Matematiikka ja kieli

Timo Tossavainen

Tässä artikkelissa tarkastellaan matematiikan kielellisiä piirteitä erityisesti matematiikan oppimisen ja opettamisen näkökulmasta. Lisäksi kirjoituksessa pohditaan matematiikan kieliaspektin merkitystä mm. matematiikan opettajankoulutuksen kannalta.

Matematiikka on osoittautunut mahdottomaksi asiaksi määritellä tyydyttävällä tavalla: kaikki yritykset ovat jääneet joko liian kapea-alaisiksi tai ylimalkaisiksi [1]. Matematiikan monisäikeisyys näkyy myös siten, ettei sen merkitystä ja luonnetta voida kuvata yksikäsitteisellä tavalla edes sen oppimisen ja opettamisen näkökulmasta.

Myös siitä, millainen oppilas on matemaattisesti lahjakas, on olemassa monenlaisia käsityksiä. Perinteinen tapa puhua esim. lukio-opintojen yhteydessä kieli- ja matematiikkalinjoista paljastaa, että ihmisten on ajateltu jakautuvan – enemmän tai vähemmän poissulkevasti – joko kielellisesti tai matemaattisesti lahjakkaiden yksilöiden joukkoihin. Mitkään tieteelliset tutkimukset eivät näytä kuitenkaan erityisesti tukevan tätä uskomusta. Pikemminkin viime aikoina on nähty, että yksilön matemaattinen ja kielellinen kehittyminen tukevat toinen toisiansa, joten matematiikkaa ja sen oppimista on alettu tutkia myös kielen ja sen oppimisen näkökulmasta.

Millä perusteella matematiikkaa voidaan pitää kielenkaltaisena objektina? Ajatus, ettei matematiikkaan liity mitään kielellisiä piirteitä, tullee kumotuksi sillä huomautuksella, että sitä ei käytännössä voida esittää pelkästään luonnollisia kieliä käyttäen [2].

Matematiikan kielellisiä piirteitä

Matematiikalla on oma sanastonsa ja siihen liittyy runsas joukko vakiintuneita vain sille tyypillisiä ilmaisuja ja kielellisiä rakenteita. Muun muassa matemaattisissa väitteissä ja päättelyissä yleistä 'jos ja vain jos' -rakennetta käytetään harvoin luonnollisissa kielissä. Toisaalta matematiikassa käytetään runsaasti arkisessakin kielenkäytössä esiintyviä sanoja, mutta usein näillä sanoilla on konkreettiseen ja havainnolliseen sanojen tulkintaan nähden erilainen merkitys. Sana diskreetti ei viittaa matematiikassa hienotunteisuuteen eikä sileä funktio ole rypistyneen funktion vastakohta.

Matemaattinen teksti sisältää yleensä myös tavallisen aakkoston ulkopuolisia symboleja. Näitä voidaan käyttää sekä matemaattisten objektien niminä ja ilmaisemaan niiden välisiä suhteita että myös välittämään tietoa mm. siitä, kuinka kaavojen ja merkkijonojen välittämää päättelyä tulisi seurata. Erityisesti viimeksi mainittu seikka mahdollistaa sen, että matematiikassa käytetään – lähinnä luonnollisten kielten virkkeisiin verrattavissa olevalla tasolla – sellaisiakin argumentaatiomuotoja, joissa päättely voi edetä yhtä aikaa moneen suuntaan.

Vaikka matematiikkaa yleisesti pidetään mahdollisuutena esittää monimutkaisiakin ajatusrakennelmia erityisen täsmällisellä tavalla, siihen ei kuitenkaan liity kaiken kattavaa luonnollisen kielen kielioppiin verrattavissa olevaa sääntökokoelmaa siitä, millä tavalla mikäkin asia pitäisi sanoa (kaikissa mahdollisissa asiayhteyksissä). On vain olemassa perinteen kaltaisena välittyviä tapoja ilmaista vakiintuneita käsitteitä ja niistä koostuvia rakenteita, jotka kuitenkin eri asiayhteyksissa voivat korvautua uusilla merkinnöillä. Esimerkiksi funktion derivaattaan viitataan eri yhteyksissä funktion nimeen liitetyllä pilkulla, pisteellä tai ilmaisulla $\partial f / \partial x$ jne.

