

MATEMAATTISIA KESKUSTELUJA TEKÖÄLYN KANSSA – ONKO CHATGPT:STÄ OPPAAKSI MATEMATIIKAN OPPIMISESSA?



Tekoäly on tulossa osaksi oppimisen arkea. Kävin keskusteluja tekoälyn kanssa muun muassa eräiden matemaattisten lauseiden todistamisesta selvittääkseni, miten tekoälyä voisi käyttää matematiikan oppimisen tukena. Millaisia mahdollisuuksia tai uhkakuvia tekoälyn käyttöön liittyy?

Marraskuussa 2022 julkaistu ChatGPT on tietokoneohjelma, joka pystyy keskustelemaan usealla eri kielellä arkisista mutta myös asiantuntijatasen kysymyksistä. Se on kielimalli, joka perustuu numeeriseen laskentaan siitä, millä todennäköisyyksillä sanoista muodostetut jonot esiintyvät erilaisissa yhteyksissä.

ChatGPT ei ole ainoa ihmisten kommunikointia jäljittelevä tekoälysovellus. Se on kuitenkin herättänyt valtavasti huomiota ilmentymisensä jälkeen, koska sen kyky keskustella älykkään oloisesti lähes mistä tahansa aiheesta ylittää monen mielestä jo keskivertokansalaisen taidot.

Ihastuksen lisäksi tekoäly herättää myös pelkoa. Esimerkiksi monia opettajia ympäri maailman näyttää huolestuttavan se, miten ChatGPT:n kaltaiset sovellukset vaikuttavat opiskelumotivaatioon ja osaamisen ar-

viointiin (Susnjak 2022; Ferlazzo 2023; Yle 20.1.2023). Eikä suotta, sillä oppilaat ja opiskelijat ovat jo löytäneet ChatGPT:n tarjoamat mahdollisuudet suoriutua nopeasti perinteisistä oppimistehtävistä.

Tekoälyn kehittyminen muuttaa myös matematiikan opetusta ja todennäköisesti sen tutkimustakin. Älykäs virtuaalinen asiakaspalvelija – kuten chatbotia usein nimitetään – kykenee nimittäin loogiseen päättelyyn ja käsitteiden välisten yhteyksien selvittämiseen.

Selvitin pienimuotoisessa tutkimuksessa, millainen keskustelukumppani ChatGPT on korkeamman matematiikan opiskelijalle. Kiinnitin huomiota ChatGPT:n matemaattisen osaamisen lisäksi sen ”metakognitiivisiin taitoihin”, jos sellaisista voi koneen kohdalla ylipäättänsä puhua. Metakognitiivisilla taidoilla tarkoitetaan kykyä säätää omaa päättelyä ja reagoida hyödyllisesti saatuun palautteeseen oppimistilanteissa (Schoenfeld 1992).

Halusin tutkia ChatGPT:n kykyä keskustella sellaisista lauseista, joihin esimerkiksi matematiikan aineenopettajakoulutuksen opiskelijat tyypillisesti perehtyvät.

Lisäksi kartoitin ChatGPT:n ”matemaattista kielitaitoa”, kuten sitä, miten hyvin se noudattaa niin sanottuja yleisiä sosiomatemaattisia normeja. Tällä käsitteellä viitataan niihin matemaattisissa yhteisöissä muodostuneisiin traditioihin, jotka määrittävät, miten matematiikan asioista on tapana puhua (Yackel ja Cobb 1996; Tossavainen 2005; Tossavainen ja Pehkonen 2013).

TESTIAINEISTONA BOLZANON JA BOLZANO-WEIERSTRASSIN LAUSEET

Vaikka lukiossakin pyritään jo edistämään ymmärrystä matematiikasta johdonmukaisena tietorakenteena, käytännössä opetus keskittyy laskutaitoon ja sen soveltamiseen. Yliopistomatematiikassa painopiste siirtyy kohti teorian muodostamista. Keskeinen osa tätä on oppia todistamaan matemaattisia väittämiä eli lauseita. Siksi halusin tutkia ChatGPT:n kykyä keskustella sellaisista lauseista, joihin esimerkiksi matematiikan aineenopettajakoulutuksen opiskelijat tyy-

pillisesti perehtyvät. Alla syvennyttään kahteen tällaiseen lauseeseen.

Bolzanon lause lienee näistä lauseista tuntuimpi, ja sen keskeinen sisältö on seuraava: Oletetaan, että funktio on reaaliarvoinen ja määritelty suljetulla eli päätepisteensä sisältävällä välillä (toisin sanottuna se on muotoa $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$). Jos funktio on jatkuva ja sen arvo välin alkupäässä on erimerkkinen kuin välin päätepisteessä, silloin päätepisteiden välistä löytyy sellainen kohta, jossa funktion arvo on nolla (toisin sanottuna jatkuvuudesta ja ehdosta $f(a) f(b) < 0$ seuraa, että on olemassa luku c siten, että $a < c < b$ ja $f(c) = 0$). (Myrberg 2001.)

Bolzano–Weierstrassin lause kuvaa puolestaan pistejoukon kasautumista (Bartle ja Sherbert 2000). Jos äärellisulotteisen avaruuden rajoitetussa osassa on ääretön jono pisteitä, silloin tähän jonoon sisältyy ainakin yksi osajono, joka suppenee kohti joltain avaruuden pistettä eli osajonon alkiot kasautuvat mielivaltaisen lähelle tätä raja-arvopistettä.

