Euler – moderni kolmesataavuotias

Johan Stén

Tänä vuonna on kulunut 300 vuotta Leonhard Eulerin syntymästä, mitä juhlistetaan monin tapahtumin ympäri maailmaa ja aivan erityisesti hänen synnyinmaassaan Sveitsissä. Euler tunnetaan ennen kaikkea matemaatikkona – eräänä suurimmista – mutta hän oli myös etevä astronomi ja fyysikko, ja ihmisenä varmasti kaikkien aikojen luovimpia. Nimi Euler on tuttu lähinnä eksakteja tieteitä opiskelleille, sillä hänen mukaan on nimetty yhtälöitä, funktioita, vakioita, kulmia jne., ja hän vaikutti miltei kaikkiin matematiikan ja fysiikan osa-alueisiin. Yritän tässä katsauksessa lyhyesti perustella, miksi Euleria voi sanoa moderniksi.

Meissä kaikissa on [näet] taipumus ja veto opin- ja tiedonjanoon ja meistä on kunniakasta kunnostautua tällä alalla.
M. T. Cicero, *Velvollisuuksista* (*De Officiis*, suomentanut Marja Itkonen-Kaila, Porvoo, WSOY, 1967).

Näillä sanoilla 19-vuotias Baselin yliopistosta vastavalmistunut matematiikko Leonhard Euler koristi tutkielmansa *Meditationes super problemate nautico* (Mietteitä eräästä merenkulkuun liittyvästä ongelmasta), joka saavutti kunnioitettavan toisen sijan Ranskan tiedeakatemian suuressa kilpailussa vuonna 1727, ja jossa hän ratkaisi hänelle leimallisella perusteellisuudellaan ja selkeydellään Newtonin virtausvastuslakia käyttäen parhaan tavan mitoittaa ja sijoittaa laivojen mastot. Tämä tunnuslause voisi yhtä hyvin luonnehtia Eulerin tieteellistä toimintaa kokonaisuudessaan, sillä hänen kiinnostuksensa erilaisiin älyllisiin haasteisiin oli rajaton.

Leonhard Euler syntyi 15. huhtikuuta 1707 Baselissa, mutta varttui läheisessä Riehenin kylässä. Hänen isänsä, Paul Euler, oli matematiikkaa opiskellut reformoitu pappi ja äiti, Margareta Brucker, papin tytär. Oli siis luonnollista, että lahjakkaaksi osoittautunut poika lähetettiin opiskelemaan teologiaa Baselin yliopistoon. Onneksi Paul Eulerin opiskelutoveri, maailmankuulu matemaatikko Johann Bernoulli vanhempi, oivalsi Leonhardin poikkeuksellisen matemaattisen kyvyn ja taivutti isän muuttamaan pojan opintosuuntaa. Yksityisopetuksen sijaan kiireinen yliopiston professori Bernoulli tarjosi pojalle luettavaksi alansa huippukirjallisuutta sekä vastaanottoajan joka lauantai, jolloin hän lupasi selittää kaiken, mitä nuori oppilas ei ollut onnistunut ymmärtämään. Kun yliopiston fysiikan oppituoli sittemmin vapautui, Bernoulli kannusti Euleria hakemaan virkaa. Hakemukseensa Euler liitti tutkielman äänestä, *Dissertatio physica de sono*, jossa hän vertasi äänen muodostumista värähtelevässä kielessä ja puhallinsoittimessa. Teos sai myönteisen vastaanoton ja siitä tuli akustiikan klassikko, vaikka Euler ei saanutkaan sen avulla hakemaansa paikkaa. Syynä lienee ollut hakijan alhainen ikä. Parempaa oli kuitenkin luvassa, kun Pietarin uudesta ja kunnianhimoisesta tiedeakatemiasta saapui Eulerille kutsu liittyä sen fysiologian osastoon. Kutsun oli järjestänyt Johann Bernoullin poika Daniel, joka oli luvannut suositella Euleria mahdollisiin vapaisiin virkoihin. Tällainen oli todella syntynyt Danielin veljen Nicolauksen yllättäen kuoltua. Pietariin lähdettyään Euler ei enää koskaan palannut synnyinmaahansa.

Tuottelias Pietarin-kausi 1727–41

Eulerin saapuessa Pietariin seitsemän viikkoa kestäneeltä matkaltaan toukokuussa 1727 keisarinna Katarina I oli juuri kuollut ja akatemian tilanne epävakaa. Tullakseen toimeen Euler näki viisaimmaksi palvella ensin Venäjän laivastoa, kunnes hänet vuonna 1731 valittiin akatemian jäseneksi sen fysiikan professuuriin. Vuonna 1733 hän sai arvostetun matematiikan professuurin koti-ikävästä kärsivän ystävänsä ja asuinkumppaninsa Daniel Bernoullin palattua Baseliin. Saatuaan taloudellisen tilanteensa turvattua Euler päätti mennä naimisiin sveitsiläisen taidemaalarin tyttären, Katharina Gsellin, kanssa. He saivat kolmetoista lasta, joista tosin vain viisi selvisi aikuisikään saakka.