Tämäkin ominaisuus kuitenkin tukee sitä käsitystä, että matematiikka on kieleen verrattavissa: se kehittyy kuten kieli tuottaen uusia ilmaisutapoja myös entuudestaan tutuille käsitteille ja rakenteille. Toisaalta on todettava, että useimpien matematiikan osa-alueiden sisällä merkintöjen käyttöä ja ilmaisujen tuottamista yleisesti ohjaavat hyvinkin vakiintuneet käytännöt.

Matematiikan kehittyminen kielenä paljastuu myös tutkimalla yksittäisten käsitteiden merkitysten syvenemistä ja laajenemista. Tarkastellaan esimerkkiä potenssin laskusäännöistä. Merkintä a^n on alunalkaen tarkoittanut lukua, joka saadaan kertomalla n kappaletta lukuja a keskenään. Tämä sanallinen ilmaisu on mielekäs lähinnä silloin, kun n on ykköstä suurempi luonnollinen luku. Tällöin on varsin helppoa todeta esim. seuraavat laskusäännöt:

$a^m a^n = a^{m+n}$,
$a^m / a^n = a^{m-n}$ (kun $a \ldots \neq 0$ ja $m > n+1$),
$(a^m)^n = a^{mn}$.

Sen sijaan ilmaisut 30 tai 5-2 ovat selvästi ristiriidassa em. potenssin määritelmän kanssa. Ristiriita voidaan ratkaista määrittelemällä ensimmäinen, nollas ja negatiivinen potenssi s.e. potenssin alkuperäisen määritelmän kanssa yhteensopivat laskusäännöt pysyvät voimassa. Tällöin laskukaavojen edustama symbolikieli pysyy näennäisesti muuttumattomana, mutta sen ilmaisuvoima lisääntyy. Itse asiassa merkintä a^p on nykymatematiikassa mielekäs ja yhteensopiva em. laskukaavojen kanssa myös silloin, kun eksponentille sallitaan arvoksi mikä tahansa reaaliluku (ja a>0, ks. myös [3]). Tämä potenssin käsitteen yleistys on edellyttänyt jo varsin radikaalia näkökulman laajentamista em. laskukaavojen näennäisestä yksinkertaisuudesta huolimatta.

Vielä yhden näkökulman matematiikan kielenkaltaisuuteen voi saada tarkastelemalla sosiomatemaattisen normin nimellä tunnettua ilmiötä eli sitä, kuinka yhteisö ja asiayhteys vaikuttavat yksilön tapaan ilmaista matemaattisia ajatuksiaan. Esimerkiksi, jos jonkin asian käsittely perustuu siihen, että funktion $f(x)=x^2+1$ derivaatta on $f'(x)=2x$, voidaan tämä fakta eri yhteyksissä käsitellä hyvin eri tavoin. Jos kyse on lukion pitkän matematiikan polynomifunktioiden kurssista, se on käsiteltävä vetoamalla kuvaajasta saatavaan havaintoon. Derivaattakurssilla tämä väite voidaan jo perustella soveltamalla valmiina annettuja polynomifunktioiden derivoimissääntöjä. Yliopistollisella analyysin peruskurssilla väite saatettaisiin puolestaan todistaa oikeaksi derivaatan määritelmän nojalla, kun taas jatkokurssilla kyseinen argumentin osa todennäköisimmin jo sivuutettaisiin triviaalina detaljina.

Matematiikan kieliaspekti ja yksilön matematiikkakuva

Matematiikkaan ja sen oppimiseen liittyvät käsitykset ja uskomukset vaikuttavat matematiikan oppimistuloksiin [4]. Henkilö, joka arvostaa matematiikkaa lähinnä sen käytännön sovellusten takia, oppii sitä eri tavalla kuin henkilö, jolle matematiikan merkitys on sen sisäisessä loogisessa kauneudessa. Muun muassa tämän takia on mielekästä tutkia, missä määrin matematiikan aineenopettajaksi opiskelevat mieltävät matematiikan kielenkaltaiseksi asiaksi. Monien tutkimusten tulokset viittaavat esim. matemaattisen todistamisen taitojen ja matematiikan kielellisten piirteiden (jatkossa kieliaspektin) tunnistamisen liittyvän toisiinsa [5].

Jos matematiikan kieliaspektiin liittyvät käsitykset pakotetaan yksidimensioiselle asteikolle, tämän toiseksi ääripääksi pitänee asettaa näkemys, jonka mukaan matematiikka on elävään ja kehittyvään kulttuuriin liittyvä kieli samalla tavalla kuin suomi tai saksa, ja sen vastakohdaksi näkemys, jonka mukaan matematiikka on objekti, johon luonnollisilla kielillä vain viitataan, ja joka on olemassa näistä riippumattomasti ja näiden ulkopuolella. Ensin mainitun näkemyksen voidaan katsoa sisältävän myös käsityksen, että matematiikka on olemassa eli esimerkiksi matemaattisella tekstillä tai puheella on merkitystä, vain silloin kun on olemassa yksilöitä, jotka osallistuvat (tai ainakin voisivat osallistua) tekstin tai puheen välittämään kommunikaatiotapahtumaan [6].