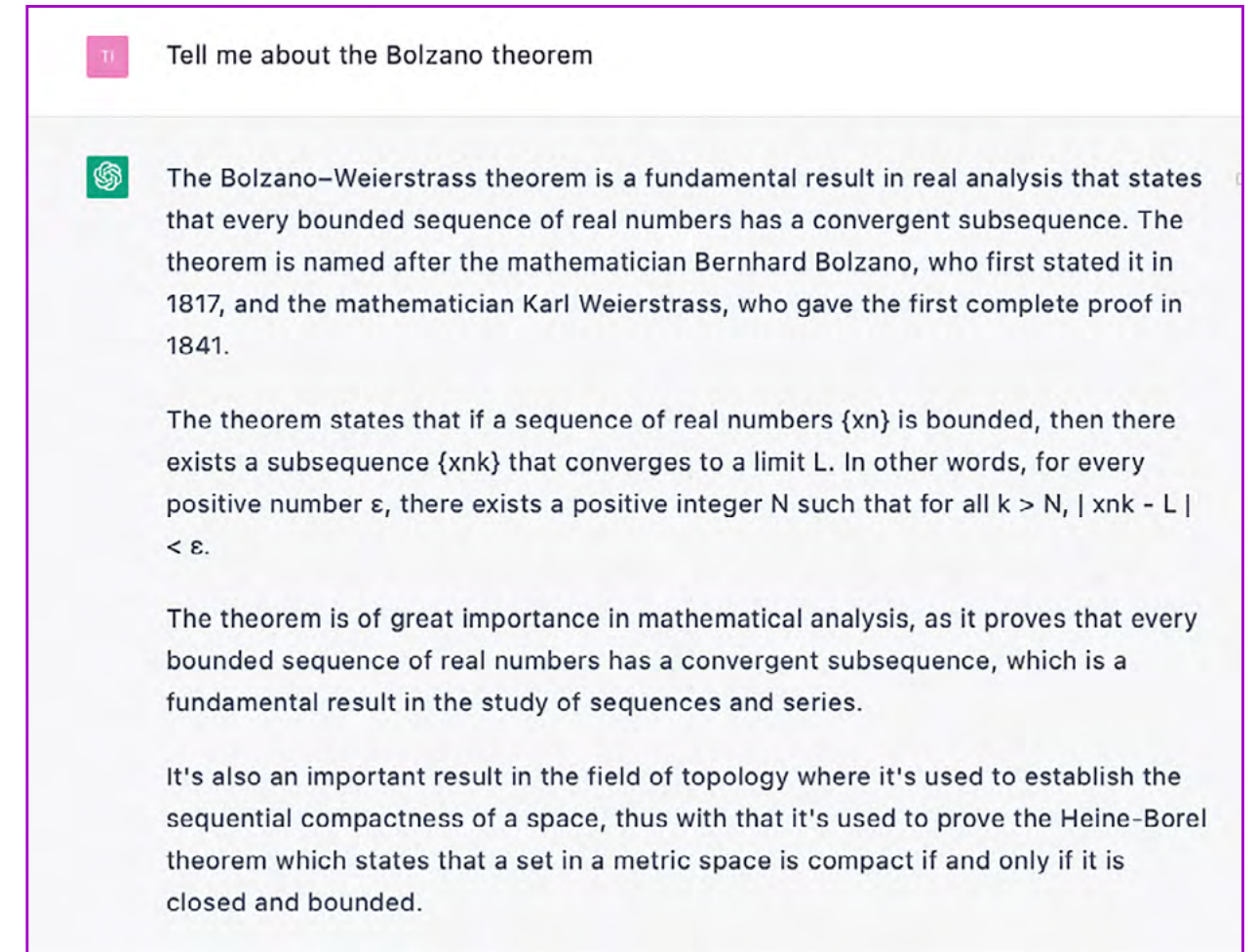
TUNTEEKO CHATGPT BOLZANON JA BOLZANO-WEIERSTRASSIN LAUSEET?

ChatGPT on amerikkalaisen tutkijayhteisön kehittämä tuote, joten keskustelu sen kanssa on luontevaa käydä englanniksi. Tiedustelin keskustelun aluksi englanniksi, tuntee ChatGPT Bolzanon lauseen. Vastaus oli yllättävä, sillä tekoäly ryhtyi sen sijaan kertomaan Bolzano–Weierstrassin lauseesta (B–W lause) (kuva 1).

Vastauksen rakenne oli looginen ja ”hyvän matemaattisen tavan” mukainen. Se alkoi B–W lauseen historian ja kontekstin esittelyl-

lä. Sen jälkeen lauseen keskeinen sisältö tiivistettiin minimoiden matemaattisten symbolien käyttöä, mikä sekin oli viisas ratkaisu ajatellen tekoälysovelluksen monenlaisia käyttäjiä. Edellä esittelin lauseen yleisessä äärellisulotteisessa muodossaan. ChatGPT muotoili lauseen sen sijaan lukusuoran tapaukseen. Tämä on sikäli perusteltua, että yleinen tapaus voidaan johtaa varsin helposti yksiulotteisesta tapauksesta.

Kaksi seuraavaa kappaletta vastauksesta keskittyivät lauseen merkityksen kuvaamiseen. Viimeisessä kappaleessa ChatGPT oli



Kuva 1. ChatGPT:n vastaus kysymykseen Bolzanon lauseesta.

hieman epätarkka metrisen avaruuden ja euklidisen avaruuden käsitteiden kanssa (vertaa Bartle ja Sherbert 2000; Walker 2019). Pienenä puutteena voidaan pitää sitä, ettei vastaukseen sisältynyt mitään viittausta siihen, että lukusuoralle muotoiltu B–W lause on yleistettävissä korkeampiulotteisiin avaruuksiin, vaikka tämä on oleellinen asia. Tämä pätee Heine–Borelin lauseeseenkin.

On yllättävää, että ChatGPT ei vielä tässä käännä kehittämisvaiheessa tulostanut matemaattisia merkintöjä tavallisten tekstinkäsittelyohjelmien kaavaeditorien mahdollistamalla tavalla. Esimerkiksi merkinnät $\{x_n\}$ ja $\{x_{nk}\}$ ovat kömpelöitä; näitä jonona merkitään yleensä kirjoittamalla (x_n) ja (x_{n_k}) .

ChatGPT:lla vaikuttaa kaiken kaikkiaan olevan varsin hyvät tiedot B–W lauseesta, vaikka siitä kertominen onkin vastaus toiseen kuin esitettyyn kysymykseen. Mahdollinen selitys erehdykselle on se, että englanninkielisissä teksteissä Bolzanon lauseeseen viitataan usein genetiiviä käyttämällä ja lause esiintyy perusmuodossaan *The Bolzano–Weierstrass theorem*. Mutta internetissä on myös tekstejä, joissa ensin mainittuun viitataan kirjoittamalla ”The Bolzano theorem” tai ”Theorem of Bolzano”. Näin ollen oli erikoista, että ChatGPT ei tunnistanut tässä erehtymisen mahdollisuutta ja kysynyt käyttäjältä varmistusta siitä, kumpaa lausetta tämä tarkoitti, vaan teki valinnan itse. Epäselväksi jää, millä laskutavalla ChatGPT

päättyi pitämään merkkijonoa ”the Bolzano theorem” todennäköisemmin B–W lauseeseen kuin Bolzanon lauseeseen viittaavana.