Pietarissa nuori Euler pääsi tutustumaan hyvin monipuoliseen ja stimuloivaan tiedemieskaartiin, jonka vertaista Euroopassa tuohon aikaan oli harvassa. Siihen kuuluivat mainitun Daniel Bernoullin lisäksi mm. astronomi ja maantieteilijä Joseph Delisle, Eulerin kaukainen sukulainen, matemaatikko Jakob Hermann sekä Christian Goldbach, jonka kanssa Euler aloitti hedelmällisen ja pitkään jatkuneen kirjeenvaihdon erityisesti lukuteoriaan liittyvissä kysymyksissä. Lukuteoria kiinnosti Euleria läpi elämän, osittain esteettisistä syistä, osittain erilaisten sovellutusten takia. Hän perehtyi aluksi Pierre de Fermatin teoksiin ja lähti tutkimaan tämän väittämiä kokeellisesti, eli testaamalla niitä numeerisesti. Tätä työtä helpotti varmasti se, että Euler oli poikkeuksellisen nopea ja varma päässälaskija. Monet näistä väittämistä koskevat alkulukuja, mutta myös kuuluisa Fermatin viimeinen lause kiinnosti Euleria. Kyse on oletuksesta, että yhtälöllä $x^n+y^n=z^n$, jossa n=3, 4, 5…, ei ole sellaista ratkaisua, jossa x, y ja z ovat kaikki positiivisia kokonaislukuja. Tämän Euler todisti tapauksessa n=3, joskin vielä puutteellisesti. Euleria askarrutti myös kysymys negatiivisten lukujen logaritmeista, josta Johann Bernoulli oli ollut kirjeenvaihdossa Leibnitzin kanssa. Bernoulli väitti, että $\log(-a)=\log(a)$, kun taas Leibnitzin mielestä tulosta ei voinut olla olemassa. Tässä Leibnitz oli tavallaan oikeassa, sillä tulos ei ole reaaliluku. Euler kuitenkin pystyi osoittamaan, että $\log(-1)$ on olemassa, joskin tulos on puhtaasti imaginaarinen (ts. yhtä kuin jokin luku kertaa –1:n neliöjuuri), ja lopulta (vuonna 1751) vieläpä, että ratkaisuja on äärettömän monta.

Kirjeenvaihdossa opettajansa Johann Bernoullin kanssa Euler syventyi samanaikaisesti kuuluisaan Baselin probleemaan, eli kysymykseen äärettömän sarjakehitelmän $1+1/2^2+1/3^2+1/4^2+\ldots$ tarkasta arvosta, joka oli vuosikausia askarruttanut matemaatikoita. Vuonna 1735 Euler onnistui osoittamaan, että tulos riippuu ympyrän kehästä ja on tarkasti yhtä kuin $\pi^2/6$. Samalla hän pystyi selvittämään monen muun samantapaisen sarjakehitelmän summan ja osoittamaan niiden yhteyden ns. Bernoullin lukuihin. Tämän päivän matemaatikot tietävät hyvin, etteivät hänen käyttämänsä menetelmät äärettömien summien käsittelyssä täytä kaikkia nykypäivän suppenemisvaatimuksia, mutta olisi kuitenkin väärin sanoa, että hän menetteli näissä tutkimuksissaan huolimattomasti. Havaittuaan todistuksiensa aukot ja heikkoudet hän paranteli ja täydensi niitä jatkuvasti.

Tässä talossa "Zur Alten Treu" Baselissa, osoitteessa Nadelberg 17, professori Johann Bernoulli opasti nuorta Euleria matematiikan probleemoihin. Samassa rakennuksessa, jonka katutasossa nyt sijaitsee pieni kirjakauppa, oli asunut 1522–29 Erasmus Rotterdamilainen kirjanpainaja Johannes Frobenin vieraana.

Vuonna 1739 Euler julkaisi ensimmäisen, jo vuosia työn alla olleen musiikkiteoreettisen tutkielmansa *Tentamen novae theoriae musicae*, johon kulminoituu Pythagorasta alkanut, Galilein, Mersennen, Descartesin ja Leibnitzin eteenpäin viemä musiikin harmonioiden matemaattinen tutkimus. Teoksessa Euler pyrki arvioimaan intervallien kauneutta erilaisilla miellyttävyysasteilla (*gradus suavitatis*). Keskeinen arviointikriteeri oli värähtelytaajuuksien muodostama lukusuhde: mitä yksinkertaisempi lukusuhde, sitä kauniimpi sointu. Euler oli Leibnitzin tapaan vakuuttunut, että musiikkia kuunnellessaan sielu tiedostamattaan laskee ja että samoin kuin yksinkertaisten lukujen suhde on helpompi käsittää myös kaksi värähtelyä, joiden taajuussuhde on yksinkertainen, miellyttää enemmän. Teoksessa Euler ei vain kartoittanut mahdollisuutta laajentaa nykyisen musiikin kantalukuja 2, 3 ja 5 luvulla 7, vaan myös analysoi sen aikaista musiikkia matemaattisin perustein. Ymmärrettävästi muusikot pitivät teosta liian matemaattisena ja apriorisena, matemaatikot puolestaan turhan musiikillisena.

