Kuinka kulmia mitataan?

Pentti Alanen

Oletetaan tasossa kolme mielivaltaista pistettä A, B ja C, joiden kautta on piirretty kolme suoraa, jotta muodostuu kolmio ABC. Onko pisteessä A olevan kolmion kulman CAB koko sama, jos kolmion sivut AB ja AC fyysisesti piirretään pisteestä A kohti pisteitä B ja C, verrattuna tapaukseen, jossa samat kolmion sivut piirretään päinvastaiseen suuntaan, pisteistä B ja C kohti pistettä A? Kysymys voi tuntua absurdilta. Matemaattisessa käsitejärjestelmässä, joka on – Yrjö Reenpään termein "ajasta ulostyönnetty " (Reenpää 1974, 79) – ei viivojen piirtämissuunnalla ole merkitystä kysytyn kulman kokoon, mutta empiirisessä reaalimaailmassa, jossa mittaukset tehdään empiirisin, luonnonlakeja noudattavin instrumentein, kysymykseen on syytä paneutua huolellisesti.

Empiirinen kulmanmittaus ajatellaan tavanomaisesti tapahtuvan tähystämällä kulmapisteestä toisiin kulmapisteisiin ja mittaamalla tähystyssuuntien välinen kulma. Itsestään selvänä taustaoletuksena on, että valonsäde etenee suoraviivaisesti. Kolmion kulmasumman mittaamista varten on tähystys suoritettava jokaisesta kulmapisteestä ja laskettava saadut lukemat yhteen. Valonsäde on kuitenkin vain yhteen suuntaan etenevä signaali, joka kuljettaa informaatiota kulmapisteen sijainnista muihin kulmapisteisiin. Pisteessä A oleva tähystäjä perustaa havaintonsa häntä kohti B:stä ja C:stä tuleviin signaaleihin, mutta pisteessä B oleva havainnoija ei tarkkaile sitä valonsädettä, jota A:ssa tarkkaillaan, vaan vastakkaiseen suuntaan kulkevaa signaalia. Näillä signaaleilla ei ole toistensa kanssa mitään tekemistä. Saadut lukemat ovat kolmion kulmasumman laskemisen kannalta adekvaatteja sillä ehdolla, että valosäde kulkee kunkin pisteparin AB, AC, BC välillä molempiin suuntiin identtistä rataa pitkin. Onko näin?

Tarkastellaan asiaa ensiksi avaruudessa, jossa pyritään määräämään empiirisesti avaruuskolmion Maa, Mars ja Kuu kulmasumma. Tämä on ajatuskoe, mutta tulevaisuudessa todennäköisesti tehtävissä empiirisesti. Koska kaikki kolme kolmion kärkipistettä liikkuvat koko ajan toisiinsa nähden, jolloin kulmalukema muuttuu, on sovittava mittaushetkestä, jona saatu lukema lasketaan yhteen muiden kulmalukemien kanssa. Vuodenajasta riippuen valonsäde viipyy matkallaan Marsista Maahan esimerkiksi 20–40 minuuttia. Marsista lähteneen valonsäteen saavuttaessa Maan, on Mars siirtynyt radallaan eteenpäin. Sama pätee vastakkaiseen suuntaan. Marsiin Maasta saapuvan valonsäteen saavuttaessa Marsin Maa on siirtynyt radallaan eteenpäin. *Ei ole olemassa empiiristä signaalia, joka kuljettaa informaatiota Maan sijainnista Marsiin ja on kulkuradaltaan identtinen vastakkaiseen suuntaan Maan ja Marsin välillä liikkuvan, sijainnista kertovan signaalin kanssa.* Tämä olisi mahdollista vain, jos valosäteen nopeus olisi ääretön. Koska kulmien sivut eivät ole pareittain toistensa kanssa identtisiä, mitkään empiiriset, valonsäteisiin perustuvat kulmanmittauslukemat Maassa, Marsissa ja Kuussa eivät muodosta saman Maa–Mars–Kuu-kolmion kärkipisteitä, olipa mittausajankohdat valittu miten tahansa. Asiaa ei voi myöskään ratkaista siten, että kulmanmittaus perustuisi tulevan säteen sijasta lähtevän valonsäteen suuntaan. Ei ole olemassa sellaista empiiristä kolmiota Maa–Mars–Kuu, jonka kulmasumma olisi määritettävissä. Tällainen ajatus koetaan mahdolliseksi vain sellaisessa todellisuuden käsityksessä, jossa kulmanmittauslaite itse ei ole empiirinen, luonnonlakeja noudattava laite, vaan sen toiminnan oletetaan perustuvan matematiikassa käytössä oleviin periaatteisiin, joista aika historiallisena ilmiönä on abstrahoitu pois.