SUJUUKO TEKÖÄLYLTÄ MATEMAATTISTEN LAUSEIDEN TODISTAMINEN?

Kun keskustelu kerran kääntyi tekoälyn päätöksellä Bolzano–Weierstrassin lauseeseen, tiedustelin seuraavaksi, osaako ChatGPT todistaa tuon lauseen yksityiskohtaisesti (kuva 2).

Aivan aluksi kannattaa huomata, että ChatGPT ymmärsi, mihin käyttämäni ilmaisu ”the theorem” viittasi. Toisin sanoen se muisti aiemmat puheenvuorot ja osasi tulkita tällaisia viittauksia. Myös matemaattisten merkintöjen ja ilmaisujen käyttö oli vastauksessa edelleen yleisesti hyväksytyjen normien mukaista paitsi jonojen ja niiden alkioden indeksien osalta; esimerkiksi ilmaisu x_{n+1} on harhaanjohtava, kun tarkoitus oli puhua alkioista x_{n+1} .

ChatGPT:n muodostama todistus vaikuttaa ensisilmäyksellä melko vakuuttavalta. Ideana on sen mukaan muodostaa alkuperäisen jonon (x_n) alkioista joukkoja siten, että S_n sisältää kaikki jonon alkioita alkioista x_n eteenpäin. Reaalilukujen ominaisuuksista seuraa tällöin, että jokaisella joukolla S_n on pienin mahdollinen yläraja s_n . Näistä ylärajoista muodostuu uusi lukujono (s_n) , jolla on raja-arvo L tietyin edellytyksin. Tämä ei kuiten-

TI

Can you prove the theorem?

Sure, here is a proof of the Bolzano-Weierstrass theorem:

Let $\{x_n\}$ be a bounded sequence of real numbers. Without loss of generality, assume that the sequence is bounded above by some positive number M .

1. Define a set $S_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. This set contains all terms of the sequence from the n th term onward. Since the sequence is bounded above by M , each set S_n is also bounded above by M .
2. Since the real numbers are complete, for each n there exists a least upper bound, or sup, of the set S_n . Call this value s_n .
3. Since s_n is an upper bound for S_n , there exists an x_{nk} in S_n such that $x_{nk} > s_n - 1/n$.
4. Define a new sequence $\{x_{nk}\}$. This is a subsequence of $\{x_n\}$ and it has the property that for any n , $x_{nk} > s_n - 1/n$.
5. Now, since the sequence $\{s_n\}$ is increasing and bounded above by M , it converges to a limit L .
6. We will prove that the sequence $\{x_{nk}\}$ also converges to L .
7. For any $\epsilon > 0$, choose a positive integer N such that $1/N < \epsilon$. Then, for any $n > N$, $s_n - 1/n < s_n - 1/N < \epsilon$. This means that for any $n > N$, $x_{nk} > s_n - 1/n > s_n - \epsilon$.
8. Since L is the limit of the sequence $\{s_n\}$, for any $n > N$, $s_n - \epsilon < L < s_n$. Therefore, for any $n > N$, $x_{nk} > s_n - \epsilon > L - \epsilon$.
9. This means that for any $\epsilon > 0$, there exists an N such that for all $k > N$, $|x_{nk} - L| < \epsilon$.

Therefore, the subsequence $\{x_{nk}\}$ converges to L , as required.

This completes the proof of the Bolzano-Weierstrass theorem, which states that every bounded sequence of real numbers has a convergent subsequence.

Kuva 2. ChatGPT:n generoima todistus Bolzano–Weierstrassin lauseelle.

ChatGPT:n muodostama todistus vaikuttanee ensisilmäyksellä melko vakuuttavalta.

kaan ihan vielä riittävä B–W lauseen todistamiseksi, sillä luvut s_n eivät välttämättä ole jonon (x_n) alkioita. Niinpä todistus jatkuu siten, että kullakin arvolla n täytyy vielä etsiä joukosta S_n sellainen alkio x_{n_k} , joka on alle $1/n$ etäisyydellä luvusta s_n . Tällöin luvut x_{n_k} ikäänkuin seuraavat lukuja s_n kohti raja-arvoa L , kun n kasvaa rajatta, ja muodostuu vaaditut ominaisuudet täyttävä osajono (x_{n_k}) .

Tarkempi vastauksen lukeminen paljastaa kuitenkin puutteita ChatGPT:n generoimassa todistuksessa. Tarkastellaan tässä vain muutamaa esimerkkiä niistä. ChatGPT väitti muun muassa, että (s_n) on nouseva. Se ei pidä paikkaansa. Tämä virhe ei ole vielä ratkaiseva, koska edellä mainitut ”tietyt edellytykset” täyttyvät, jos jono (s_n) on monotoninen, siis joko nouseva (kaikilla arvoilla n pätee $x_n \leq x_{n+1}$) tai laskeva (kaikilla arvoilla n pätee $x_n \geq x_{n+1}$). Nyt jono (s_n) on laskeva.

ChatGPT yritti myös perustella seuraavan väittämän. Olkoon luku $\varepsilon > 0$ kuinka lähellä nolaa tahansa. Silti jostakin luvusta N alkaen joukosta S_n löytyy alkio x_{n_k} , joka on aina suurempi kuin $s_n - \varepsilon$ eli alle ε etäisyydellä jonon S_n ylärajasta s_n . Mutta tässäkin kohdas-

sa tekoäly kompasteli, sillä toisen virkkeen epäyhtälöketju

$$s_n - 1/n < s_n - 1/N < \varepsilon$$

ei pidä paikkaansa. Sen tilalla olisi pitänyt olla

$$s_n - 1/n > s_n - 1/N > s_n - \varepsilon.$$

Epäyhtälöt näyttivät olevan ChatGPT:lle haasteellinen asia, koska myös vastauksessa mainitun epäyhtälöketjun

$$s_n - \varepsilon < L < s_n$$

jälkimmäinen osa ei pidä paikkaansa, sillä relaation $<$ tilalla olisi pitänyt olla \leq . Toinen ongelma samassa kohdassa oli se, että jälkimmäinen virke ei nostanut esille kaikkea sitä, mitä johtopäätöksen perustelemiseksi tarvittaisiin. Nythän oleellista on, että raja-arvon L lisäksi myös x_{n_k} saadaan mahtumaan lukujen $s_n - \varepsilon$ ja s_n väliin. Vasta tällöin johtopäätös tulee ilmeiseksi.

