KATSAUS PELITEORIOIHIN

Professori O Hellman

1. YLEISTÄ

Matemaattisia menetelmiä käytetään monessa yhteydessä päätöksenteon tukena. Tavallisimmin on kysymyksessä optimointitehtävä, jolloin joukko parametreja halutaan valita niin, että jokin funktio saa suurimman tai pienimmän arvonsa. Tällöin parametrien valitsijalla on täysi vapaus suorittaa valintaansa. Hänen ei tarvitse ottaa huomioon vastapuolen mielipiteitä tai toimenpiteitä. Sotilaallisissa ja poliittisissa sovellutuksissa tilanne on toinen: vastapuolen reagointi tulee arvioida ja ottaa huomioon jo omaa toimenpidettä suunniteltaessa. Toiminnassa saattaa olla mukana useitakin osapuolia, joilla saattaa olla eriäviä tavoitteita. Osapuolet voidaan tällöin usein jakaa kahteen ryhmään, joilla on täysin vastakkaiset intressit. Parametrien valintaa suorittamassa on nyt kaksi osapuolta, joista toinen haluaa valintojen tulosta kuvaavan kriteerifunktion arvon tulevan mahdollisimman suureksi, kun taas toisen osapuolen tavoitteena on mahdollisimman pieni kriteerifunktion arvo. Peliteorioiksi kutsutaan sellaisia matemaattisia teorioita, jotka pyrkivät auttamaan päätöksenteossa silloin, kun mukana on kaksi tai useampia osapuolia, joiden edut ovat ristiriidassa keskenään.

Peliteorian käsitteistöön ja ajattelutapaan tutustuu parhaiten matriisipelin yhteydessä. Peliteoria alkoi kehittyä toisen maailmansodan aikana juuri matriisipelistä. Seuraavassa käsitelläänkin ensin verraten pitkään matriisipeliä. Pääpaino pannaan käsitteiden selvittämiseen ja lähtökohtien arvostelemiseen. Tämä on mahdollista turvautumatta siihen pisimmälle menevää matemaattista koneistoa soveltavaan metodiikkaan, joka on modernin peliteorian alan kirjan lukijaa vastassa jo lähes ensimmäisellä sivulla.

2. MATRIISIPELIT

On luontevinta aloittaa yksinkertaisella esimerkillä.

E s i m e r k k i 1. Puoli A lähettää puolen B alueelle kaksi pommikonetta, koneet I ja II. Tällöin lentää I edellä ja II perässä. Toinen pommikoneista kuljettaa vetypommia, ennakolta ei tiedetä kumpi, toisen toimiessa suojakoneena. Pommikoneilla on sama aseistus. Kun puolen B hävittäjä hyökkää perässä lentävää pommikonetta II vastaan, joutuu hävittäjä vain tämän tulituksen kohteeksi. Edellä lentävä pommikone ei voi osallistua torjuntaan, koska pommikone II on sen ja maalin välissä.

Tässä tilanteessa torjutaan hävittäjä todennäköisyydellä 0,3. Jos hävittäjä valitsee kohteekseen pommikoneen I, joutuu se kummankin pommikoneen torjuntatulen kohteeksi ja torjunta onnistuu todennäköisyydellä 0,7. Elleivät pommikoneet onnistu torjumaan hävittäjäkonetta, ampuu tämä valitsemansa pommikoneen alas todennäköisyydellä 0,6.

Puolen A on esimerkissämme tehtävä valinta: pommin sijoittaminen joko pommikoneeseen I tai pommikoneeseen II.

Puolen B hävittäjän valinta on joko pommikone I tai pommikone II.

Otetaan käyttöön seuraavat merkinnät:

A_1 — pommi on sijoitettu pommikoneeseen I

A_2 — pommi on sijoitettu pommikoneeseen II

B_1 — hävittäjän hyökkäys kohdistuu pommikoneeseen I

B_2 — hävittäjän hyökkäys kohdistuu pommikoneeseen II

Kumpikin osapuoli tekee valintansa salaisesti. Hyökkäyksen tulosta luonnehditaan todennäköisyydellä, että puoli A pystyy kuljettamaan pomminsa perille. Merkitään tapausta, että pommi on ensimmäisessä pommikoneessa ja hävittäjä valitsee kohteekseen ensimmäisen pommikoneen symbolilla A_1B_1. Edelleen merkitään puolen A toiminnan onnistumisen todennäköisyys tässä tapauksessa $P(A_1B_1)$. Nyt onnistuu hävittäjän torjuminen pommittajilta todennäköisyydellä 0,7, jolloin pommi pääsee perille todennäköisyydellä 1,0. Toisena vaihtoehtona, todennäköisyydellä 0,3, epäonnistuvat pommittajat hävittäjän torjunnassa, jolloin pommikone I tuhoutuu todennäköisyydellä 0,6 eli pommi pääsee perille todennäköisyydellä 0,4. Siis kaiken kaikkiaan puoli A saa pomminsa perille tapauksessa A_1B_1 todennäköisyydellä

$$P(A_1B_1) = 0{,}7 \times 1 + 0{,}3 \times (1 - 0{,}6) = 0{,}82$$

Jäljelläolevat valintakombinaatiot ovat A_2B_1, A_1B_2 ja A_2B_2, jolloin vastaavat todennäköisyydet sille, että puoli A saa pomminsa perille ovat

$$P(A_2B_1) = 1$$
$$P(A_1B_2) = 1$$
$$P(A_2B_2) = 0{,}3 \times 1 + 0{,}7\,(1 - 0{,}6) = 0{,}58$$

Edellä esitetyt seikat on luontevaa järjestää seuraavaan matriisimuotoon, mistä nimitys matriisipeli seuraa:

Kuva 1

	B_1	B_2
A_1	0,82	1
A_2	1	0,58

Esimerkin päätöksentekotilanteen selvittäminen rakentuu tämän matriisin ympärille. Kysymykseen palataan myöhemmin.

Kun osapuolien A ja B välille on muodostunut esimerkin mukainen pelitilanne, laatii kumpikin omalla tahollaan pelimatriisin. Matriisipelin perustapauksessa on kummankin puolen matriisi tarkalleen sama. Seuraavassa tarkastellaan perustapausta seikkaperäisesti. On kuitenkin selvää, että yleensä pelaajat A ja B päätyvät erilaisiin matriiseihin.

Matriisipelin peruskäsitteiden ja ominaisuuksien selvittäminen on luontevaa tehdä jonkin konkreettisen numeroarvoja sisältävän matriisin avulla. Vaikka edellisen esimerkin matriisi jo olisi tällainen, on tarkoituksenmukaisempaa käyttää laajempaa matriisia, esimerkiksi seuraavaa

	B_1	B_2	B_3	B_4	$\underline{a}_i$
A_1	0,9	0,4	0,2	0,1	0,1
A_2	0,3	0,6	0,8	0,7	0,3
A_3	0,5	0,7	0,2	0,4	0,2
A_4	0,0	0,2	0,3	1,0	0,0
$\underline{b}_j$	0,9	0,7	0,8	1,0	

Kuva 2

Kummallakin pelaajalla on siis valittavissa neljä erilaista strategiaa. Kullekin siirtoparille A_iB_j on taulukossa luku, jonka pelaaja A toivoo mahdollisimman suureksi ja pelaaja B mahdollisimman pieneksi. Siirtojen oletetaan jälleen tapahtuvan samanaikaisesti siten, että kummankin pelaajan valinta tulee näkyviin samanaikaisesti. Valintaa harkitseva pelaaja B pohtii tilannetta seuraavasti: jos A valitsee siirtonsa A_1 tulisi minun valita siirto B_4, koska pelin tulos on tällöin kannaltani edullisin, pienin mahdollinen eli 0,1. Jos tietäisin varmuudella, että A valitsee strategian A_2 tulisi minun valintani olla B_1, jolloin pelin tulos olisi 0,3. Tällä tavoin B käy läpi kaikki A:n neljä strategiaa ja muodostaa matriisin viereen kirjoitetun pystysarakkeen $\underline{a}_i$. A harkitsee vastaavalla tavalla: jos B valitsisi strategiansa B_1 tulisi minun ehdottomasti valita strategiani A_1, koska pelin tulos olisi tällöin kannaltani paras mahdollinen eli 0,9. Pelaajan B strategioita B_1, B_2, B_3 ja B_4 vastaamaan saa A luvut 0,9, 0,7, 0,8 ja 1,0, jotka on kirjoitettu matriisin alle vaakariviksi $\underline{b}_j$.

Olkoon nyt kysymyksessä allaolevan matriisin mukainen peli.

	B_1	B_2	. . .	B_n	$\underline{a}_i$
A_1	a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1n}	$\underline{a}_1$
A_2	a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2n}	$\underline{a}_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
A_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	$\underline{a}_m$
$\underline{b}_j$	$\underline{b}_1$	$\underline{b}_2$	. . .	$\underline{b}_m$	

Kuva 3

Siinä on pelaajalla A kaikkiaan m strategiaa ja pelaajalla B kaikkiaan n strategiaa. Matriisin yhteyteen on merkitty lisäksi edellisen esimerkin sarakkeet $\underline{a}_i$ ja $\underline{b}_j$. Luvut $\underline{a}_i$ on nyt valittu seuraavasti:

$$\underline{a}_i = \min_j a_{ij}$$

missä j käy läpi kaikki arvot 1 . . . n. Edelleen, luvut $\underline{b}_j$ on valittu seuraavasti

$$\underline{b}_j = \max_i a_{ij}$$

missä i käy läpi kaikki arvot 1 . . . m.