Eulerin ensimmäiseen Pietarin kauteen 1727–41 ajoittuu myös maineikas kaksiosainen teos *Mechanica* (1736), joka oli eräänlainen rationaalisen (tai teoreettisen) mekaniikan ohjelmajulistus. Mekaniikka, eli kappaleiden lepoa ja liikettä koskeva tiede, oli vielä Newtonin jälkeisenä aikana sangen hajanainen kokoelma teoreettisia ja kokeellisia tuloksia, eikä Eulerin pyrkimyksenä ollut vähempi kuin koko mekaniikan aksiomatisointi ja selkeyttäminen. Teoksessa Euler myös sovelsi uusia analyyttisia menetelmiä Newtonin mekaniikkaan käyttäen erityisesti tätä varten kehittelemiänsä differentiaaliyhtälöitä. Mutta ei niin hyvää, ettei jotain huonoakin. Vuonna 1735 Euler sairastui vakavasti kuumetautiin, johon oli miltei menehtyä, ja muutama vuosi tämän jälkeen hänen toinen silmänsä tulehtui ja lopulta sokeutui. Hän itse syytti tästä silmiä rasittanutta kartografiaa, joka oli uskottu hänen tehtäväkseen. Venäjän suunnattoman pinta-alan tarkka kartoittaminen osoittautui valtavaksi ponnistukseksi jopa ahkeralle ja tunnolliselle Eulerille, mutta hän selvisi tehtävästä kunnialla.

Muutto Fredrik Suuren Preussiin 1741

Näin Euler oli noussut Euroopan tiedeyhteisön kärkikaartiin vaatimattomassa kymmenessä vuodessa. Hän oli julkaissut kymmenittäin tutkielmia matematiikasta ja fysiikasta sekä monia eritasoisia oppikirjoja mm. Venäjän kouluja varten sekä voittanut jo kahteen kertaan Pariisin tiedeakatemian palkintokilpailun. Ei siis mikään ihme, että Berliinin perusteilla oleva Preussin kuninkaallinen tiedeakatemia havitteli Euleria sen matemaattisen jaoston johtoon, mutta vasta Venäjän olojen muututtua selvästi turvattomammiksi Euler päätti hyväksyä Fredrik II:n kertaalleen korotetun tarjouksen. Hän ei kuitenkaan katkaissut yhteyttä Pietarin akatemiaan, vaan jatkoi mm. tutkielmiensa tiivistä julkaisemista sen *Commentarii*-sarjassa ja sai näistä palveluksistaan myös rahallista korvausta.

Saavuttuaan perheensä kanssa Berliiniin kesällä 1741 Euler sai ainakin aluksi nauttia kuningas Fredrikin arvostusta. Fredrik oli ranskalaista kulttuuria ja filosofista kirjallisuutta ihaileva sotaisa yksinvaltias, joka oli kirjeenvaihdossa Voltairen ja muiden valistusfilosofien kanssa. Hän kuitenkin kavahti tieteen kieltä, latinaa, eikä yrityksistä huolimatta onnistunut ymmärtämään matematiikkaa, mikä osittain selittää hänen kasvavan tyytymättömyytensä Euleriin. Akatemiansa presidentiksi Fredrik nimitti kuuluisan ranskalaistiedemiehen Pierre Louis Moreau de Maupertuisin, joka oli astemittausretkellään Tornionjokilaaksossa vuosina 1736–37 osoittanut maapallon olevan navoiltaan litistynyt. Euler arvosti Maupertuisin saavutuksia, ja kun Voltaire sittemmin julkaisi Maupertuisia pilkkaavia kirjoituksia, Euler asettui empimättä puolustamaan ystäväänsä.

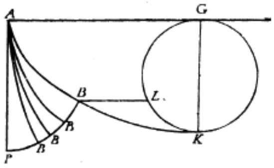
Analyysia ja teoreettista mekaniikkaa

Muutto uuteen ympäristöön ei näy haitanneen Eulerin tieteellistä toimintaa. Hänen analyyttiset menetelmänsä kehittyivät nopeasti, ja vuonna 1744 hän oivalsi eksponenttifunktion ratkaisevan merkityksen analyysissä. Hän johti luvun e=2.71828… raja-arvona lausekkeesta $(1+x/n)^n$ kun n kasvaa kohti ääretöntä, osoitti sen olevan luonnollisten logaritmien kannan (mikä, hämmästyttävää kyllä, ei ollut lainkaan itsestään selvää) ja päätyi lopulta kuuluisaan identiteettiin