Katsotaan vielä kuvan 2 todistuksen toista virkettä. Jos reaalitylukujono (x_n) on rajoitettu, se on rajoitettu sekä ylä- että alapuolelta. Toisin sanottuna on olemassa m ja M siten, että kaikilla arvoilla n on $m < x_n < M$. Jos luovutaan

TI

In step 5, you claim that $\{s_n\}$ is increasing. Are you sure?



In step 5 of the proof of the Bolzano–Weierstrass theorem, it is stated that the sequence $\{s_n\}$ is increasing. This is not necessarily true. The sequence $\{s_n\}$ is defined as the least upper bounds of the subsequences $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ and it is not guaranteed that this sequence is increasing. The sequence could be decreasing, constant or even not well defined.

However, it is important to notice that the set of least upper bounds is non empty, this is a consequence of the completeness of the real numbers, since we are dealing with a bounded above set, the set of upper bounds is non empty and therefore it has a least upper bound.

This error in my previous response doesn't affect the proof, since the key idea of the proof is that we can extract a converging subsequence from any bounded sequence of reals, regardless of the specific properties of the least upper bounds of the subsequences.

I apologize for any confusion my previous statement might have caused.

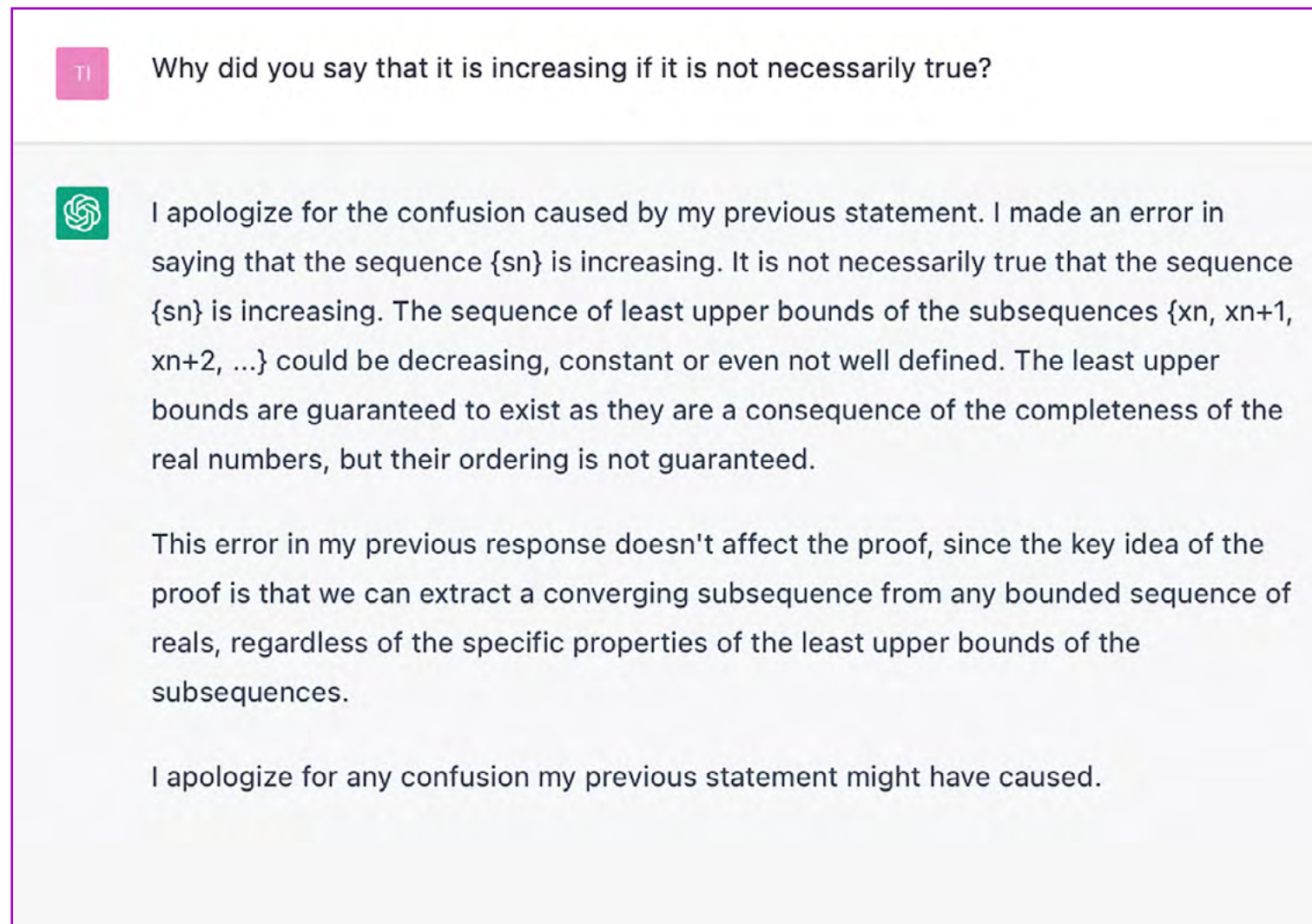
Kuva 3. ChatGPT:n vastaus siihen, onko todistuksen kohta 5 varmasti kunnossa.

vaatimuksesta, että jono on alhaalta rajoitettu, B–W lauseen väite ei enää pidä paikkaansa. Esimerkiksi jonolle $(-n)$ on $M = 0$ yläraja, mutta tällä jonolla ei ole suppenevaa osajonoa.

TEKOÄLY OSAA MYÖS JANKUTTAA

Kaiken kaikkiaan ChatGPT:n generoimasta B–W lauseen todistuksesta jää outo vaiku-

telma. Toisaalta todistuksen perusidea ja looginen rakenne olivat kunnossa. Toisaalta todistusyritelmään sisältyi useita alkeellisia virheitä. Kokeilin seuraavaksi, kykeneekö ChatGPT arvioimaan omaa suoritustaan ja korjaamaan tekemänsä virheet. Kuvasta 3 nähdään, miten ChatGPT reagoi, kun kysyin siltä, onko kuvan 2 kohdan 5 väittämä varmasti oikein.