Sen määrittäminen, miten yksilö tunnistaa ja millaisen merkityksen hän antaa matematiikan kielellisille piirteille, on haasteellinen tehtävä. Haastattelututkimuksissa voidaan toki selvittää mm. analogioita (esim. Muistuttaako matematiikan opiskelu vieraiden kielten opiskelua?) käyttäen, tunnistaako tutkittava henkilö matematiikan kieliaspektia lainkaan. Kieliaspektin laatu yksilön matematiikkakuvassa [7] paljastuu kuitenkin paremmin tarkastelemalla, millaista kieltä hän käyttää matemaattisissa tuotoksissaan. Tällöin voidaan tutkia vaikkapa sitä, missä määrin tutkittava henkilö kiinnittää huomiota matemaattisen logiikan ja arkikielen välisiin eroihin sanojen 'tai' ja 'ja' sekä 'josniin' -rakenteen käytössä, tai sitä, pyrkiikö yksilö kuvailevaan kielenkäyttöön vai matemaattisten määritelmien ja käsitteiden täsmälliseen käyttöön. Matematiikan kieliluonnetta vähättelevät opiskelijat esim. pyrkivät usein käyttämään analyyttisen geometrian käsitteitä ja menetelmiä euklidisen geometrian kurssilla tai päinvastoin. Myös ”Pii on irrationaaliluku ja sen arvo on 3,14.” -tyyppiset virheet ovat paljastavia.

Matematiikan opetuksen kehittäminen ja kieliaspekti

Ongelmanratkaisu on viimeisen kahdenkymmenen vuoden aikana muodostunut merkittäväksi osaksi valtakunnallisia opetussuunnitelmien perusteita, ja sitä on tarjottu kaikilla tasoilla keinoksi parantaa matematiikan opetuksen laatua. Erityisesti yliopistollisen matematiikan oppimisen edistämisessä ongelmanratkaisun lisääminen saattaa kuitenkin osoittautua toivottua tehottomammaksi keinoksi. Ongelmana nimittäin on se, että ongelmanratkaisussa käytetty mielikuviin ja representaatioihin [8] liittyvä kieli voi olla hyvin toisenlainen kuin kieli, jolla varsinaisen matematiikan tulokset tulisi esittää.

Opiskelijoiden vakavimmat vaikeudet matematiikan oppimisessa näyttävät itse asiassa liittyvän enemmän representaatioiden tasolla tapahtuvan ajattelun kääntämiseen matematiikan kielelle ja päinvastoin kuin varsinaisen ongelman ratkaisemiseen. Analyysin opintojensa kanssa kamppailevien opiskelijoiden silloin tällöin esittämät väitteet kuten

$$x/2+x/3=2x/5$$

eivät ole osoitus esim. siitä, opiskelijat kuvittelisivat ’kakun puolikkaan ja kolmanneksen olevan yhteensä kaksi viidesosaa eli alle puolet kakusta’, vaan pikemminkin siitä, ettei yhtäsuuruusmerkin oikealla puolella oleva lauseke edusta heille mitään käsitettävää ilmaisua, ja siksi he arvaavat omalla tavallaan johdonmukaisesti yhteenlaskun lopputulokseksi osoittajina olevien x:ien summan ja nimittäjien 2 ja 3 summan osamäärää. Tällaisten opiskelijoiden polynomialgebran taidot eivät kohene polynomilausekkeisiin liittyviä mielikuvia muokkaamalla vaan löytämällä oikea tapa yhdistää heidän representaatioiden tasolla tapahtuva, yleensä oikeita johtopäätöksiä tuottava, ajattelunsa matematiikan kielellä tapahtuvaan ilmaisuun.

Formaalin matematiikan ja representaatioiden tasojen välisen kielenkääntämisen ongelma ilmenee jopa siten, että opiskelijat joutuessaan ratkaisemaan tehtävää, jonka antamisen yhteydessä on annettu myös vihjeitä ratkaisun löytämiseksi, käyttävät ratkaisuansa konstruoidessaan vihjeitä varsin harvoin. Tämä johtunee siitä, että vihjeet on yleensä annettu varsinaisen matematiikan kielellä, joten kääntämisongelmasta kärsivät opiskelijat kokevat vihjeet pikemminkin tehtävää vaikeuttavaksi ylimääräiseksi taakaksi kuin tehtävän muotoilijan tarkoittamalla tavalla!

