. Imaging Syst. Technol.* 9: 423-433.