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

joskaan hän ei vielä tuolloin käyttänyt nykyistä merkintää i imaginaariyksikölle. Tämä kaava ja sen johdannainen $e^{i\pi} = -1$ tulivat laajasti tunnetuksi Eulerin suositussa oppikirjassa *Introductio in analysin infinitorum* (1748), jota nykylukijakin pystyy melko vaivatta seuraamaan. Kaava lienee merkityksellisin kaikista Eulerin nimeä kantavista yhtälöistä, sillä se avasi aivan uusia näkökulmia matemaattisen fysiikan differentiaaliyhtälöiden, kuten aaltoyhtälön, ratkaisemiseen. Eksponenttifunktion avulla Euler onnistui mm. ratkaisemaan lineaarisen differentiaaliyhtälön A y + B dy/dx + C d^2y/dx^2 + … jne. = 0 muodossa $y(x) = e^{qx}$(a + b x + c x^2+ … jne.), jossa vakio q saattoi olla kompleksinen. Tällä tavalla kompleksiset suureet alkoivat vähitellen hivuttautua mukaan fysiikkaan, vaikka niiden syvällisempi fysikaalinen merkitys jäi vielä pitkäksi aikaa epäselväksi.

Integraali- ja differentiaalilaskennan lisäksi Euler vaikutti merkittävästi variaatiolaskennaksi nimeämäänsä matematiikan osa-alueeseen. Erilaiset ääriarvo- ja optimointiongelmat olivat kiinnostaneet luonnontutkijoita jo kauan. Galilei oli pohtinut, millaista reittiä pitkin kappale liikkuu kaikista nopeimmin painovoiman vaikutuksessa kahden pisteen välillä (liukuen kitkattomasti ylemmästä pisteestä alempaan), ja kokeidensa perusteella hän oli ehdottanut ratkaisuksi ympyränkaarta. Vuonna 1697 ongelmaan tarttui Eulerin opettaja Johann Bernoulli, joka nimesi kyseisen reitin *brakistokroniksi* ja osoitti sen olevan osa sykloidikäyrää. Myös hollantilainen Huygens oli havainnut (jo vuonna 1673 ilmestyneessä teoksessaan *Horologium Oscillatorium*), että teoriassa heilurin puntin olisi noudatettava juuri kyseistä käyrää käydäkseen säännöllisesti heilunta-amplitudista riippumatta.



Eulerin opettajan Johann Bernoullin laatima diagrammi (1697) liittyen nopeimman tien ongelmaan, josta Euler sai tärkeitä vaikutteita. Nopein tie A:sta K:hon painovoimakentässä kulkee pitkin sykloidia ABK.

Tätäkin aiemmin, vuonna 1657, Pierre de Fermat oli osoittanut, että valon taittumislaki voitiin ymmärtää seuraukseksi valon pyrkimyksestä liikkua kahden pisteen välillä mahdollisimman nopeasti. Kaiken taustalla häämötti vielä Aristotelisesta teleologiasta periytyvä käsitys, jonka mukaan luonnonilmiöt noudattavat kaikista helpointa ja vaivattominta tapaa päämääränsä saavuttamiseksi. Newton oli puolestaan pohtinut, minkä muotoinen kappale liikkuu parhaiten liikettä vastustavassa väliaineessa, ja tästä ongelmasta Euler oli saanut jo varhain sysäyksen omiin hydrodynamiikkaa ja laivojen liikettä koskeviin teorioihinsa. Yhteistä kaikille edellä mainituille tapauksille on, että niissä on perimmäisimmiltään kysymys ääriarvojen (maksimien tai minimien) määräämisestä tietyille integraalisuureille (ns. funktionaaleille), joiden integrandin reuna-arvot ovat kiinnitettyjä. Kehiteltyään lähestymistapaansa näihin ongelmiin Euler julkaisi 1744 variaatiolaskennan perusteoksena pidetyn *Methodus inveniendi lineas curvas maxime minimive proprietate gaudentes* (Menetelmä maksimi- tai minimiominaisuuksia ilmentävien tasokäyrien löytämiseksi), joka yleisen menetelmän lisäksi sisälsi kymmenittäin esimerkkejä sekä statiikasta että dynamiikasta. Mainittakoon kuitenkin, että kyseinen menetelmä nojautui vielä osittain geometriaan, minkä puutteen nuori italialainen Joseph-Louis Lagrange korjasi 1750-luvun puolivälissä keksimällään puhtaan analyyttisella variaatiomenetelmällä (ns. δ-variaatiolla).