Nyt kumpikin pelaaja siirtyy tarkastelemaan vastapelaajan tulosriviä. Pelaaja B laatii $\underline{a}_i$ -rivin ja nyt siis A tutkii sitä. Tämä tapahtuu luonnollisesti siten, että pelaaja A itse laatii matriisista pelaajalle B kuuluvan pystyrivin $\underline{a}_i$. On ilmeistä, että valitsemalla strategian A_{i_0} siten, että

$$\underline{a} = \underline{a}_{i_0} = \max_i \underline{a}_i = \max_i \min_j a_{ij}$$

pelaaja A tietää varmuudella pääsevänsä ainakin tulokseen $\underline{a}$. Pelaaja B taasen tutkii nyt vaakariviä b_j ja päättää valita strategiansa B_{j_0} siten, että

$$\underline{b} = \underline{b}_{j_0} = \min_i \underline{b}_j = \min_j \max_i a_{ij}$$

Nyt tietää hän häviävänsä korkeintaan määrän $\underline{b}$.

Kuvan 2 kohdalla on $\underline{a} = 0{,}3$ ja $\underline{b} = 1{,}0$.

Olisi helppo todistaa, että jokaiselle matriisipelille on voimassa epäyhtälö

$$\max_i \min_j a_{ij} < \min_j \max_i a_{ij}$$

vain harvinaisena erikoistapauksena saattaa olla

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

harvinaisena erikoistapauksena siinä mielessä, että käytännön probleeman yhteydessä muodostuvan matriisin kohdalla on edellinen yhtälö harvinainen. Tällainen matriisi voidaan tietenkin keinotekoisesti tehdä, esimerkkinä allaoleva matriisi.

	B_1	B_2	B_3	$\underline{a}_i$
A_1	0,1	0,5	0,9	0,1
A_2	0,8	0,4	0,3	0,3
A_3	0,7	0,6	0,8	0,6
$\underline{b}_j$	0,8	0,6	0,9	

Kuva 4

missä $\underline{a} = \underline{b} = 0{,}6$

Kuvan 2 matriisin kohdalla voittaa A siis ainakin määrän 0,3 ja B häviää korkeintaan määrän 0,7. Pelaaja A voi tietenkin ajatella seuraavasti: minä valitsen strategian A_1, ja ehkäpä B valitseekin strategiansa B_1. Tällöin minä voittaisinkin määrän 0,9 enkä vain määrää 0,3, joka tosin olisi varma. Jos pelaaja B kuitenkin jostakin syystä valitsisikin strategiansa B_4 voittaisi A varmaa arvoansa 0,3 pienemmän määrän 0,1. Pelaajan B ajatuksenkulku saattaisi olla (edelleen kuvan 2 mukaisen matriisin kohdalla) seuraava: Häviän korkeintaan määrän 0,7, joka tapahtuu silloin kun valitsen strategian B_2 ja kun A valitsee strategian A_3. Jos kuitenkin valitsen strategian B_4, saattaa A valita strategian A_1, jolloin häviänkin vain määrän 0,1. Matriisista näkyy kuitenkin, että A saattaa tällöin aiheuttaa B:lle suurimman mahdollisen tappion 1,0 valitsemalla strategian A_4.

Vaikuttaa siis siltä, että pelin siirtoja valittaessa tulee pelaajien A ja B jollakin tavoin lähteä edellä selvitetyistä arvoista

$$\underline{a} = \max_i \min_j a_{ij} \quad \text{ja} \quad \underline{b} = \min_j \max_i a_{ij}$$

ja näihin tuloksiin johtaneista, seuraavalla ilmeisellä tavalla määritellyistä siirroista

$$\underline{a} = a_{i_0 j_0} = \max_i \min_j a_{ij} \quad \text{ja} \quad \underline{b} = a_{i_1 j_1} = \min_j \max_i a_{ij},$$

jolloin siis yleensä

$$a_{i_0 j_0} < a_{i_1 j_1}$$

mutta ehkä, ainakin teoriassa, joskus

$$i_0 = i_1 \quad \text{ja} \quad j_0 = j_1.$$

Itse asiassa on jälkimmäinen tapaus pelaajien kannalta toivottava. Todellakin, kun muistetaan miten luvut $\underline{a}$ ja $\underline{b}$ määriteltiin edellä kuvan 3 matriisin avulla, voittaa A varmasti määrän $\underline{a} = \max_i \min_j a_{ij}$ ja B tietää häviävänsä korkeintaan määrän $\underline{b} = \min_j \max_i a_{ij}$ ja jokaisen matriisipelin kohdalla on aina vain kaksi vaihtoehtoa: joko $\underline{a} < \underline{b}$ tai $\underline{a} = \underline{b}$. Tapauksessa $\underline{a} < \underline{b}$ toivoo A voivansa tehdä jotakin siten, että hän nostaa saavutuksensa $\underline{a}$ johonkin arvoon $\underline{a}'$. Pelaaja B vuorostaan haluaa keksiä jonkin järjestelyn siirtojensa valinnan yhteydessä siten, että hän saa pelinsä tuloksen $\underline{b}$ jotenkin paranemaan arvoon $\underline{b}'$. Nyt kuitenkin

$$\underline{a} < \underline{a}' < \underline{b}' < \underline{b}$$

joten parhaassa tapauksessa on $\underline{a}' = \underline{b}'$

Kuvan 4 matriisi on tyyppiä $\underline{a} = \underline{b}$, siinä

$$\max_i \min_j a_{ij} = 0{,}6 \quad \text{ja} \quad \min_i \max_j a_{ij} = 0{,}6$$

Pelaajan A tulee siis soveltaa strategiaa A_3 ja pelaajan B strategiaa B_2. Näin jopa silloinkin kun pelissä on useampia siirtoja, jotka toistuvat luonteeltaan samanlaisina: kumpikin pelaaja tekee siirtonsa valinnan toiselta salassa ja siirrot tulevat julki samanaikaisesti.

Nyt on huomattava, että siirtoja valittaessa rationaalisesti ei varsinainen veikkaus (uhkapeli) tärkeitä ratkaisuja tehtäessä tule kysymykseen. Puolen A tulee perustaa toimintansa paljolta siihen mitä hän varmuudella tulee saamaan aikaan. Samoin joutuu B lähtemään siitä suurimmasta mahdollisesta tappiosta, mihin hänen toimintansa voi päätyä. Kuvan 4 matriisin kohdalla ei siis A valitse strategiaansa A_1 vaikka eräänä mahdollisena tuloksena on 0,9, koska toisena yhtä mahdollisena tuloksena on 0,1.

Oletetaan nyt, että kuvan 3 matriisin kohdalla on

$$\underline{a} = \max_i \min_j a_{ij} < \min_j \max_i a_{ij} = \underline{b}$$

Pelaaja A ei ole välttämättä tyytyväinen varmaan tulokseensa $\underline{a}$ pelaajan B toivoessa häviävänsä vähemmän kuin määrän $\underline{b}$.

Mikäli pelissä on vain yksi siirtopari ja mikäli sellaisia riskejä ei oteta, jotka mahdollistaisivat varmoja tuloksia huonommat tulokset, ei pelissä kummankaan kannalta ole mitään tehtävissä. Jos kuitenkin siirtoparin muodostaminen on usein toistuva tapaus, on pelin tuloksen parantaminen mahdollista. Voidaan lähteä siitä, että jos jompikumpi pelaajista soveltaa siirtojensa valinnasta jotakin ilmeistä sääntöä, vastapelaaja päättelee tuon säännön havainnoistaan ja soveltaa tätä tietoa itselleen edullisella tavalla. On ilmeistä, että soveltamalla selvää sääntöä pelaaja toimii epäedullisesti.

Intuitiivisesti tulee tietenkin mieleen valita siirrot satunnaisesti, turvautumatta mihinkään deterministiseen algoritmiin. Siirtojen satunnainen valinta, pelaajan A kohdalla strategioista $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ja pelaajan B kohdalla strategioista $B_1, B_2, \ldots, B_n$ voidaan tehdä monilla eri tavoilla. Näistä tavoista tulee valita tietenkin jossakin mielessä paras mahdollinen.

Merkitään nyt, kuvan 3 matriisipeliin liittyen, pelaajan A satunnaisvalintasääntö vektorina

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_m), \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

sekä pelaajan B satunnaisvalintasääntö vektori

$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

Tällöin pelaaja A arpoo strategiansa siten, että strategia A_i tulee tulokseksi todennäköisyydellä x_i. Samoin saa pelaaja B strategiansa B_j todennäköisyydellä y_j. Ajatellaan nyt, että pelaajat arpovat siirtonsa kerran viikossa. Pelin tuloksena on viikottain lukuna ilmoitettavissa oleva tulos, joka koituu pelaajan A hyväksi ja on pois pelaajalta B. Pelin kulku on edelleen sama kuin aikaisemminkin: valitut siirrot tulevat kummallekin pelaajalle tietoon samalla hetkellä, jolloin myös (pelimatriisista lukien) pelin tulos selviää. Kun aikaa kuluu, kertyy näistä viikottaisista pelin tuloksista lukujono, jonka alkiot vaihtelevat satunnaisesti pelaajien soveltamien satunnaislakien $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ja $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ mukaisesti.