Tilanne ei muutu toiseksi, vaikka gravitaation vaikutus valonsäteen rataan otettaisiin huomioon yleisen suhteellisuusteorian mukaisesti. Gravitaatiolla on kuitenkin merkitystä empiirisessä kulmanmittauksessa, koska on otettava huomioon gravitaation vaikutus paitsi valonsäteen kulkuun myös sen vaikutus kulmanmittauslaitteen toimintaperiaatteisiin. Tavanomaisesti tämä on unohdettu ja ajateltu, että kulman koko voidaan aina määrittää ympyrän säteen ja kulman sivujen väliin jäävän ympyränkaaren *suhteen* avulla, jolloin kulmanmittauslaitteen empiirisellä koolla ei olisi merkitystä. Näin asia on kuitenkin vain matematiikassa ja euklidisessa geometriassa.

Niin sanotun Gaussin (ajatus?)koetta pidetään usein oivalluksena, jossa on päästy eroon siitä tarpeettomasta olettamuksesta, että myös empiirisen kolmion kulmasumman on pakko olla aina 180 astetta. Tämän ennakkoluuloisen(?) olettamuksen katsotaan syntyneen siksi, että olemme suhteellisen pienikokoisia olentoja avaruuden kokoon nähden ja olemme mitanneet aina vain pienikokoisia kolmioita (Nevanlinna 1963).

Empiirisen maailman geometrian epäeuklidisuuden mahdollisuutta on tapana havainnollistaa ajatuskokeella, jossa Maapallon pinnalla elää kaksiulotteisia olioita. Pallolle on piirretty pienikokoinen kolmio ja sellainen suurikokoinen kolmio, jonka sivut ovat Maapallon isoympyröitä; yksi sivu pitkin päiväntasaajaa ja kaksi sitä vastaan kohtisuorassa napojen kautta kulkevaa. Koska empiiriset kokemuksemme ovat pienistä kolmioista, saamme tässä tilanteessa pienikokoisen kolmion kulmasummaksi 180 astetta. Olisi kuitenkin väärin yleistää tämä koskemaan kaikkia empiirisiä kolmioita, sillä isoympyröistä muodostuvan suuren kolmion kulmasummaksi tulisi Päiväntasaajalla olevien kahden kulman summa 180 astetta ja lisäksi Pohjois- tai Etelänavalla olevan kulman koko. Tällöin pallon pinnalla asuville kaksitasoisille olioille paljastuisi, että itse asiassa avaruus kaartuu kolmanteen ulottuvuuteen. Näin päädytään käsitykseen, jonka mukaan matematiikka voi paljastaa avaruuden geometrian todellisen syvärakenteen, josta emme voi muodostaa havaintokuvaa. Näin asiaa tarkastelee esim. Jukka Maalampi äskettäisessä kirjassaan Albert Einsteinista (Maalampi 2006) yhtäpitävästi mm. Rolf Nevanlinnan aikaisempien kuvausten kanssa (Nevanlinna 1963).