Vuonna 1744, eli yhtä aikaa Eulerin *Methodus inveniendi*n kanssa, Maupertuis oli julkaissut kuuluisan pienimmän vaikutuksen periaatteensa, jonka mukaan kaikissa dynaamisissa prosesseissa yhteenlaskettu (ja ajan yli integroitu) vaikutus A, eli suure

$$A = \int_{t1}^{t2} \sum_{\forall i} m_i v_i \frac{ds_i}{dt} dt$$

pyrkii minimoitunaan. Kaavassa m_i symboloi systeemin kunkin osan i massaa, v_i vastaavaa nopeutta, s_i paikkaa (ja ds_i sen differentiaalista muutosta) sekä t_1 ja t_2 tarkasteluajan alku- ja loppuhetkeä. Keksimästään periaatteesta Maupertuis pystyi helposti johtamaan monia tunnettuja luonnonlakeja, kuten valon taittumislain, mutta ongelmaksi muodostuikin periaatteen perustelu, joka ei ollut odotetun rationalistis-mekanistinen vaan metafyysinen, nimittäin usko luonnon yksinkertaisuuteen ja siihen, että vaikutuksen A minimointi on parhaiten sopusoinnussa Luojan viisauden ja täydellisyyden kanssa. Laki aiheuttikin kiivasta polemiikkia ja jopa harvinaisen epäsiistin prioriteettikiistan, johon myös Euler osallistui. Tässä yhteydessä asiasta riittää todeta, että Euler olisi hyvin voinut itse julistautua periaatteen keksijäksi, sillä olihan hän juuri itse soveltanut sitä matemaattisesti lukuisissa esimerkeissä, mutta toisin kuin Maupertuis hän osasi viisaasti rajata sen koskemaan ainoastaan kitkatonta liikettä. Euler oli kuitenkin vakuuttunut, että kaikki luonnonilmiöt voidaan pohjimmiltaan tulkita jonkin fysikaalisen suureen ääriarvona, vaikka tähdensi olevan mahdotonta määrätä *a priori* mikä ominaisuus tai suure on kulloinkin kyseessä. Pienimmän vaikutuksen periaate, sopivasti muunneltuna ja irrotettuna metafyysisestä taustastaan, on eräs modernin fysiikan kulmakivistä, sillä miltei kaikki fysiikan peruslait ovat nykyisin puettavissa variaatioperiaatteen muotoon (tästä aiheesta enemmän Osmo Pekosen artikkelissa tämän lehden numerossa 3/2004).

Monet Eulerin käyttöön ottamat analyyttiset funktiot, menetelmät sekä merkinnät ovat tämän päivän lukiolaisillekin tuttuja, kun taas esimerkiksi Newtonin *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* -teos (1687) ei geometrisoivan tyylinsä vuoksi enää avaudu muille kuin aiheeseen vihkiytyneille asiantuntijoille. Newtonin antaman esimerkin mukaan kappaleiden liikettä oli kauan tapana analysoida geometrisesti, hajottamalla suunnatut eli vektoraaliset suureet, kuten kiihtyvyys, liikeradan tangentiaali- ja normaalisuuntiin. Tämä oli vielä melko luontevaa keskeisliikkeen (kuten planeettojen rataliike) tapauksessa, mutta yleisemmin kiinteät suorakulmaiset koordinaatit olivat kätevämpiä. Lienee vähemmän tunnettua, että Euler oli tosiasiassa ensimmäinen, joka kirjoitti Newtonin toisen liikelain, ts. kappaleeseen kohdistuva voima on yhtä kuin sen liikemäärän muutosnopeus, karteesisissa eli suorakulmaisissa koordinaateissa (1750). Hän, eikä siis Newton, kirjoitti lain ensimmäistä kertaa tunnettuna yhtälöryhmänä $\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$, jossa $\boldsymbol{F}$ on voimavektori (x-, y- ja z-komponentteineen), m massa ja $\boldsymbol{a}$ kiihtyvyysvektori. Vuonna 1749 ilmestyneessä teoksessaan *Scientia Navalis*, jossa hydrostatiikan yhtälöt esiintyivät ensi kertaa nykymuodossaan, Euler käsitteli myös jäykän kappaleen (kuten laivan) liikettä modernilla tavalla, eli yhdistelmänä kappaleen massakeskipisteen suoraviivaista translaatioliikettä sekä pyörimisliikettä keskipisteen halki kulkevan akselin ympäri. Perusteellisemman jäykän kappaleen liikkeen teorian hän julkaisi 1765 teoksessa *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*.

Vuosina 1760–62 Euler kirjoitti myöhemmin suosituiksi tulleet luonnonfilosofiset kirjeet nuorelle prinsessa Friederike von Brandenburg-Schwedtille. Kirjeiden aiheisiin kuuluivat fysiikan perusilmiöt, kuten painovoima, valo ja optiikka, sähkö ja magnetismi, sekä logiikka, tietoteoria, havaintopsykologia ja teologia. Erityistä huomiota Euler kiinnitti Leibnitzin monadioppiin (ja varsinkin Christian Wolffin tulkintaan siitä), jota hän piti vaarallisena ja järjenvastaisena. Kirjeet julkaistiin sittemmin Pietarissa otsikolla *Lettres à une Princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie* (1768–72), ja teos käännettiin nopeasti miltei kaikille aikansa sivistyskielille. Se kuuluu varhaisimpiin tieteen popularisointeihin, ja osin sen ansiosta Euler kohosi oman aikansa tieteen ikoniksi, jonka nimen tunsivat myös muut kuin matemaatikot tai astronomit. Eulerin "kirjeistä" on monta mainintaa esimerkiksi kansallisfilosofimme J. V. Snellmanin kootuissa teoksissa. Mainittakoon, että prinsessa Friederikestä tuli sittemmin pienen Herfordin kaupunkivaltion viimeinen hallitsija ja että samaa virkaa aiemmin hoitanut Elisabeth von der Pfalz oli ollut filosofisessa kirjeenvaihdossa mm. Descartesin kanssa. On mielenkiintoista ajatella, että kaksi näin korkeaa oppia saanutta naista on hallinnut tätä vanhaa luostari- ja hansakaupunkia.