Mutta miten tulisi satunnaislait $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ja $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ valita, jotta peli sujuisi pelaajien toivomalla tavalla. Kun pelien tuloksena saadaan satunnaislukujen jono, sujuu peli pelaajan A kannalta hyvin, jos lukujonon alkiot ovat keskimäärin suuria. On luonnollista vaatia, pelaajan A kannalta, että keskiarvo

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j$$

on mahdollisimman suuri. Samoin toivoo B tämän keskiarvon olevan mahdollisimman pienen. Pelaaja A pyrkii nyt päämääräänsä vektoria $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ sopivasti valitsemalla ja pelaaja B menettelee samalla tavoin vektorinsa $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ kanssa. Merkitään nyt

$$E(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j,$$

jolloin, edellä esitettyä hieman modifioiden, voidaan todeta että aina

$$\max_X \min_Y E(X,Y) < \min_Y \max_X E(X,Y).$$

Satunnaisvektoreiden avulla suoritettavaan strategioiden valintaan ryhdyttiin, kun haluttiin parantaa matriisipelin tulosta pelaajan A kannalta. Koska peli etenee periaatteessa päättymättömänä jonona strategioiden $A_1, \ldots, A_m$ ja $B_1, \ldots, B_n$ valintoja, valitsee pelaaja A nyt satunnaisvalintasääntönsä $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ siten, että epäyhtälö

$$\underline{a} = \max_i \min_j a_{ij} < \max_X \min_Y E(X,Y)$$

on mahdollisimman hyvin voimassa. Pelaajan B valitsee satunnaislain $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ siten, että epäyhtälö

$$\min_Y \max_X E(X,Y) < \min_j \max_i a_{ij} = \underline{b}$$

on voimassa mahdollisimman hyvin. Siis nyt

$$\underline{a} < \max_X \min_Y E(X,Y) < \min_Y \max_X E(X,Y) < \underline{b}$$

Parhaassa tapauksessa olisi ilmeisesti

$$\max_X \min_Y E(X,Y) = \min_Y \max_X E(X,Y)$$

Nyt voidaan todistaa (todistukseen ei tässä yhteydessä puututa), että jokaiselle matriisipelille löydetään vektoripari (X^*,Y^*) siten että

$$E(X^*,Y^*) = \max_X \min_Y E(X,Y) = \min_Y \max_X E(X,Y)$$

eli toisin sanoen, että

$$E(X,Y^*) \leq E(X^*,Y^*) \leq E(X^*,Y)$$

jokaiselle vektoriparille (X,Y).

Tarkastellaan nyt alussa esitettyä esimerkkiä, missä kaksi pommikonetta lensi peräkkäin ja näitä torjui yksi hävittäjä. Jotta strategioiden satunnaisvalinta tulisi kysymykseen, tulee tutkittavan operaation olla toistettavissa samanlaisena mielivaltaisen useasti. Kuvattu lähestymislento ajatellaan siis esim. päivittäin tapahtuvaksi ja edelleen oletetaan, että torjumaan lähtee aina vain yksi hävittäjälentokone.

Tässä kohden todetaan luonnollisesti, että näin tuskin koskaan voi olla asianlaita. Matriisipeli strategioiden satunnaisvalintoineen ei siis voisi tulla kysymykseen todellisen suunnittelun lähtökohtana. Tämä pitää täysin paikkansa: matriisipeli ei tule kysymykseen, ellei pelitilanne ole toistettavissa, vieläpä niin että kumpikin osapuoli menettelee aina samoin, mielivaltaisen useasti. Mutta tarkastellaan lähestymislentoesimerkkiä kuitenkin eräänlaisena ajatuskokeena. Kuvasta 1 nähdään ensinnäkin, että

$$\underline{a} = \max_i \min_j a_{ij} = 0{,}82 \quad \text{ja} \quad \underline{b} = \min_j \max_i a_{ij} = 1$$

Pelaajan A strategiat valitseva satunnaislukusääntö on nyt muotoa $X = (x_1, x_2)$ ja pelaajan B vastaava sääntö muotoa $Y = (y_1, y_2)$, jolloin kuvan 1 matriisista saadaan pelin keskimääräiselle tulokselle lauseke

$$E(X,Y) = 0{,}82\, x_1y_1 + 0{,}58\, x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$$

Optimaalisten satunnaisvalintasääntöjen X ja Y etsimiseksi johdettuja laskusääntöjä soveltaen saadaan helposti tulos että

$$x_1 = 0{,}7 \quad x_2 = 0{,}3 \quad \text{ja}$$
$$y_1 = 0{,}7 \quad y_2 = 0{,}3$$

jolloin lisäksi

$$\underline{a} = \underline{b} = 0{,}874$$

Tulos tarkoittaa seuraavaa: pelaaja A sijoittaa pommin pommikoneeseen I todennäköisyydellä 0,7 ja pommikoneeseen II todennäköisyydellä 0,3. Samoin valitsee puoli B hävittäjäkoneen kohteeksi pommikoneen I todennäköisyydellä 0,7 ja pommituskoneen II kohteeksi todennäköisyydellä 0,3. Valinnan suorittaa kummallakin puolella jokin arpomislaite. Minkäänlaista harkintaa ei enää tarvita. Sen sijaan että puoli A saisi pomminsa perille todennäköisyydellä 0,82 pommi saadaankin perille keskimääräisellä todennäköisyydellä 0,874.

3. YLEISTETYT MATRIISIPELIT

Matriisipelejä voidaan tarkastella pitämällä pelimatriisin alkiot a_{ij} kahden muuttujan funktioina, jolloin muuttujan i mahdolliset arvot ovat 1, 2, . . ., m sekä muuttujan j mahdolliset arvot 1, 2, . . . , n. Matemaattiselta kannalta lähdettäessä voidaan matriisipeliä yleistää kahdessa vaiheessa. Ensin päätetään että toisella pelaajista (tai molemmilla) on käytettävissä äärettömän monta strategiaa, eli että funktiossa a_{ij} argumentit i ja j voivat saada kaikki kokonaislukuarvot 1, 2, . . . Toisena matriisipelin yleistyksenä sallitaan matriisialkion a_{ij} parametrien i ja j saada arvoja annetuilta väleiltä, esimerkiksi $\frown i \smile \varepsilon [0,a]$ ja $\frown j \smile \varepsilon [0,b]$ Matriisialkio a_{ij} on tällöin muuttujiensa i ja j jatkuva funktio. On luontevaa merkitä matriisialkio a_{ij} tavalliseen tapaan kahden parametrin funktioksi ja edelleen valita muuttujat siten, että ne saavat arvoja standardiväliltä $[0,1]$. Siis pelaajan A siirtona on valita x väliltä $[0,1]$ ja pelaajan B siirtona valita y väliltä $[0,1]$. A toivoo valintansa onnistuvan siten, että pelin tuloksen ilmoittava funktio a(x,y) saa mahdollisimman suuren arvon. Samanaikaisesti pelaaja B toivoo valintansa onnistuvan siten, että funktio a(x,y) saa mahdollisimman pienen arvon. (Funktion a(x,y) arvo vastaa matriisipelin alkiota a_{ij}).

Matriisipeli voidaan kaikissa edellisissä tapauksissa ilmoittaa pelin tuloksen ilmoittavan funktion a(x,y) avulla. Tällöin:

— tavallinen matriisipeli: $x = 1, 2, \ldots, m$ ja $y = 1, 2, \ldots, n$

— ääretön diskreetti matriisipeli: $x = 1, 2 \ldots$ ja $y = 1, 2, \ldots$

— ääretön matriisipeli: $x \; \varepsilon \; [0,1]$ ja $y \; \varepsilon \; [0,1]$.

Kussakin tapauksessa pelin tulos, eli funktion a(x,y) ilmoittama arvo, lankeaa pelaajan A eduksi. Näistä peleistä ovat käytännön kannalta tärkeitä ensimmäinen ja kolmas.

Tavallisesta matriisipelistä on edellä jo esitetty esimerkkejä. Äärettömästä matriisipelistä on esimerkkinä seuraava panssarien kaksintaistelu.

E s i m e r k k i 2: Pelaajat A ja B, kaksi panssaria, huomaavat toisensa samanaikaisesti panssareiden ollessa etäisyydellä L toisistaan. Kummallakin on käytettävissään vain yksi ammus tykkiinsä. Panssarit alkavat ajaa toisiaan kohden valmistautuen ampumaan. Mitä lähempää panssari laukaisee vastustajaansa kohden sitä suuremmalla todennäköisyydellä laukaus osuu tehokkaasti. Toisaalta välimatkan lyhetessä saattaa vastustaja ennättää laukaista ensiksi. Nyt on a(x,y) todennäköisyys, että panssarin A laukaus tuhoaa panssarin B kun A on ajanut matkan x lähtökohdastaan ja kun B on vastaavasti ajanut matkan y lähtökohdastaan. Nyt on x jokin arvo väliltä $[0,L_1]$ ja y jokin arvo väliltä $[0,L - L_1]$ missä L_1 on se matka, jonka päässä panssarin A lähtökohdasta vaunut törmäisivät toisiinsa.

Tämän esimerkin yhteydessä on luontevaa tarkastella äärettömän matriisipelin kulkua muistaen, että alussa käsitellyn tavallisen matriisipelin luonteen mainittiin säilyvän suoritetuissa yleistyksissä. Kuvan 3 matriisipelin yhteydessä oli pelin kulku ja luonne kuvattavissa seuraavasti:

1) Kummallakin pelaajalla on valittavinaan äärellinen määrä mahdollisia strategioita, pelaajan A strategiat ovat $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ja pelaajan B strategiat $B_1, B_2, \ldots, B_n$.
2) Kumpikin pelaajista suorittaa strategiansa valinnan vastapuolelta salassa, jolloin valintojen tulos voidaan ilmoittaa luvulla: valintaparia (A_i,B_j) vastaa matriisialkio a_{ij}, joka ilmoittaa pelaajan A hyväksi koituneen tuloksen.
3) Kumpikin pelaaja pystyy pelimatriisia tarkastelemalla toteamaan jokaisen mahdollisen siirtokombinaation (A_i, B_j) tuloksen.
4) Siirtopareja (A_i,B_j) voi olla äärettömän monta, jolloin matriisi, joka on koottu pelin tuloksen ilmoittavista luvuista a_{ij}, on kaikkien siirtojen yhteydessä sama.
5) Kumpikin pelaaja muistaa kaikki aikaisemmat toteutuneet siirtoparit.