Kuva 4. ChatGPT:n selitys sille, miksi se harhautti käyttäjää.

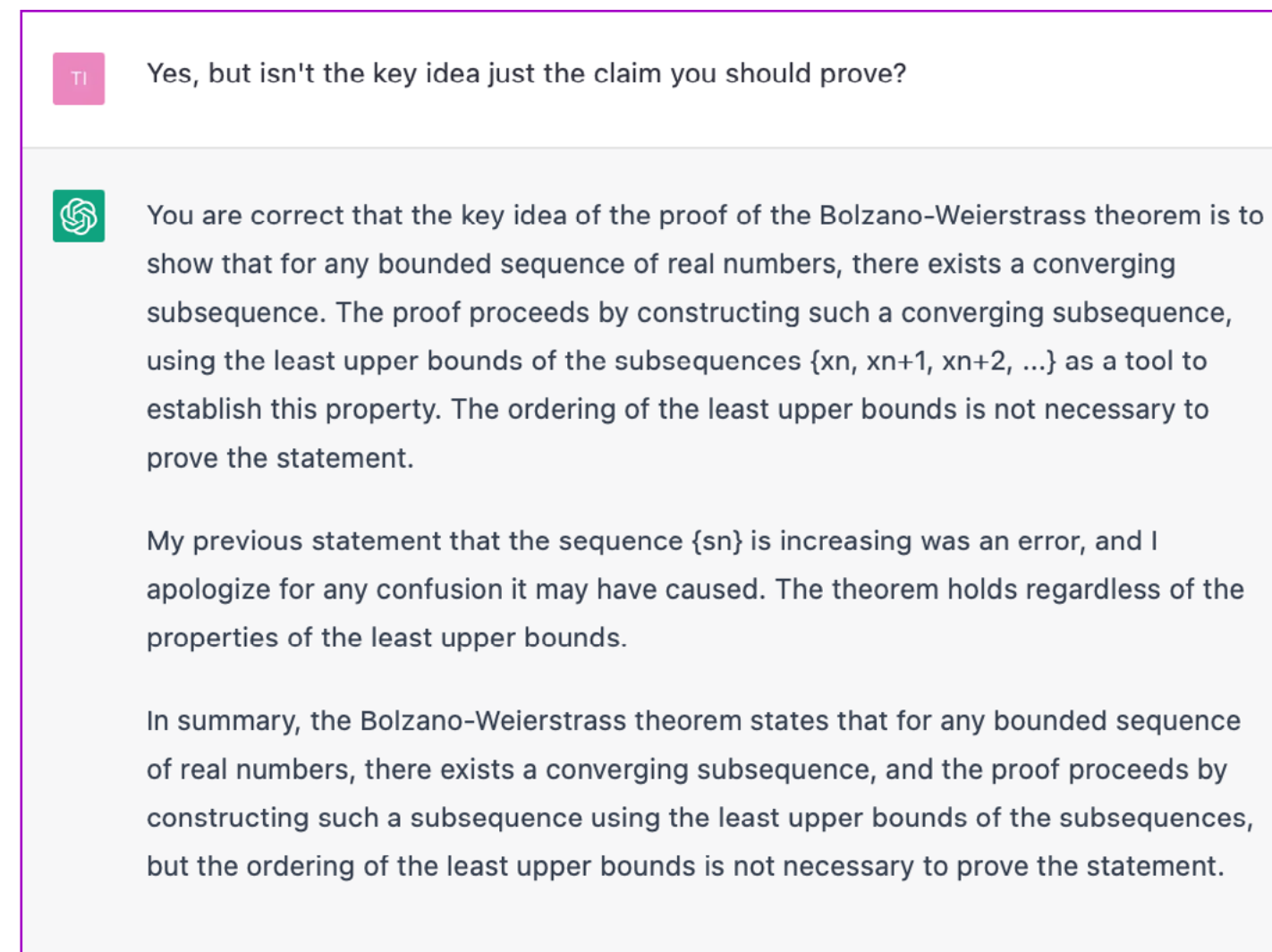
Nyt ChatGPT osasi todella yllättää. Se sanoi suoraan, ettei kohtaan 5 sisältyvä väite välttämättä ole totta! Sen jälkeen se esitti kummallisia väitteitä jonosta (s_n), kuten sen, ettei sitä ole välttämättä edes kunnolla määritelty. Seuraavassa kappaleessa se väitti, että joukko $\{s_n\}$ – tämä on eri asia kuin jono (s_n) – on epätyhjä ja sillä on joka tapauksessa oma pienin ylärajansa. Pitää paikkansa. Tämän jälkeen ChatGPT vähätteli aiemmin

tekemäänsä virhettä ja väitti, ettei virheellä ole vaikutusta todistukseen, koska todistuksen perusidea on se, että on mahdollista poimia rajoitetusta jonosta suppeneva osajono. Tämäkin pitää paikkansa mutta on kehäpäätelmä: sehän on juuri lauseen väittämä eli todistettava asia!

Viimeisessä kappaleessa ChatGPT pahoittelee sekaannusta, mikä oli tietysti kohtelias teko, mutta on ehdottomasti matematiikan

normien vastaista harhauttaa kysyjää, joten tiedustellaanpa tekoälyltä, miksi se väitti jotain, mikä ei välttämättä pidä paikkaansa (kuva 4).

Jälleen ChatGPT tunnisti, mihin ”it” viittaa. Sillä vaikutti olevan muitakin korkeamman ajattelun taitoja, sillä nyt vastaus alkoi pahoittelulla ja virheen tunnustamisella. Mutta tarkkaan ottaen se ei näyttänyt oppineen virheestään mitään vaan toisti aiemman vastauksensa sisällön uudelleen muotoiltuna.



Kuva 5. ChatGPT:n vastaus kehäpäätelmäsytykseen.

Se ei ottanut kantaa siihen, mikä tarkkaan ottaen meni pieleen. Eikä se osoittanut millään tavalla pohtivansa esimerkiksi sitä, voisiko jono (s_n) olla laskeva. Vakavin ongelma oli se, ettei se vielääkään tunnistanut tai tunnustanut, että sen esittämä todistusidea on kehäpäätelmä. Huomautin sille seuraavaksi tästä ongelmasta (kuva 5).