Maupertuisin kuoltua vuonna 1759 kuningas Fredrikin oli löydettävä tiedeakatemialleen uusi presidentti. Euler olisi ollut luonteva valinta tähän tehtävään, mutta kuningas piti valtaa tiukasti käsissään ja yritti taivuttaa Eulerin tieteellistä kilpailijaa, ensyklopedisti Jean le Rond d'Alembertia, virkaan, tosin ilman menestystä. Kuninkaan häpeällisestä kiusanteosta huolimatta Euler ylläpiti sitkeästi akatemian toimintaa sekä sen observatorion, kasvitieteellisen puutarhan ja almanakkatoimituksen valvontaa. Näissä olosuhteissa Venäjän keisarinna Katariina Suurella ei ollut vaikeaa suostutella Euleria palaamaan Pietariin, joskin varsin ruhtinaallista korvausta vastaan. Eulerin ehtoihin kuului myös, että hänen lapsensa saisivat hyvät virat Venäjällä. Lähtöä Berliinistä synkisti kuitenkin tieto, että kuningas oli Eulerin lähdöstä suivaantuneena kieltänyt yhtä hänen pojistaan poistumasta maasta. Vain Katariina Suuren diplomatian ansiosta Preussiin jäänyt poika sai lopulta matkustusluvan.

Toinen kausi Pietarissa 1766–83

Euler saapui Pietariin vuonna 1766 sekä tarttui heti työhönsä ja taantuneen tiedeakatemian kehittämiseen. Melko pian hän menetti kuitenkin näkökykynsä lopullisesti kaihileikkauksen huolimattoman jälkihoidon seurauksena. Lisäksi hänen kotinsa tuhoutui Pietarin suuressa tulipalossa vuonna 1771, josta hän itsekin vain täpärästi pelastui, ja hänen vaimonsa kuoli vuonna 1773. Vastoinkäymiset eivät kuitenkaan heikentäneet hänen luomisvoimaansa. Vuonna 1770 ilmestyi Eulerin algebran perusteos *Vollständige Anleitung zur Algebra*, jonka hän oli sanellut eräälle kotiapulaiselleen, joka samalla oppi matematiikkaa. Tästä kirjasta tulikin Eukleiden *Alkeiden* rinnalla tärkein matematiikan oppikirja pitkäksi aikaa. Vuonna 1772 ilmestyi Eulerin kuun liikettä käsittelevä tutkielma *Theoria motum Lunae*, joka myös sisälsi tarkennettuja taulukoita kuun liikkeen ennustamiseksi. Tässä työssä Euleria oli avustanut mm. hänen poikansa Johann Albrecht ja Turusta kotoisin ollut nuori matemaatikko Anders Johan Lexell (1740–84). Suomalaisesta näkökulmasta on kiinnostavaa, että Lexellistä tuli sittemmin Eulerin seuraaja Pietarin tiedeakatemian matematiikan professorina, mikä sinänsä on ainutlaatuinen saavutus suomalaiselta matemaatikolta. Valitettavasti Lexellin virkakausi päättyi ennenaikaisesti.

Kuun, auringon ja muiden taivaankappaleiden liike kuului 1700-luvun matematiikan kestoaiheisiin. Syy ei ollut ainoastaan älyllinen, vaan viime kädessä käytännöllinen, sillä vertaamalla taulukoituja tietoja havaintoihin pystyttiin määräämään paikan sijainti missä tahansa maapallolla. Tämä oli ensiarvoisen tärkeää mm. navigoinnissa ja maantiedossa. Euler kehitti jatkuvasti menetelmiään taivaankappaleiden liikkeen analysoimiseksi ja johti siihen tarvittavia differentiaaliyhtälöitä. Hän työskenteli myös erittäin hankalana tunnetun kolmen kappaleen ongelman parissa, joskaan ei onnistunut löytämään sille yleispätevää ratkaisua. Käyttäen erästä Eulerin vuonna 1753 kehittämää laskentamenetelmää saksalainen Tobias Mayer taulukoi kuun liikkeen hyvin tarkkaan ja voitti (tosin vasta kuolemansa jälkeen) Englannin valtion lupaaman palkkion menetelmästä pituuspiirin määrittämiseksi.