Panssarikaksintaisteluesimerkkimme kohdalla voidaan edellisiin seikkoihin viitaten todeta seuraavaa:

1) Kummallakin pelaajalla on käytettävissään äärettömän monta strategiaa, pelaajalla A kaikki välin $[0,L_1]$ pisteet ja pelaajalla B kaikki välin $[0,L - L_1]$ pisteet. Periaatteessa kohta 1) on säilynyt muuttumattomana.
2) Pelaaja A suorittaa valintansa $x \in [0,L_1]$ ja pelaaja B valintansa $y \in [0,L - L_1]$ salassa. Pelin tulos on a(x,y) eli todennäköisyys, että pelaaja A voittaa kaksintaistelun.
3) Kummallakin panssarilla on käytettävissään funktio a(x,y).
4) Kohdan tulkinta on kuitenkin modifioitava: kukin panssarikaksintaistelu on luonteeltaan ainutkertainen. Nyt on ajateltava niin, että kahden panssarin kohtaamisia samalla aukealla tapahtuu hyvin monia ja panssarien toimintaa johdetaan paikasta johon taistelun kulku ei vaikuta.

Jos puoli B toteaa, että puolen A panssari jokaisessa tapauksessa laukaisee tarkalleen saman matkan ajettuaan, hän sovittaa oman panssarinsa toiminnan tämän tiedon mukaisesti tavalla, joka voi olla vain epäeduksi puolelle A. Puolen A on siis jollakin tavoin vaihdeltava valintaansa (samoin tietenkin puolen B). On luonnollista, että puolella A pyritään siihen, että tuhottujen puolen B vaunujen lukumäärän keskiarvo on mahdollisimman suuri. Puoli B pyrkii saamaan tämän lukumäärän mahdollisimman pieneksi.

Olkoon nyt a(x,y) jokin muuttujien x ja y funktio, jolloin $x \in [0,1]$ ja $y \in [0,1]$. Aivan samoin kuin edellä tavallisen matriisipelin kohdalla on voimassa

$$\max_x \min_y a(x,y) \leq \min_y \max_x a(x,y)$$

jolloin pelaajan A hyväksi koituu vähintäin määrä $\max_x \min_y a(x,y)$

ja pelaaja B menettää enintään määrän $\min_y \max_x a(x,y)$.

Luonnollisesti haluaa kumpikin pelaaja parantaa tulostaan ja ilmeisesti ainoa tapa on jälleen strategioiden $x \in [0,1]$ ja $y \in [0,1]$ valitseminen satunnaisesti: pelaaja A pyrkii löytämään todennäköisyystiheyden f(x) ja pelaaja B todennäköisyystiheyden g(y) siten, että peli sujuu keskimäärin parhaalla mahdollisella tavalla. Strategian x valinta tapahtuu nyt seuraavasti, jotakin satunnaisvalintalaitetta soveltaen: hyvin lyhyeen väliin $[x, x + dx]$ kuuluva x-arvo tulee todennäköisyydellä f(x)dx. Samoin väliin $[y, y + dy]$ osuva y-arvo saadaan todennäköisyydellä g(y)dy. Kun siirtoja on suoritettu äärettömän monta tulee pelin tuloksen keskiarvoksi luku

$$A(f,g) = \int_0^1 \int_0^1 a(x,y)\, f(x)\, g(y)\, dx\, dy.$$

Todennäköisyystiheydet f(x) ja g(y) merkittiin keskimääräisen tuloksen parametreiksi, mitä ne tietenkin ovat. Jos pelaaja A voi valita todennäköisyystiheyksiään joukosta F ja pelaaja B omiaan joukosta G, on yleensä, kuten voidaan näyttää

$$\max_{f \in F} \min_{g \in G} A(f,g) \leq \min_{g \in G} \max_{f \in F} A(f,g)$$

Vaikuttaa siis siltä, että pelin optimoiminen ei olisi lainkaan edistynyt. Voidaan kuitenkin todistaa verraten yleisin olettamuksin funktion a(x,y) suhteen, että on olemassa sellaiset todennäköisyystiheydet $f^* \in F$ ja $g^* \in G$ että

$$\max_{f \in F} \min_{g \in G} A(f,g) = \min_{g \in G} \max_{f \in F} A(f,g) = A(f^*,g^*)$$

Päädyttiin siis samanluonteiseen tulokseen kuin edellä tavallisen matriisipelin kohdalla. Samoin perusteluin kuin aikaisemminkin, voidaan nyt perustella se tosiasia, että pelaajista kumpikaan ei saa poiketa optimitodennäköisyyslaistaan.

Eräänä peliteorioiden sovellutusalueena ovat miinoitukset sekä näiden raivaamiseen liittyvät kysymykset. Tästä seuraava esimerkki.

E s i m e r k k i 3. Ajatellaan, että pelaajan A pyrkimyksenä on miinoittaa pelaajan B laivaväylä. Väylän pituus on L ja pohjamiinoja on käytettävissä N kappaletta. Jokainen miina voidaan virittää räjähtämään vasta useamman aluksen kuljettua miinan ylitse. Olkoon i lukumäärä miinan ylityskertoja, jolloin i saa jonkin arvoista 0, 1, . . . , m. Väylä jaetaan osiin, joissa raivaus voidaan suorittaa useampia kertoja, kuitenkin korkeintaan n kertaa. Raivauksen vaikutusta pohjamiinaan kuvataan todennäköisyydellä p_{ij} missä i = 0, 1, . . . , m ja j = 0, 1, . . . , n. Luku p_{ij} ilmoittaa todennäköisyyden sille, että miina tuhoaa yläpuolelleen ajaneen laivan, kun miina oli viritetty ylityslukumäärälle i ja kun raivauskertoja on ko. pohjamiinan seutuville tehty j kappaletta. Todennäköisyydet p_{ij} on saatu joko teoreettisin laskuin tai kokeellisesti. Miinoittaja päättää miinoittaa väylän pohjamiinoilla siten, että miinat jaetaan tasaisesti väylälle ja niin, että osa x_i pohjamiinoista, i = 0, 1, . . . , m on viritetty siten, että miina räjähtää vasta kun järjestyksessä i's laiva ylittää miinan. Tällöin ilmeisesti on

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \qquad x_i \geq 0$$

Puoli B päättää jakaa väylänsä osiin, joissa kussakin tullaan suorittamaan useampia raivauksia, raivauskertojen lukumäärän ollessa korkeintaan n. Tarkemmin sanoen, väylä jonka pituus on L jaetaan osiin l_i, jotka numeroidaan i = 0, 1, . . . , n, jolloin väylän osassa l_i suoritetaan raivauksia kaikkiaan i kappaletta. Huomattakoon, että osat l_i eivät ole välttämättä yhtäsuuria.

Merkitään $y_i = \dfrac{l_i}{L}$, missä i = 0, 1, . . . , n,

jolloin ilmeisesti $\sum_{i=0}^{m} y_i = 1,\ y_i \geq 0.$

Puolen A strategiana on vektori $(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ ja puolen B strategiana vektori $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$. Todennäköisyydelle, että väylää kulkeva laiva tuhoutuu miinoitukseen saadaan seuraava lauseke:

$$a(x,y) = 1 - \exp(-N \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_i p_{ij} y_j)$$

Puoli A haluaa valita strategiansa siten, että funktio a(x,y) saa suurimman mahdollisen arvon, kun taas puoli B haluaa onnistua valitsemaan sellaisen vektorin (y_0, $y_1, \ldots, y_n$) että a(x,y) saa mahdollisimman pienen arvon. Kun optimistrategiat merkitään tähdellä, huomataan että optimistrategiaehto

$$a(x,y^*) \leq a(x^*,y^*) \leq a(x^*,y),$$

jonka tulee olla voimassa kaikille vektoreille ($x_0, x_1, \ldots, x_m$) sekä kaikille vektoreille ($y_0, y_1, \ldots, y_n$) toteutuu kun

$$\sum x_i p_{ij} y_j^* \leq \quad \sum x_i^* p_{ij} y_j^* \leq \quad \sum x_i^* p_{ij} y_j$$

Tässä erikoistapauksessa ääretön matriisipeli palautui tavalliseksi matriisipeliksi.

Tarkastellaan numeroesimerkkinä tapausta missä L = 20 meripeninkulmaa, käytettävissä olevien pohjamiinojen lukumäärä 100 ja suurin mahdollinen lukumäärä raivauksia raivausalueelle 4. Edelleen oletetaan, että $p_{ii} = 0{,}01$ ja että $p_{ij} = 0$ kun $i \neq j$. Ratkaisuksi saadaan, tavalla johon tässä ei puututa,

$$x_0^* = x_1^* = x_2^* = x_3^* = x_4^* = \frac{1}{5}$$

ja

$$y_0^* = y_1^* = y_2^* = y_3^* = y_4^* = \frac{1}{5}$$

Miinat viritetään siis seuraavasti: 20 miinaa räjähtää välittömästi ensimmäisen ylityksen yhteydessä, 20 miinaa räjähtää vasta toisella ylityskerralla, 20 miinaa räjähtää kolmannella ylityskerralla, 20 miinaa räjähtää neljännellä ylityskerralla ja 20 miinaa viidennellä ylityskerralla. Näin viritetyt miinat sijoitetaan laivaväylälle tasaisesti kukin viritystyyppi muista täysin riippumattomalla tavalla. Puoli B taas jakaa väylän viiteen yhtäpitkään osaan jolloin osalla 1 ei raivata lainkaan, osalla 2 raivataan kerran, osalla 3 raivataan kaksi kertaa, osalla 4 raivataan kolme kertaa ja osalla 5 raivataan neljä kertaa. Nämä välit valitaan satunnaisesti laivaväylältä.

Jos esimerkin parametrit tunnettaisiin riittävän hyvin ja jos kysymyksen asettelu vastaisi riittävän hyvin todellisuutta, saataisiin esimerkin menettelyllä yleispätevä miinoitus- ja raivausohje. Jälleen tulee muistaa, että peliteoreettisen tarkastelun antamasta ratkaisusta ei kummankaan puolen tule poiketa.