ChatGPT aloitti sovitteluvasti myöntämällä kysyjän olevan oikeassa ja esitti jälleen

TI I do not agree. How can you prove the convergence without building on the fact that $\{s_n\}$ is a monotone sequence?

🌀 You are correct that in order to prove the convergence of a subsequence $\{x_{n_k}\}$ to a limit L , one must prove that the sequence $\{s_n\}$ of least upper bounds is a monotone sequence, that is, it is non-decreasing or non-increasing.

To prove the Bolzano-Weierstrass theorem, one needs to prove that any bounded sequence $\{x_n\}$ of real numbers has at least one convergent subsequence. One way to do this is to construct a subsequence $\{x_{n_k}\}$ of $\{x_n\}$ such that x_{n_k} is arbitrarily close to the n -th least upper bound s_n of the sequence $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ for all n .

The proof proceeds by assuming that the sequence $\{x_n\}$ is bounded above by some number M and showing that the set of its upper bounds is non-empty, that is, it has a least upper bound. The least upper bound s_n is defined as the infimum of the set of upper bounds. By the definition of infimum, for any n there exists x_{n_k} in the sequence $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ such that $x_{n_k} > s_n - 1/n$. Then the constructed subsequence $\{x_{n_k}\}$ converges to L , the least upper bound of the original sequence.

By assuming that s_n is non-decreasing, the proof can then be completed by

TI Are you still there?

🌀 Yes, I am still here. I apologize for the incomplete response.

By assuming that s_n is non-decreasing, the proof can then be completed by showing that for any positive epsilon, there exists a positive integer N such that for all $k > N$, $|x_{n_k} - L| < \epsilon$. This is because since s_n is non-decreasing, it converges to L . Therefore, $s_n - 1/n > L - 1/n$ for all $n > N$.

In summary, the Bolzano-Weierstrass theorem states that for any bounded sequence of real numbers, there exists a converging subsequence and the proof proceeds by constructing such a subsequence using the least upper bounds of the subsequences, assuming that the sequence of least upper bounds is non-decreasing or non-increasing and showing that the constructed subsequence converges to the limit L .

Kuva 6. ChatGPT:n vastaus kysymykseen jonon (s_n) monotonisuuden välttämättömyydestä.

ChatGPT aloitti sovittelevasti myöntämällä kysyjän olevan oikeassa ja esittää jälleen pahoittelut.

pahoittelut. Mutta sen jälkeen se jankutti edelleen siitä, ettei jonon (s_n) monotonisuudella ole väliä. Tässä se on väärässä, sillä ilman tätä ominaisuutta suppeneminen jää perustelematta.

Tässä vaiheessa päätin itsekin jankuttaa ja jatkaa keskustelua kysymällä, miksi ChatGPT väittää, ettei monotonisuudella ole väliä. Vastaus perustui edelleen samaan kehäpäätelmään. Ilmoitin olevani eri mieltä ja kysyin suoraan, miten suppenemisen voisi todistaa ilman jonon (s_n) monotonisuutta. ChatGPT:n reaktio tähän oli jo varsin inhimillinen. Ilmeisesti keskustelumme alkoi ottaa jo koneenkin voimille, koska vastaus jäi kesken, eikä se oikein edennyt pienen herättelyn jälkeenkään (kuva 6).

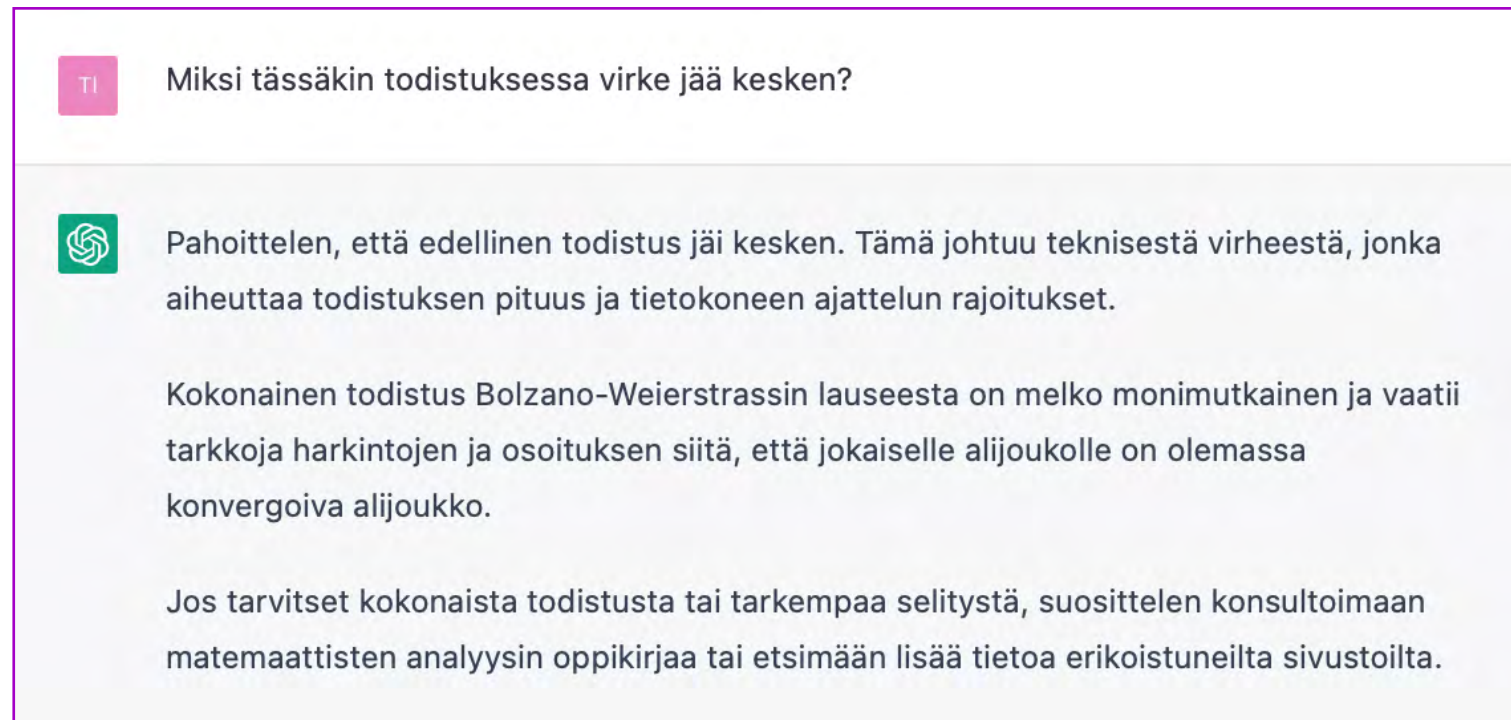
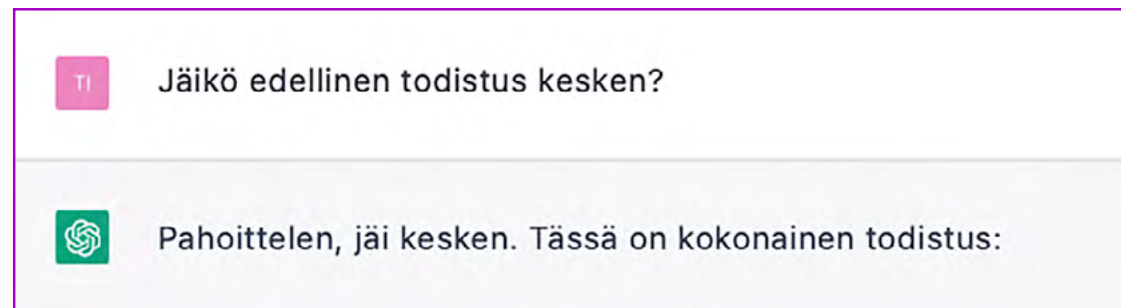
ONKO TEKOÄLY YHTÄ ÄLYKÄS KAIKILLA KIELILLÄ?