Aalto-optiikkaa ja fysiikkaa

Vuosina 1769–71 Euler julkaisi kolmiosaisen linssejä ja niiden taitto-ominaisuuksien parantamista käsittelevän kokoomateoksen *Dioptrica*. Optiset instrumentit, kuten kaukoputket ja mikroskoopit, sekä valon ja värien teoria kiinnostivat Euleria läpi elämän. Hän kyseenalaisti jo vuonna 1746 Newtonin esittämän valon hiukkastulkinnan ja oli tosiasiassa eräs harvoja aaltoliiketeorian puolestapuhujia 1700-luvulla. Siihen hän päätyi pohdittuaan äänen ja valon monia ilmeisiä analogioita. Hänen mielestään tumma kappale ei tule näkyväksi sen takia, että valo heijastuisi eli kimpoaisi siitä, kuten tennispallo seinästä, vaan siksi, että valo saa aikaan tietynlaisen värähdysliikkeen kappaleen pinnan pienimmissä osissa. Nämä osat vuorostaan säteilevät värähdystä ympäröivään eetteriin. Tässä luontevana analogiana toimi musiikki-instrumentti tai jännitetty kieli, jonka voi saada soimaan sopivan korkuiselle sävelelle altistamalla. Tämä lienee varhaisin muoto fysikaalisen optiikan nimellä kulkevasta periaatteesta. Näyttö ei kuitenkaan osoittautunut riittäväksi valon aaltoliiketeorian läpimurtoon, vaan siihen tarvittiin vielä interferenssi- ja diffraktioilmiöt sekä polarisaatio, joita Thomas Young ja Augustin Jean Fresnel tutkivat vuorollaan 1800-luvun alussa sekä kokeellisesti että teoreettisesti. Newtonilta oli myös peräisin uskomus, ettei linssikaukoputkia haitanneita taitto- ja värivirheitä voisi mitenkään korjata, mikä takasi Newtonin kehittelemän peilikaukoputken menestyksen. Euler sen sijaan oivalsi, että kaikilla aineilla on spesifinen kyky taittaa eriväristä valoa, ja siksi tietyn muotoiset ja eri aineista koostuvat yhdistelmälinssit voidaan suunnitella niin, ettei värivirheitä pääse syntymään (1749). Silmä oli Eulerin mielestä esimerkki tällaisesta akromaattisesta linssistä (vaikka todellisuudessa näin ei ole). Sittemmin englantilainen John Dollond toteutti Eulerin ehdottaman eri lasityypeistä koostuvan värivirheettömän linssin (1757).

Eulerin käsitykset eetteristä valon etenemisen väliaineena sekä painovoiman ja sähkön aiheuttajana eivät toki olleet nykytiedon valossa oikeita. Magnetismikaan ei johdu mistään äärimmäisen hienosta magneettien läpi virtaavasta aineesta, kuten Euler ajatteli. Mutta kun jätetään huomiotta näihin teorioihin väistämättä liittyneet mekanistiset tulkinnat, niiden takaa voi jo aavistaa myöhemmin matemaattiseen asuun puettujen kenttäteorioiden esiasteen. Ideaalisille eli kitkattomille nestevirtauksille Euler formuloi jo kenttäteoriaksi luonnehdittavat differentiaaliyhtälöt (ns. Eulerin yhtälöt) sekä jatkuvuusyhtälön, mutta sähkömagneettiseen kenttäteoriaan tiedot eivät vielä riittäneet.

Eulerin viimeinen tieteellinen työ koski kuumailmapallojen dynamiikkaa. Tiedeakatemian sihteerin Nicolas Fussin ja markiisi Antoine de Condorcetin muistokirjoituksista päätellen hän oli viimeisenä elinpäivänään 18. syyskuuta 1783 lounastanut ensin Lexellin kanssa keskustellen Herschelin vuonna 1781 löytämästä taivaankappaleesta (jonka Lexell oli osoittanut olevan planeetta eikä, kuten aluksi luultiin, komeetta ja joka myöhemmin nimettiin Uranukseksi) ja leikkinyt sitten hieman lapsenlapsensa kanssa. Nauttiessaan teetä sohvalla hän sai sairaskohtauksen, piippu putosi hänen kädestään ja hän lausui viimeisinä sanoinaan ”Minä kuolen” ennen vaipumistaan tajuttomuuteen. Hän kuoli myöhemmin samana iltana, johon Condorcet lisäsi monasti siteeratut sanat ”…il cessa de calculer et de vivre” (hän lakkasi laskemasta ja elämästä). Eulerin ääni ei kuitenkaan vielä vaiennut, sillä hänen tieteellisiä töitään julkaistiin Pietarin tiedeakatemian sarjoissa runsaat 50 vuotta hänen kuolemansa jälkeen.