Seuraavassa esimerkissä tarkastellaan rajanvartiointiin liittyvää probleemaa.

E s i m e r k k i 4. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että rajan pituus on yksi. Puoli A haluaa päästä rajan läpi jostakin sen pisteestä $x \in [0,1]$. Puoli B, joka vartioi rajaa, haluaa sijoittaa yhden rajavartijan johonkin pisteeseen $y \in [0,1]$ toteamaan ja pysäyttämään rajan ylittäjän. Rajanylitysyritysten oletetaan toistuvan säännöllisin välein. Tästä syystä ei puolen A tule toimia ilmeisen samalla tavoin eri kerroilla, eikä puolen B tule sijoittaa rajavartijaa aina samoille paikkeille. Olkoon a(x,y) todennäköisyys, että rajavartija havaitsee pisteestä y kohdasta x rajaa ylittävän puolen

A tunkeutujan. Koska havaitsemisen todennäköisyys ilmeisesti riippuu rajavartijan vartiopaikan ja rajanylittäjän tulokohdan välimatkasta, on luonnollista olettaa, että todennäköisyys $a(x,y)$ on välimatkan funktio: $a(x,y) = f(|x-y|)$. Jos kuitenkin todennäköisyys riippuu lisäksi maastosta rajanylittäjän ja rajavartijan vaiheilla, on todennäköisyys jotakin muotoa $a(x,y) = f_1(x,y,|x-y|)$. Oletetaan kuitenkin, että riittävällä tarkkuudella on

$$a(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ kun } |x-y| \leq d,\ 0 < d \leq 1 \\ 0 \text{ kun } |x-y| > d \end{cases}$$

Vakio d on suurin mahdollinen havaitsemisetäisyys.

Jos $d \geq ½$, on tehtävällä yksinkertainen ratkaisu: rajavartija tulee sijoittaa pisteeseen $y^* = ½$, jolloin rajanylittäjä havaitaan aina. Tällöin on mielivaltainen rajan piste rajanylittäjän optimaalinen rajanylityskohta.

Oletetaan nyt, että $d < ½$. Pelin ratkaiseminen on nyt monimutkaisempi tehtävä. Menemättä taaskaan ratkaisumetodiikkaan, todetaan, että pelillä on seuraava ratkaisu: Rajavartijan tulee valita satunnaisesti jokin pisteistä

$$x_i = d + \frac{1-2d}{n-1}(i-1),\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

jolloin jokaisen pisteen tulee olla yhtä todennäköinen, ja tämän jälkeen toimia näin valitun pisteen lähiympäristössä. Puolen A tulee taas valita rajanylityskohdaksi jokin pisteistä

$$y_j = \frac{j-1}{n-1},\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

jolloin valinta tulee suorittaa satunnaisvalintana siten, että kunkin pisteen todennäköisyys valinnassa on sama.

Pelitehtävä ei mutkistu paljoakaan, kun yhden rajavartijan asemesta rajalle sijoitetaan k rajavartijaa, joihinkin pisteisiin $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Pelin tulosta kuvatkoon jälleen funktio, joka ilmoittaa todennäköisyyden, että rajanylittäjä havaitaan. Tähän riittäköön se, että ainakin yksi rajavartijoista tekee havainnon. Tällöin voidaan pelin tulosfunktioksi valita seuraava:

$$a(x_1, \ldots, x_k, y) = \begin{cases} 1 \text{ kun } \min\limits_i (|x_i - y| \leq d) \\ 0 \text{ kun } \min\limits_i (|x_i - y| > d) \end{cases}$$

Osoittautuu, että optimaalisina rajavartijan sijoituspisteinä ovat jälleen edellisen tapauksen pisteet

$$x_i = d + \frac{1-2d}{n-1}(i-1),$$

missä $i = 1, 2, \ldots, n$. Jos rajavartijoita on käytettävissä enemmän kuin pisteiden lukumäärä eli $k \geq n$, havaitaan rajanylittäjä aina kun jokaisessa edellisistä havaintopisteistä on rajavartija. Tästä syystä on luonnollista olettaa, että $k < n$. Rajanylittäjän optimiylityskohdaksi osoittautuu saman säännön mukaan suoritettu valinta kuin edellä tapauksessa, jossa rajavartijoita oli vain yksi. Puolen B optimistrategiaksi osoittautuu sijoittaa kuhunkin valittuun havaintopisteeseen vain yksi rajavartija, jolloin havaintopisteet tulee valita satunnaisesti pisteistä

$$x_i = d + \frac{1 - 2d}{n - 1}(i - 1), i = 1, 2, \ldots, n$$

siten, että jokaisella pisteellä on sama todennäköisyys tulla valituksi.

Rajavartijaesimerkki on tyypillinen sellainen peliteorian sovellutus, jota kehittämällä voidaan löytää käytännössä soveltuva menettely.

4. PELIT, JOISSA PELAAJIEN INTRESSIT EIVÄT OLE TÄYSIN VASTAKKAISET

Pelitilanteelle saattaa olla luonteenomaista, että kukin pelaajista haluaa hyötyä pelistä kenelläkään olematta tarvetta vastapuolen tai vastapuolten tuhoamiseen. Tällöin on pelille luonteenomaista, että

1) Pelaajien eturistiriita ei ole vihamielinen.
2) Pelin pelaaja ei saa tehdä toisia pelaajia sitovia päätöksiä.
3) Pelaajat toimivat edelleenkin toisiltaan salassa, valinnat tulevat tietoon samanaikaisesti.
4) Molemmilla pelaajilla on tarkka tieto kaikesta, mihin vastapuoli rakentaa toimintansa, siirtojen valintaa lukuunottamatta.

Tarkastellaan tapausta, missä pelaajia on kaikkiaan N kpl ja joilla kullakin on oma sekastrategiansa $X_1, X_2. \ldots, X_n$. Tällöin voi eri sekastrategioissa olla erilaiset lukumäärät komponentteja. Edelleen, kullakin pelaajalla on oma yksilöllinen tulosfunktionsa: $H_i (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, jolloin tämän luvun ilmoittama määrä koituu pelaajan i eduksi. Jokaisen pelaajan pelistä saama hyöty riippuu paitsi pelaajan omasta sekastrategian valinnasta jokaisen muun pelaajan valinnasta. Osoittautuu, että peliin liittyy tietty sekastrategioiden joukko josta kukin pelaaja voi lukea oman optimaalisen sekastrategiansa. Tätä pistettä kutsutaan tasapainopisteeksi tai Nashin pisteeksi. Tasapainopisteen määrittelemiseksi merkitään

$(X \| x_i) = (X_1, \ldots, X_{i-1}, x_i, X_{i+1} +, \ldots, X_n)$, missä x_i on pelaajan i jokin puhdas strategia. (Jos esimerkiksi pelaajan *i* strategiat ovat $A_1, A_2. \ldots, A_{ki}$, tarkoittaa puhdas strategia x_2 sitä, että pelaaja *i* soveltaa koko ajan strategiaa A_2 riippumatta siitä mitä muut pelaajat tekevät). Edelleen on luontevaa merkitä

$H_i (X^\cdot, X^\cdot_2, \ldots, X^\cdot_n) = H_i (X^\cdot)$.

Piste $X^\cdot = (X^\cdot \ldots, X_n^\cdot)$ on nyt pelin tasapainopiste edellyttäen, että

$H_i(X^\cdot \| x_i) \leq H_i (X^\cdot)$,

kaikille i = 1, 2, . . . , n ja kunkin indeksin i kohdalla kaikille puhtaalle strategioille x_i. Voidaan osoittaa, että pelaajista kukaan ei saa poiketa tasapainopisteen ilmoittamasta sekastrategiastaan. Edelläkuvatulla pelillä on lisäksi aina tasapainopiste. On merkille pantavaa, että tasapainopisteelle on jälleen luonteenomaista, että se pakottaa kaikki pelaajat käyttämään jonkinlaista sekastrategian toteuttavaa arpomislaitetta. Yksityisen pelaajan taito ja harkinta eivät voi vaikutaa pelin kulkuun.

Tarkastellaan edellistä pelitilannetta esimerkin avulla.

Esimerkki 5. Joen varressa on kaikkiaan n tehdasta, jotka kaikki ottavat joesta vettä raaka-aineeksi ja jotka kaikki laskevat osan likavedestä takaisin jokeen. Olkoon kunkin tehtaan joesta ottaman veden kokonaismäärä 1 ja merkitään, tehtaan i kohdalla, jokeen palautetun likaveden määrä x_i. Tällöin siis $x_i \in [0,1]$ kaikille i = 1, 2, . . . , n. Edellä tarkoitetaan esimerkiksi vuorokautista veden ottoa ja puhdistusta. Joen ajatellaan likaantuneen siinä määrin, että jokaisen tehtaan on lisättävä laitteistoonsa veden puhdistamo silloin, kun $\sum_{i=1}^{n} x_i > a$, missä a on jokin vakio. Tehdas i siis puhdistaa vesimäärän $1-x_i$. Jos kustannukset tästä ovat $\underline{a}_i$ tilavuusyksikköä kohden, ovat tehtaan i vuorokautiset puhdistuskustannukset $\underline{a}_i(1-x_i)$. Tehtaan i vuorokautiset kustannukset ovat siis kuvattavissa seuaavalla funktiolla:

$$M_i(x_i, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \underline{a}_i(1-x_i), \text{ kun } \sum x_i \leq a \\ \underline{a}_i(1-x_i) + c_i, \text{ kun } \sum x_i > a, \end{cases}$$

missä c_i on tehtaalle i aiheutunut lisäkustannus siitä, että vesi joessa on likaantunut yli sallitun rajan. Koska edellä pelin tulosfunktioksi määriteltiin jotakin kunkin pelaajan eduksi koituvaa, saadaan ylläolevasta tappiofunktiosta tulosfunktio etumerkkiä vaihtamalla:

$$H_i(x_i, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} -\underline{a}_i(1-x_i), \text{ kun } \sum x_i \leq a \\ -\underline{a}_i(1-x_i) - c_i, \text{ kun } \sum x_i > a. \end{cases}$$

Pelaajan i puhtaiden strategioiden joukko on koko väli $[0,1]$, missä siis $x_i \in [0,1]$. Jos pelillä on puhtaista strategioista koostuva tasapainopiste $X^* = (x^*, x^*_2, \dots, x^*_n)$ kuuluu tasapainoehto aikaisemmin esitetyn perusteella

$$H_i(X^* \| x_i) \leq H_i(X^*)$$

Jos tällainen piste löydetään, ei sekastrategioita tietenkään tarvitse lähteä etsimään-kään.