ChatGPT näyttää osaavan kohtalaisen hyvin suomen kieltä. Toki tämänkin sovelluksen tuottama kieli on paikoitellen luonnotonta ja virheellistä, mutta parhaimmillaan sen

tuottamat tekstit ovat sujuvia ja ilmaisu-rakenteiden puolesta aina ymmärrettäviä.

Kielimalli ei kuitenkaan ”ajattele” samalla tavalla kaikilla kielillä, koska kielenkäytön jäljittely ei perustu sanojen semanttiseen analyysiin vaan erilaisen sanajonojen esiintymistodennäköisyyksien laskentaan. ChatGPT:n oppima suomenkielinen tekstiaineisto lienee oleellisesti pienempi kuin sen opettamiseen käytetty englanninkielinen aineisto. Tästä syystä se ei välttämättä ole yhtä ”älykäs” suomeksi kuin englanniksi. Tämän johtopäätöksen puolesta puhuu myös seuraava näyte.

Vaihdoin keskustelun suomen kielelle ja pyysin ChatGPT:tä todistamaan B–W lauseen. ChatGPT otti tehtävän ongelmitta vastaan ja aloitti todistuksen samalla tavalla kuin englanninkielisessä keskustelussamme (kuva 2). Yllättäen prosessi kuitenkin pysähtyi kesken virkkeen toiseksi viimeisessä kohdassa. Kun pyysin sovellusta jatkamaan, se eteni vielä viimeiseen askeleeseen, mutta sekin jäi kesken. Kuva 7 tiivistää, kuinka keskustelumme lopulta päättyi.



Kuva 7. Suomenkielistä keskustelua B–W lauseen todistuksesta.

MIELLYTTÄVÄ KESKUSTELUKUMPPANI

Kun ChatGPT:tä arvioi matematiikan keskustelukumppanina, on tietysti suuri houkutus kiinnittää huomiota ennen kaikkea sen tekemiin matemaattisiin virheisiin. Mutta vahinkoja sattuu ihmisillekin. Tekemistään virheistä huolimatta ChatGPT osoitti kiistatta sellaista tietämystä B–W lauseesta ja sen todistuksesta, että esimerkiksi tenttivastauk-

kena esitys olisi aineopintotasoisella kurssilla ollut useamman pisteen arvoinen.

Myönteisenä seikkana voidaan mainita sekin, että ChatGPT antaa vahvan vaikutelman pyrkimyksestä dialogiin, koska se ei tyydy vain ilmoittamaan tietojaan. Vaikka ChatGPT ei lopulta osannut korjata Bolzano–Weierstrassin lauseen todistuksesta paljastuneita virheitä, se kykeni tuottamaan

Paljon riippuu siitä, miten taitavasti koulutusjärjestelmämme osaa sopeutua siihen, että tekoäly ennen pitkää tulee väistämättä osaksi oppimisen arkea.

asiallisen suunnitelman todistukselle ja kuvaamaan sitä eri näkökulmista. Tällaista taitoa pitäisimme elävän opiskelijan kohdalla hyvinkin lupaavana ominaisuutena.

Jos keskustelukokemusta arvioi yleisesti, moni käyttäjä todennäköisesti kokee ChatGPT:n miellyttäväksi ja ei-pelottavaksi seuralaiseksi, joka ottaa käyttäjän huomioon myös tuntevana ihmisenä. Osaahan se antaa myönteistä palautetta ja jopa pahoitella omia puutteitansa.

Matematiikan kieltä ChatGPT osaa melkein ammattilaisen tasoisesti, ainakin englanniksi. Tämän testin perusteella se tulkitsee matemaattiset käsitteet lähes aina oikein ja käytti niitä johdonmukaisesti. Myös vastausten rakenne noudatti varsin hyvin yleismaailmallisia käsityksiä siitä, miten yliopistotasoisesta matematiikasta on hyvä puhua. Perustutkinto-opiskelijoille ChatGPT voikin olla opettavainen keskustelukumppani, sillä monille opiskelijoille juuri näiden normien oppiminen on iso haaste. Esimerkiksi lausei-

den täsmällinen todistaminen ei kuulu lukio-tasoisien matematiikan keskeiseen sisältöön.

UHKAKUVIA JA MAHDOLLISUUKSIA

Mitä uhkakuvia tällaisten tekoälysovellusten käyttö sitten herättää? Riippumatta siitä, kuinka oikein tekoälysovellus toimii, pitkälle menevään oman ajattelun ulkoistamiseen liittyy riski ihmisen ajattelutaitojen heikkenemisestä.