Eulerin merkityksestä eksaktien tieteiden kehitykselle

Eulerin tuotanto oli millä tahansa mittarilla laskettuna valtava – yli 800 teosta – ja sen tieteellisen edition toimittaminen, *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, on jatkunut jo vuodesta 1911 lähtien. Tällä hetkellä toimitettujen volyymien lukumäärä on 76. Kullakin Eulerin teoksella on oma järjestysnumeronsa luettelossa, jonka ruotsalaisen matemaatikko Gustav Eneström laati viime vuosisadan alussa. Ehkä luotettavin yleiskatsaus Eulerin tieteelliseen työhön on *Dictionary of Scientific Biographyssä* oleva A. P. Juškevitšin artikkeli. Biografioista voi suositella Rüdiger Thielen saksankielistä ja Emil Fellmannin äskettäin englanniksi käännettyä elämänkertaa. Suomeksi on julkaistu E. T. Bellin viihdyttävä, joskin epäluotettava kirjoitus otsikolla ”Analyysi ihmishahmossa” teoksessa *Matematiikan miehiä*. Erityisen kyseenalainen on Bellin ehkäpä vitsiksi tarkoittama toteamus, ettei Euler piitannut siitä, olivatko hänen teoriansa totuudenmukaisia, ja että hän luotti sokeasti laskelmiinsa ilman fysikaalista tuntumaa. Kuten jokainen tieteestä ja tekniikasta perillä oleva hyvin ymmärtää, insinöörin on tämän tästä tehtävä oletuksia, joskus karkeitakin arvauksia, tutkimuksensa kohteesta asioiden todellisten suhteiden ollessa hyvin monimutkaisia. Euler oli tosiasiassa ensimmäisiä korkeampaa matematiikkaa insinööritieteisiin systemaattisesti ja menestyksellisesti soveltaneita tiedemiehiä.

Tarjolla olevien lähteiden antama kuva Eulerista henkilönä on varsin sympaattinen: hän oli yleensä hyväntuulinen ja tuli toimeen miltei kaikkien ihmisten kanssa. Vain uskontoa halventavien ihmisten kerrotaan saaneen hänet menettämään malttinsa. Muuten hän eli isältään omaksumansa vakaumuksen mukaista hiljaista ja säännöllistä elämää. Hänen muististaan ja keskittymiskyvystään kerrotaan usein mitä hämmästyttävimpiä asioita. Henkisesti rikkaana ja tasapainoisena persoonallisuutena hän ei, toisin kuin tiedemiehet yleensä, perustanut keksintöjen prioriteetista, vaan soi löytämisen riemun auliisti muille. Vapaa-aikanaan hän soitti mielellään klavesiiniä (pianon edeltäjää), pelasi šakkia ja harrasti matemaattisia pulmatehtäviä. Viime aikoina hänen nimensä on usein yhdistetty ”sudoku”-numeroristikoihin, sillä hän on osoittautunut ns. latinalaisten neliöiden ensimmäiseksi tutkijaksi.

Sveitsin postilaitos julkaisi Eulerin juhlavuoden kunniaksi erikoismerkin, joka esittää yksityiskohtaa sveitsiläisen Emmanuel Handmannin 1750-luvulla maalaamasta muotokuvasta. Kuvassa Eulerin vaurioitunut silmä on selvästi näkyvissä. Merkkiin on myös havainnollistettu Eulerin löytämä kaava e-k+f=2, joka yhdistää minkä tahansa konveksin polyedrin kulmapisteiden (e), särmien (k) ja tahkojen (f) lukumäärän.

Vaikka Eulerilla ei koskaan ollut varsinaisia oppilaita, sillä hän ei luennoinut julkisesti eikä suoraan ohjannut väitöskirjatöitä, hän vei kuitenkin kirjoituksillaan eksaktien tieteiden kehitystä eteenpäin kenties enemmän kuin kukaan muu sekä vaikutti oppikirjoillaan monien sukupolvien ajatteluun ja tieteelliseen intuitioon. Nykyään hänen luomansa matematiikan menetelmät tuntuvat lähes itsestäänselvyyksiltä. Tässä mielessä voidaan siis sanoa, että olemme kaikki – niin matemaatikot, luonnontieteilijät kuin insinöörit – jos emme suoraan, niin ainakin välillisesti, Eulerin ”opetuslapsia”.

KIRJALLISUUTTA

Fellmann, E. A., *Leonhard Euler*. Birkhäuser Verlag, Basel 2007.
Thiele, R., *Leonhard Euler*. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1982.
Szabó, I., *Geschichte der mechanischen Prinzipien*. Birkhäuser Verlag, Basel 1977.
Bell, E. T., *Matematiikan miehiä*. Suom. Helka ja Klaus Vala. WSOY 1963.
Calinger, R., *Historia Mathematica 23* (1996), s. 121–166.
Tietoa aiheesta on saatavilla myös Internet-osoitteista: www.euler-2007.ch; www.eulerarchive.org

Kirjoittaja on tekniikan tohtori ja tutkija Valtion Teknillisessä Tutkimuskeskuksessa. Hän on myös äskettäin suomentanut Eulerin Kirjeitä saksalaiselle prinsessalle (ks. arvostelu tässä lehdessä).