Peli on helppo ratkaista tapauksessa että $\underline{a}_1 = \underline{a}_2 = \dots = \underline{a}_n = \underline{a}$ ja että $c_1 = c_2 = \dots c_n = c$. Saadaan tasapainopiste

$$X^* = \begin{cases} \left(\frac{a}{n}, \frac{a}{n} \cdots \frac{a}{n}\right) \text{ kun } \underline{a}\left(1-\frac{a}{n}\right) \leq c. \\ (1, 1 \cdots 1 \text{ kun } \underline{a}\left(1-\frac{a}{n}\right) > c. \end{cases}$$

Siis, jos $1-\frac{a}{n} \leq \frac{c}{\underline{a}}$ puhdistaa jokainen tehdas osan $1-\frac{a}{n}$ jokeen laskemastaan vedestä ja jos $1-\frac{a}{n} > \frac{c}{\underline{a}}$, joutuu jokainen tehdas puhdistamaan kaiken jokeen laskemansa veden.

5. YHTEISTOIMINTAPELIT

Usein ovat eturistiriitatilanteet sellaisia, että osapuolet eivät ole toisilleen vihamielisiä. Tällöin osapuolet voivat saavuttaa hyötyä siitä, että ne muodostavat liittoutumia. Edellä todettiin, että sellaisessa pelissä, missä minkäänlaista yhteistoimintaa toiminnan varsinaisessa mielessä ei esiinny, paras tilanne kaikille on tasapainopiste, Nashin piste. Kenenkään pelaajista ei tällöin kannata poiketa matemattisesti lasketusta tasapainopisteen osana olevasta strategiastaan. Jos kuitenkin suurempi joukko, itse asiassa jo kaksi pelaajaa on tällainen joukko, poikkeaa Nashin pisteestä, saattavat poikkeajat hyötyä poikkeamastaan.

E s i m e r k k i 6. Olkoon pelaajia kaksi A ja B, joiden matriisit ovat vastaavasti

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Osoittautuu, että Nashin piste on (0,0), joka vastaa kummallakin pelaajalla toista puhdasta strategiaa: A_2 ja B_2. Kumpikin pelaaja voittaa tällöin määrän 1. Jos kuitenkin pelaajat sopivat siitä, että kumpikin käyttää koko ajan puhdasta strategiaansa numero yksi, siis strategioita A_1 ja B_1, saadaan kummallekin ykkösen asemesta voitoksi 5. Siirtopari (A_1B_1) on kuitenkin labiili siinä mielessä, että kumpikin pelaaja lisäisi voittoaan poikkeamalla sovitusta strategiasta.

Yhteistoimintapeliä voidaan vaivatta tarkastella yleisessä tapauksessa. Merkitään pelaajat, joita oletetaan olevan n kpl, numeroilla 1, 2, . . . , n. Pelaajien joukko on siis $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Joukon I alkioista voidaan muodostaa eri tavoin liittoja jollaista merkitään kirjaimella S. Pelissä koituu siirrosta tai keskimäärin pitkässä jonossa siirtoja erään funktion $v(\cdot)$ mukainen voitto, joka liiton S kohdalla on $v(S)$. Funktio $v(\cdot)$ on joukkofunktio joka on määritelty jokaiselle joukon I alkiolle ja jokaiselle näistä kootulle liitolle. Merkitään joukon I alkiota i, kun se nähdään eräänä joukon I alijoukkona, merkinnällä $\{i\}$. Jos nyt S ja T ovat kaksi joukon I alkioista muodostettuja joukkoja, joilla ei ole yhteisiä alkioita, voidaan osoittaa, että voimassa on epäyhtälö

$$v(S) + v(T) \leq v(SUT),$$

missä SUT tarkoittaa joukkoa, jonka alkio on peräisin joko joukosta S tai joukosta T. Epäyhtälö sisältää edellä jo mainitun tosiasian, että liittoutuminen saattaa hyvinkin kannattaa. Jos siis

$$v(S) + v(T) < v(SUT)$$

on pelaajien T ja S syytä liittoutua. Jos taas

$$v(S) + v(T) = v(SUT),$$

ei liittoutumisesta ole hyötyä. Olkoot, jälleen joukko-opin merkintöjä soveltaen,

$S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k = I, \; k < n,$

jolloin millään parilla S_i ja S_j ei ole yhteisiä alkioita. Silloin on edellisen mukaan, kuten helposti nähdään

$$v(S_1) + v(S_2) + \ldots + v(S_k) \leq v(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k) = v(I).$$

Erikoisesti, jos joukoiksi $S_1, S_2, \ldots, S_k$ otetaan joukon I alkiot, eli joukot $S_i = \{i\}$, saadaan

$$v(\{1\}) + v(\{2\}) + \ldots + v(\{n\}) \leq v(I).$$

Epäyhtälössä tarkoittaa luku $v(I)$ sitä tulosta, joka on pelissä suurin mahdollinen kun kaikki pelaajat liittoutuvat yhdeksi kokonaisuudeksi. Pelaajat sopivat kaikista toimistaan ja noudattavat tätä sopimusta koko pelin ajan. Jos

$$v(\{1\}) + v(\{2\}) + \ldots + v(\{n\}) = v(I),$$

on kysymyksessä tapaus, missä liittoutumiseen ei ole kenelläkään mitään aihetta. Perustelut yhteistoimintapelin muodostumiselle ovat kuitenkin olemassa, jos

$$v(\{1\}) + v(\{2\}) + \ldots + v(\{n\}) < v(I).$$

Tällöin siis täydellisen liittoutumisen tuoma tulos koko pelaajajoukolle on parempi kuin jos kukin pelaaja toimisi yksikseen ja yksityisten pelaajien voitot laskettaisiin yhteen. Epäyhtälöstä johtuen voidaan nyt otaksua joidenkin liittoutumien johtavan tilanteeseen, jossa yhtäläisyysmerkki on voimassa:

$$v(S_1) + v(S_2) + \ldots + v(S_k) = v(I),$$

kun on muodostettu liittoutumat $S_1, S_2, \ldots, S_k$.

Nyt luonnollisesti tulee eteen kysymys siitä, mitä kukin yksityinen pelaaja hyötyy mahdollisesta liittoon menemisestään. Jos nimittäin kävisi ilmeiseksi, että yksityisen pelaajan i saama voitto $v(\{i\})$ ei mistään liittoutumisesta paranisi, ei hän ilmeisestikään pohtisi liittoutumisen ajatusta lainkaan.

Yhteistoimintapelien teoriassa määritellään tässä vaiheessa jakovektori $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jonka alkio x_i ilmoittaa pelaajan i osuuden pelin tuloksesta. Jokainen pelaaja asettaa nyt ehdottoman vaatimuksen, että jaon tulee tapahtua siten, että

$$x_i \geq v(\{i\}), \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Tällöin on edelleen jakovektorille ominaista että

$$\sum_{i \in I} x_i = v(I).$$

Todellakin, jos voimassa olisi epäyhtälö

$$\sum_{i \in I} x_i < v(I),$$

voitaisiin jakovektorin $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ alkioista joitakin suurentamalla päästä yhtälöön

$$\sum_{i \in I} x_i = v(I).$$

Tilanne

$$\sum_{i \in I} x_i > v(I)$$

on tietenkin mahdoton todellisuudessa.

Edelliset seikat kooten voidaan todeta, että jako $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on mahdollinen silloin ja vain silloin, kun

$$x_i = v(\{i\}) + \underline{a}_i, \; i \in I,$$

jolloin

$$\underline{a}_i \geq 0, \; i \in I \text{ ja } \sum_{i \in I} \underline{a}_i = \triangledown v(I) - \sum_{i \in I} v(\{i\}).$$

Koska jakovektoreita voidaan periaatteessa esittää ääretön määrä, on yhteistoimintapelin teorian puitteissa verrattava jollakin johdonmukaisella tavalla erilaisia vaihtoehto-jakovektoreita. Aluksi todettakoon, että yhtälön

$$v(I) = \sum_{i \in I} \triangledown v(\{i\})$$

ollessa voimassa saadaan yksi ainoa mahdollinen jakovektori, nimittäin $X = (v(\{1\}), v(\{2\}), \ldots, v(\{n\}))$. Tämä seuraa suoraan epäyhtälöstä $x_i \triangledown \geq v(\{i\})$. Jako $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on liiton S kannalta edullisempi kuin jako $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, jos

$$x_i > y_i, \; i \in S.$$

Tämä on luontevaa merkitä $X \succ_S Y$, jolloin merkinnästä näkyy sekä paremmuusjärjestys että se liitto, jonka puitteissa paremmuussuhde on voimassa.

Edellä oli jako X parempi kuin jako Y nimenomaan jo olemassaolevan liiton S puitteissa. Edelleen on kuitenkin selvittämättä miten sanotut liitot laadittaisiin kaikelta siltä pohjalta mikä edellä esitettiin.