Tässä päättelyssä on kuitenkin ongelma, joka on analoginen avaruuskolmion mittauksessa tehdyn kanssa. Jos päättelemme, että suurissa empiirisissä kolmioissa kulmasumma voi poiketa 180 asteesta, on otettava huomioon, että sama koskee myös itse mittausmenetelmää. Ehkäpä suurikokoiset kulmanmittauslaitteet antavat samalle kulmalle eri lukeman kuin pienikokoinen instrumentti. Jos mittaamme esimerkissä kuvitellun, Maapallolla olevan suuren kolmion kulman suuruuden pienellä laitteella, saamme Päiväntasaajalla olevien kulmien suuruudeksi 90 astetta, mutta jos käytämme harppia, jonka aukeama on yhtä pitkä kuin kolmiomme sivu Päiväntasaajalta navalle, saamme Päiväntasaajalla olevien kulmien suuruudeksi 60 astetta. Mikä on kulman ”oikea” koko? Millä tavalla kulmanmittauslaitteen koko on otettava huomioon kulman suuruuden mittauksessa?

Einsteinin käsityksen katsotaan eräiden lähteiden mukaan olleen, että fysiikka ”on teoria Luonnosta sellaisena, joksi se osoittautuu, kun sitä tutkitaan reaalisilla mittasauvoilla ja kelloilla” (Häussling 1969). Tätä näkökohtaa on useasti tutkittu suhteellisuusteorioitten yhteydessä esim. kellojen käynnin suhteen. Kulmanmittauksessa sama periaate näyttää unohtuneen. Empiirisissä mittauksissa käytettävä mittauslaite on itsekin empiirinen ja noudattaa sen luonnon lakeja, jota sillä tutkitaan. Nevanlinnan ym. esittämä havainnollistava esimerkki on pätevä vain, jos käytettävän mittauslaitteen ominaisuudet eivät ole riippuvaisia luonnonlaeista, vaan nojaavat matemaattisen taustakoordinaatiston periaatteisiin. Näin matematiikasta muodostuu eräänlainen tietoteoreettinen newtonilainen eetteri, jolle maailma tieteessä ajatellaan kuvattavan. Tällöin voitaisiin maailmasta riippumattomasti, ”objektiivisesti” sanoa, millainen maailma ”on”. Tämä ajatus on ristiriidassa Ludwig Wittgensteinin kielen ja maailman yhteenkietoutumisen teesin kanssa sekä nähdäkseni myös Albert Einsteinin aineen ja avaruuden yhteenkietoutumisen teesin kanssa. Jos luontoa tutkivien instrumenttien toimintaperiaatteet ovat loogisesti yhteensopivia tutkimuskohteensa kanssa, ei niillä voi sanoa riippumattomasta näkökulmasta, millainen Luonto on. Kielen ja maailman, matematiikan ja maailman, mittausmenetelmien ja mittauskohteen, avaruuden ja aineen yhteenkietoutuminen ei johda Einsteinin päätelmään, jonka mukaan avaruuden geometria voitaisiin saada selville empiirisin menetelmin (Einstein, *Ideas and opinions*, 235), vaan Wittgensteinin päätelmään: kielen avulla ei voi päästä maailman ulkopuolelle. Meillä ei ole Jumalan näkökulmaa maailmaan, jossa elämme, vaan tutkimme sitä sisältäpäin, sen ominaisuuksista riippuvin menetelmin.

Lähteet

Alanen, Pentti, *Einstein ja Wittgenstein, kaksi kulmakiveä*, Mediapinta Oy, Tampere 2009.

Einstein, Albert, *Ideas and Opinions*, Bonanza Books, New York, ei painovuotta.

Häussling, Ansgar, *Die Reichweite der Physik*, Verlag Anton Hain, Meisenheim am Glan 1969.

Maalampi, Jukka, *Maailmanviiva*, Ursa, Helsinki 2006.

Nevanlinna, Rolf, *Suhteellisuusteorian periaatteet*, WSOY, Porvoo 1963.

Reenpää, Yrjö, *Ajateltua ja koettua*, Otava, Helsinki 1974.

Kirjoittaja on sosiaalihammaslääketieteen professori (emeritus).