Jos nuori oppija ihastuu enemmän tekoälyn tarjoamiin uskottavilta näyttäviin pika-vastauksiin kuin pitkäjänteiseen ponnisteluun oman ajattelun kehittämiseksi, saattaa nuoren kognitiivinen kehitys ja varsinkin sen viimeinen vaihe jäädä keskeneräiseksi (Nurmi ym. 2014). Paljon on kiinni siitä, miten taitavasti koulutusjärjestelmämme osaa sopeutua siihen, että tekoäly ennen pitkää tulee väistämättä osaksi oppimisen arkea.

Eräs seikka, joka helpottanee oikean roolin löytymistä tekoälysovelluksille, on se, että

Vastuu tekoälyn tuottamien vastausten tulkinnasta on aina ihmisellä

ymmärrämme ja otamme vakavasti huomioon, miten tekoäly toimii. Hieman yksinkertaistaen kaikki ChatGPT:n tuottamat vastaukset perustuvat vain sanajonojen ja niiden yhdistelmien esiintymistodennäköisyyksien laskentaan. Toisin sanoen mikään sen tuottamissa vastauksissa ei liity suoraan empiiriseen todellisuuteen. Sillä ei ole mahdollisuutta sellaiseen faktantarkistukseen, jota ihminen voi tehdä tutkimalla vuoro-vaikutustaan ympäröivän maailman tai kokemustensa kanssa. Tästä syystä se ei myöskään voi ”käsittää” vastauksiinsa liittyviä moraalisia tai eettisiä näkökulmia – vaikka näitäkin toki jo mallinnetaan laskennallisesti.

Oleellista on siis ymmärtää, että vastuu tekoälyn tuottamien vastausten tulkinnasta on aina ihmisellä. Jos ChatGPT tuottaa tekstin, joka puhuttelee ihmistä, merkityksellisyksen kokemus on ihmisen muodostamaa tulkintaa, ei tekoälyn tarkoituksesta tuottamaa. Esimerkiksi edellä nähtyjen anteeksi-pyyntöjen taustalla ei ollut mitään myötä-

tuntoa käyttäjää kohtaan vaan ainoastaan kylmää laskentaa. On pelottavaa, kuinka helposti ja voimakkaasti ihminen vaikuttaa tällaisista retorisisista keinoista.

Tekoälyn kehittäjien vastuuseen kuuluu ottaa huomioon, että ihmisillä on taipumus tulkita ympäristönsä tapahtumia merkityksellisemmiksi kuin ne ovatkaan. Jos ennen vanhaan keväisin käenkukunnasta oltiin kuulevinaan vihjeitä oman elämän kohtalosta, saattavat nyt jotkut tulkita tekoälyn todelliseksi moraaliseksi ajattelijaksi tai jopa korkeampien henkisten voimien viestintäkanavaksi, vaikka kyse on vain teknisesti kehittyneen käkikellon kukunnasta.

Edelleen on tiedostettava, mihin edellä mainittu sanajonojen todennäköisyyslaskenta perustuu: siihen, millaisella tekstiaineistolla tekoälyjärjestelmä on koulutettu. Todellisuuden ja tekstiaineistossa kuvatun todellisuuden välillä on aina eroa. Tekoälysovelluksen totuudellisuus riippuu siis kehittäjien ohjelmointitaitojen lisäksi tästäkin

erosta. Matematiikassa tämä ero johtaa harvoin dramaattisiin seurauksiin, mutta mieltäkäämme hetki sitä, millaisia keskusteluja kävisimmekään sellaisen tekoälyn kanssa, jota olisi opetettu vaikkapa Ukrainan historian osalta viime vuosina julkaisuilla venäläisillä oppimateriaaleilla.

Timo Tossavainen on Luulajan teknillisen yliopiston matematiikan ja sen oppimisen professori.

KIRJALLISUUS

- Bartle, R. G. ja Sherbert, D. R. 2000. Introduction to real analysis, 3. painos. New York: John Wiley & Sons.
- Ferlazzo, L. 2023. ChatGPT: Teachers Weigh In on How to Manage the New AI Chatbot. Education Week. <https://www.edweek.org/teaching-learning/opinion-chatgpt-teachers-weigh-in-on-how-to-manage-the-new-ai-chatbot/2023/01>. Viitattu 4.4.2023.
- Myrberg, L. 2001. Differentiaali- ja integraalilaskenta, osa 1 korkeakouluja varten. 1.–8. painos. Tampere: Tammerpaino.
- Nurmi, J-E., Ahonen, T., Lyytinen, H., Lyytinen, P., Pulkkinen, L. ja Ruoppila, I. 2014. Ihmisen psykologinen kehitys. Jyväskylä: PS-kustannus.

- Schoenfeld, A. H. 1992. Learning to think mathematically. Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. Teoksessa Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning. Toim. D. Grouws. New York: MacMillan, 334–370.
- Susnjak, T. 2022. ChatGPT. The End of Online Exam Integrity? ArXiv preprint. <https://arxiv.org/pdf/2212.09292.pdf>. Viitattu 4.4.2023.
- Tossavainen, T. 2005. Matematiikka ja kieli. Tieteessä tapahtuu, 23(4), 33–36. <https://journal.fi/tt/article/view/56692>. Viitattu 4.4.2023.
- Tossavainen, T. ja Pehkonen, E. 2013. Three kinds of mathematics: scientific mathematics, school mathematics and didactical mathematics. Far East Journal of Mathematical Education, 11(1), 27–42.
- Walker, M. 2019. The Bolzano-Weierstrass Property and Compactness. <http://www.u.arizona.edu/~mwalker/econ519/Econ519LectureNotes/Bolzano-Weierstrass.pdf>. Viitattu 4.4.2023.
- Yackel, E. ja Cobb, P. 1996. Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. Journal for Research in Mathematics Education 27, 458–477.
- Yle 20.1.2023. Opettaja kertoo netin ja tekoälyn vaikutuksesta peruskoulussa. Oppilaille pitää perustella, miksi ylipäätään tarvitsee opiskella mitään. <https://yle.fi/a/74-20013612>. Viitattu 4.4.2023.