On luontevaa ajatella seuraavasti. Oletetaan, että jako $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on valittu, samoin mahdolliset liitot, ja halutaan vielä kerran tarkistaa, että jako liittoihin ja jako yksityisten pelaajien kannalta ovat parhaat mahdolliset. Jos nyt löydetään vielä sellainen jako Y ja sellainen liittoutuma S, että $Y \succ_S X$, ei aikaisempi jakovektoriliittoutumat järjestelmä vielä ollut lopullinen.

Käytännön laskualgoritmeihin johtava yhteistoimintapelien teoria rakentuu paljolta edelläesitettyyn. Tarkastellaan seuraavaa meritoimintaan liittyvää esimerkkiä.

E s i m e r k k i 7. Tietyllä valtamerialueella toimii kaikkiaan n kappaletta sotaakäyviä maita, jotka yhdessä toimivat samaa vastustajaa vastaan. Nämä voimat haluavat rakentaa sanotulle merialueelle polttoainehuoltojärjestelmän, jolloin keskeisenä tehtävänä on polttoainesäiliöiden rakentaminen. Jollakin tavoin on tiedossa, että polttoainetta tullaan tarvitsemaan ajankohtina $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Jokainen laivasto tarvitsee näinä ajankohtina polttoainetta oman lakinsa $F_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ mukaan. Esimerkiksi hetkenä t_k tarvitsee maan i laivasto polttoainetta määrän $f_i(t_k)$. Sellaisen säiliön tilavuus, joka tyydyttäisi kaikkien ko. maiden laivastojen polttoaineen tarpeen, olisi ilmeisesti $\max_j \sum_{i=1}^{n} f_i(t_j)$. Nyt voivat säiliöiden tarvitsijat muodostaa liittoja, jotka rakentavat yhteisen polttoainesäiliön. Jos tällainen liitto merkitään edelliseen tapaan S, tyydyttää tämän liiton polttoaineen tarpeen säiliö, jonka tilavuus on

$$\max_j \sum_{i \in S} f_i(t_j).$$

Nyt on luonnollista olettaa tällaisen säiliön kustannusten olevan jokin säiliön tilavuuden V kasvava funktio F(V).

Koska liitto haluaa mahdollisimman halvan säiliön ja koska pelin tulosfunktio edellisessä yleisessä tarkastelussa määriteltiin edulliseksi silloin, kun sen arvo on suuri, on luontevaa määritellä liittoutumisen S tulos seuraavasti.

$$\mathcal{v}(S) = -F\left(\max_j \sum_{i \in S} f_i(t_j)\right)$$

Säiliöiden rakentamisprobleema on tällä tavoin palautunut yhteistoimintapeliksi, jossa on n osanottajaa.

Edellisen esimerkin yhteydessä nähtiin miten pelin kululle ilmeisen keskeinen perustekijä, tulosfunktio $\mathcal{v}(S)$, määriteltiin. Peliteorian käytännön soveltamista ajatellen onkin todettavissa, että kussakin pelitapauksessa tulosfunktio laaditaan niiden tietojen pohjalta, joita pelitilanteen asettamisen yhteydessä on käytettävissä.

Pelin ratkaisuna on oleva, aikaisemmin sanotun mukaan, jakovektori $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jota muuten kutsutaan peliteorian perustajien von Neumannin ja Morgensternin mukaan N-M ratkaisuksi. Konkreettisen menetelmän jakovektorin etsimiseksi, tai suorastaan määräämiseksi, on esittänyt Shapley. Kuten aikaisemmin sanotusta käy ilmi, riippuu jako $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yksinomaan peliin liittyvästä tulosfunktiosta $\mathcal{v}(S)$. Tästä syystä Shapley merkitsee $x_i = q_i \overline{\cup}[\mathcal{v}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, jolloin tulosvektori X voidaan kirjoittaa $Q[\mathcal{v}] = (q_1 \overline{\cup}[\mathcal{v}], \ldots, q_n [\mathcal{v}])$ ja asettaa tulosvektorille seuraavat aksioomat:

Aksiooma 1) $\sum_{i=1}^{n} q_i[\mathcal{v}] = \overline{\cup}\,\mathcal{v}(I)$, mikä esitettiin jo edellä.

Aksiooma 2) Olkoon S mielivaltainen liitto, johon pelaaja i ei kuulu. Jos $\mathcal{v}(S \cup \{i\}) = \overline{\cup}\,\mathcal{v}(S) + \overline{\cup}\,\mathcal{v}(\{i\})$, on $q_i \overline{\overline{\cup}}[\mathcal{v}] = \overline{\overline{\cup}}\,\mathcal{v}(\{i\})$.

Aksiooma 3) Pelaajien tietynlainen permutointi liitossa S ei aiheuta muutosta pelin tulokseen.

Aksiooma 4) Olkoon u ja $\mathcal{v}$ kaksi pelin tulosfunktiota, jotka siis liittyvät kahteen eri peliin. Silloin on $q_i[u + \mathcal{v}] = q_i[u] + q_i[\mathcal{v}]$.

Aksiooma 2 lausuu selvästi milloin pelaajan i on syytä pysytellä erillään liitosta. Shapley on näyttänyt, että ainoa mahdollinen jako $Q(v) = (q_1[\mathcal{v}], \ldots, q_n[\mathcal{v}])$, joka toteuttaa edelliset aksioomat on vektori, missä

$$q_i[v] = \sum_{\substack{S \in I \\ i \in S}} g_i(S)\,[v(S) - v(S - \{i\})]$$

missä

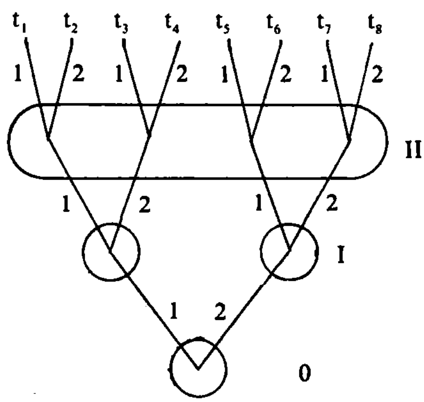
$$g_i[T] = \frac{1}{n!}(t - 1)!(n - t)!$$

Edellä esimerkissä 7 suorittivat pelaajat itse asiassa yhden siirron. Tämän tuloksena oli polttoainesäiliöjärjestelmä ko. merialueelle. On kuitenkin runsaasti esimerkkejä tapauksista, joissa siirtoja on hyvin monta ja jolloin tulosfunktiot ovat luonteeltaan keskiarvoja. Näissäkin tapauksissa johdetaan siis tulosfunktio, joka on perustekijänä Shapleyn vektoria muodostettaessa.

6. MONIVAIHEISET PELIT

Tähän asti ovat monivaiheiset pelit olleet pelejä, joissa peliolosuhteet eivät muutu pelin kuluessa. Esimerkiksi matriisipelissä on matriisi aina sama siirtoparista toiseen, jolloin kumpikin pelaaja valitsee siirtonsa kiinteän optimaalisen sekastrategiansa avulla. Edelleen tietoja siirtojen valinnoista ei kulje pelaajien välillä. Useasti on matriisipelin asettelu liian yksinkertainen soveltuakseen käytäntöön. Luonteva matriisipelin yleistys on monivaiheinen peli, josta seuraavana tyypillinen esimerkki.

E s i m e r k k i 8. Vastakkain ovat sukellusvene ja sitä etsivä helikopteri — ja luonto. Sukellusveneen mahdolliset strategiat ovat kaksi mahdollista toimintasyvyyttä, helikopterin strategiat ovat kuuntelupoijun käyttäminen ja herkän magnetometrin käyttäminen. Luonto osallistuu peliin siten, että meri voi olla äänen kulun kannalta kahdessa erilaisessa tilassa. Seuraavassa oletetaan, että vain sukellusvene pystyy mittaamaan meren tilan. Pelin kulkua kuvataan seuraavalla "puulla",



Kuva 5

jolloin peli alkaa puun tyvestä ja jolloin ensimmäisen ''siirron' tekee luonto: meri on joko tilassa 1 tai tilassa 2. Toisen siirron tekee sukellusvene, puoli A. Tällöin ollaan puussa tasolla I. Ympyrät tällä tasolla tarkoittavat sitä, että sukellusvene tietää kumpaa haaraa tasolle I tultiin tasolta 0. Kolmannen siirron tekee puoli B, sukellusvenettä etsivä helikopteri. Helikopterissa ei tiedetä mitään meren vesiakustisesta tilasta, siellä ei myöskään tiedetä sukellusveneen valitsemaa toimintasyvyyttä. Tästä syystä tason II lähtöpisteet on yhdistetty samaksi alueeksi. Helikopteri tekee tasoon II liittyvän siirron, jolloin päädytään johonkin pisteistä $t_1, \ldots, t_8$. Peli päättyy pisteiden $t_1, \ldots, t_8$ muodostamalle tasolle. Siirtojen seurauksia ei kuitenkaan ole vielä kuvattu. Samoin puuttuu peliltä vielä tulosfunktio. Pelaajan A menestystä kuvataan todennäköisyydellä että tämä jää löytymättä. Jos meri on tilassa 1, ovat todennäköisyydet että sukellusvene jää havaitsematta seuraavassa matriisissa:

$$H^1 = \begin{pmatrix} h_{11}^1 & h_{12}^1 \\ h_{21}^1 & h_{22}^1 \end{pmatrix}$$

missä h_{ij}^1 on todennäköisyys että syvyydessä i kulkeva sukellusvene jää löytymättä helikopterilta, joka käyttää etsintämenetelmää j. Jos meri on vesiakustisessa tilassa 2, kuuluu vastaava matriisi

$$H^2 = \begin{pmatrix} h_{11}^2 & h_{12}^2 \\ h_{21}^2 & h_{22}^2 \end{pmatrix}$$

Pelaaja A siis tietää kumpi matriisi on kysymyksessä, pelaajan B tietäessä vain, että toinen näistä on voimassa. Monivuotisista havainnoista tiedetään kuitenkin, millä todennäköisyydellä meri on tilassa 1 ja millä tilassa 2. Oletetaan näiksi todennäköisyyksiksi 1/3 ja 2/3

Pelaajalla A on nyt seuraavat puhtaat strategiat valittavinaan:

A_{11} : siirto 1 kummassakin tason I ympyrässä

A_{12} : siirto 1 jos tasolta 0 tultiin vasemmanpuoliseen ympyrään ja siirto 2 jos tultiin oikeanpuoliseen

A_{21} : siirto 2 tason I vasemmanpuolisesta ympyrästä lähdettäessä ja siirto 1 oikeanpuolisesta lähdettäessä

A_{22} : siirto 2 kummastakin tason I ympyrästä lähdettäessä.

Pelaajalla B on vain yksi siirto pelissä, jonka tämä tekee tasolla II. Vaihtoehtoina ovat valinnat 1 ja 2, eli siis turvautuminen akustisen poijun avulla suoritettuun kuunteluun ja magneettiset mittaukset. Peli on tasolle II tultaessa edennyt johonkin pisteistä b_1, b_2, b_3, b_4, mutta pelaaja B ei tiedä mihin. Tästä syystä valintoja on vain kaksi.

Oletetaan nyt matriiseille H^1 ja H^2 seuraavat muodot

$$H^1 = \begin{pmatrix} 0{,}30 & 0{,}50 \\ 0{,}20 & 0{,}30 \end{pmatrix} \text{ ja } H^2 = \begin{pmatrix} 0{,}30 & 0{,}40 \\ 0{,}60 & 0{,}20 \end{pmatrix}$$

Koko pelille saadaan nyt seuraava tulosmatriisi:

	B_1	B_2
A_{11}	0,30	0,43
A_{12}	0,50	0,30
A_{21}	0,27	0,37
A_{22}	0,47	0,23

Matriisissa saatiin esimerkiksi siirtoparia A_{12},B_1 vastaava todennäköisyys, että sukellusvene jää havaitsematta, luku 0,50, seuraavasti:

$$\frac{1}{3} \cdot 0{,}30 + \frac{2}{3} \cdot 0{,}6 = 0{,}50$$

missä ensimmäinen termi liittyy meren tilaan 1 ja toinen tilaan 2. Tarkasteltava peli on nyt palautunut tavalliseksi matriisipeliksi. Soveltamalla matriisipelin ratkaisemiseksi kehitettyjä menetelmiä päädytään seuraavaan sekastrategiaratkaisuun. Etsijähelikopterin tulee soveltaa vesikuuntelua kahdella kerralla viidestä ja magneettista mittausta kolmella kerralla viidestä, jolloin valinnat tulee suorittaa arpomalla edellisiä suhteita soveltaen. Sukellusveneelle, saadaan kaksi sekastrategiaa, yksi kummallekin meren akustiselle tilalle. Jos meri on tilassa 1, tulee sukellusveneen toimia pelkästään syvyydessä 1. Jos meri on tilassa 2, tulee sukellusveneen vaihdella syvyyksiä 1 ja 2 suhteissa 3/5 ja 2/5.

Monivaiheisen pelin luonne selviää pääkohdiltaan edelläkäsitellystä esimerkistä. Peli käynnistyy, kuten on tapana sanoa, luonnon tekemällä siirrolla. Esimerkissämme luonto asetti meren jompaankumpaan mahdollisista vesiakustisista tiloista. Tämän jälkeen pelaajat tekevät siirtonsa vuorottain pelin kulkiessa tällä tavoin tasolta tasolle lopputilaa kohden. Kunkin tason muodostavat ne pelin tilat, joihin pelipuun tyvestä lähdettäessä eri vaihtoehtojen teitä voidaan joutua. Nämä pisteet voidaan jakaa ryhmiin siten, että siirtovuorossa oleva pelaaja tietää mihin ryhmään peli on kulkeutunut. Jos jokaisessa ryhmässä on vain yksi alkio, muistaa kumpikin pelaaja täydellisesti pelin kulun. Pelissä on äärellinen määrä siirtoja ja pelin tulos tulee selväksi pelin edettyä lopputasolle.

7. DIFFERENTIAALIPELIT

Tyypillinen esimerkki differentiaalipelistä on pommikoneen ja hävittäjäkoneen välinen taistelu. Kumpaakin konetta ohjaa lentäjä, jonka toiminnasta lentokoneen käyttäytyminen riippuu. Lentäjien edut ovat vastakkaiset: pommikone pyrkii väistämään hävittäjäkoneen tulitusta ja hävittäjäkone luonnollisesti pyrkii ampumaan pommikoneen alas. Pelitilanne on siis olemassa. Differentiaalipeliksi peliä kutsutaan siitä syystä, että kummankin lentokoneen liikeyhtälöt ovat differentiaaliyhtälömuotoisia. Lentäjät tietävät tietyllä hetkellä ainoastaan vastustajan paikan, lentosuunnan ja ehkä lentonopeuden. Lisäksi on tietoja lentokoneen ominaisuuksista. Kumpikin lentäjä joutuu tekemään ohjauspäätöksensä siltä pohjalta, mitä vastustajan liikehtimisestä näkee päätöksentekohetkellä.

E s i m e r k k i 9. Olkoon takaa-ajettu hetkenä t pisteessä, joka annetaan koordinaatteina $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ sekä olkoot nopeuden komponentit $(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t))$. Yhdistetään nämä tilavektoriksi

$$X = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3\ (t)$$

Olkoon takaa-ajajan vastaava vektori

$$Y = (y_1(t), y_2(t), y_3(t), \dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t), \dot{y}_3(t))$$

Takaa-ajetun liikkeen differentiaaliyhtälö on muotoa

$$\frac{dX}{dt} = f(X,U)$$

ja takaa-ajajan liikeyhtälö samantyyppistä muotoa

$$\frac{dY}{dt} = g(Y,V)$$

Yhtälöissä ovat U ja V vektoreita, joiden komponenteiksi on koottu erilaiset ohjaustoimenpiteet. Niinpä lentokoneen kohdalla vektorien U komponentteja voivat olla ohjauslaitteiden asennon ilmoittavat parametrit ja kaasuvivun asento. Takaa-ajettu on hetkenä $t = 0$ tilassa $X_0 = X(0)$, ja takaa-ajajan samana hetkenä tilassa $Y_0 = Y(0)$. Jos annetaan tietty aikaväli T, jona toiminta tulee tapahtumaan, toivoo takaa-ajettu välimatkan $\|X(T) - Y(T)\|$ olevan mahdollisimman suuren ja takaa-ajaja mahdollisimman pienen. Koska välimatka $\|X(T) - Y(T)\|$ riippuu edelläolevien differentiaaliyhtälöiden kautta kummankin ohjaustoimenpiteistä eli vektoreista U ja V, voidaan merkitä

$$M(U,V) = \| X(T) - Y(T) \|,$$

jolloin saatiin pelin tulosfunktio.

Edellinen informaatio tuskin vielä riittää minkään käytännön differentiaalipelin asettamiseen. Lisäksi tulee joukko rajoituksia. Liikehtiminen tapahtuu aina maan pinnan yläpuolella, suurin kulmakiihtyvyys määräytyy rakenteiden lujuuksista ja mahdollisen kuljettajan kestävyydestä jne. Differentiaalipelin ratkaiseminen on aina erittäin vaikea tehtävä, mutta tehtävän tärkeydestä johtuen tarvittavaa metodiikkaa on varmasti runsaasti olemassa.

8. LOPUKSI

Peliteorioita arvostellaan usein sanoen, että ne eivät ole auttaneet paljoakaan käytännön päätöksenteossa. Koska sotilaalliset sovellutukset, joita varmasti on runsaasti, pysyvät salaisina, ei peliteorioiden sovellutusten menestyksestä voitane paljoakaan lukea kirjallisuudesta. Sama pitänee paikkansa myös liike-elämän sovellutusten kohdalla.

Peliteorioiden käyttökelpoisuuteen viittaa kuitenkin se tavaton tutkimuspanos, joka maailmalla suunnataan peliteorioiden kehittämiseen. Eräässä ajan 1975—1981 kattavassa kirjallisuusluettelossa on yli 2 000 tutkimusta. Peliteorian pääsuunnista löytää tietoja alan teoreettisesta kirjallisuudesta, konkreettisia sovellutuksia sen sijaan vähemmän. Tämä johtuu varmaankin peliteorian lähtökohdasta: aina on olemassa jossakin sellainen taho, jolle konfliktitilanteeseen kehitettyä päätöksentekometodiikkaa ei haluta esitellä.

KIRJALLISUUTTA:

1. Wenzel, F. S. Peliteoria. Moskova 1958 (venäjänkielinen)
2. Dresher, M., Games of Strategy: Theory and applications, Prentice Hall, 1961.
3. Djubin, G. H. ja Suzdal, V. G., Johdatus soveltavaan peliteoriaan, Kustantamo Nauka, Moskova 1981 (venäjänkielinen).
4. Suzdal, V. G., Peliteorian soveltaminen laivaston problematiikkaan, Sotatieteellinen kustantamo, Moskova 1967 (venäjänkielinen).
5. Hajek O, Pursuit Games, Academic Press, New York 1975.
6. Aubin J. P., Mathematical Methods of Game and Economic Theory, North Holland, 1979.
7. Davidov, E. G., Antagonististen pelien teorian menetelmiä ja malleja. Moskovan yliopiston kustantamo, 1978 (venäjänkielinen).