On osoittautunut, että matematiikan oikeakielisyyttä tai edes sosiomatemaattisen normin alkeita ei opita sen enempää koulussa kuin yliopistossakaan pelkän matemaattisen substanssin läpikäynnin ohessa. Esimerkiksi sekä koululaisilla että aineenopettajaksi opiskelevilla on vakavia puutteita jopa lukukäsitteen hallinnassa, minkä voidaan katsoa johtuvan kieliaspektin negatiivisesta korostumisesta opiskelijoiden matematiikkakuvassa siten, ettei kyetä hahmottamaan, mitä matemaattisia käsitteitä on sisäistettävä samalla tavalla kuin perussanasto minkä tahansa kielen opiskelussa. Toiseksi, myös matematiikan opinnoissaan pidemmälle edenneillä opiskelijoilla on yleisesti vaikeuksia hahmottaa sitä, millainen matemaattisten faktojen yhteenkokoaminen konstruoi matemaattisen todistuksen [9].

Jo monituhatvuotinen historia todistanee, ettei matematiikan opetuksen ongelmia voida ratkaista pelkästään opetusmenetelmällisillä uudistuksilla. Jos olisi olemassa algoritmina kuvattavissa oleva paras tapa opettaa matematiikkaa tai esittää matemaattiset faktat oppimisen kannalta optimaalisessa järjestyksessä, se olisi mitä todennäköisimmin ennätetty jo keksiä. Toisaalta, edellä sanotun perusteella näyttää siltä, että matematiikan oppimisen ongelmat ovat usein enemmän kielellisiä kuin varsinaisesti matemaattisia. Tästä näkökulmasta katsottuna matematiikan opetuksen kehittäminen näyttää mahdolliselta.

Nimittäin, jo ihmisten kokemukset ja muistikuvat koulumatematiikasta viittavat siihen, ettei keskustelevan ja oppijan oman matemaattisen kielitaidon kehittymistä tukevan opetustyylin mahdollisuuksia ole läheskään aina osattu hyödyntää matematiikan opetuksessa. Jos kielten opettajat olisivat lukiotasolla yhtä suurpiirteisiä oikeakielisyyden suhteen kuin matematiikan opettajat keskimäärin ovat, ei kukaan hämmästelisi opiskelijoiden kehnoa kielitaitoa.

Onneksi opiskelijoiden matematiikkaan ja sen oppimiseen liittyviin asenteisiin ja toimintatapoihin voidaan vielä vaikuttaa yliopistossa [10]. Matematiikan kieliaspektin korostaminen erityisesti opettajankoulutuksessa voi todella johtaa matematiikan opetuksen laadun yleiseen parantumiseen. Toisaalta kieliaspektin korostaminen pakottaa opetuksen järjestäjät tarkastelemaan opintokokonaisuuksien sisältöjä uudella tavalla. Kieliaspektiin ei välttämättä voida kiinnittää halutulla tavalla huomiota kursseilla, joilla opiskelijoiden on keskityttävä erityisesti laskutekniikkaansa parantamiseen. Olisikin tarpeellista pohtia laajasti ja monelta kannalta mm. sitä, missä määrin analyysiä, jonka alkeidenkin läpikäyminen edellyttää lukiomatematiikan ylittävien laskumenetelmien omaksumista, on tarpeen sisällyttää pelkästään peruskoulussa toimivien aineenopettajien matematiikan opintoihin.

Matematiikan kieliaspektiin kannattanee kiinnittää huomiota matematiikan opetuksen kaikilla tasoilla mutta erityisesti yliopistoissa: korkeamman matematiikan oppiminen on pikemminkin laajan ja monikerroksisen käsitteellisen informaation tietoista uudelleenjäsentämistä ja täydentämistä kuin yksittäisten käsitteiden tai laskukaavojen omaksumista. Se on siis oleellisesti yksilön jo omaksuman konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon kielellistä työstämistä.

VIITTEET

[1] Ks. esim. Vala, Klaus (1979): Hakusana matematiikka, *Otavan Suuri Ensyklopedia*. Keuruu: Otava, ss. 4165-4167.

[2] Vrt. esim. matemaattinen logiikka tai aksiomaattinen joukko-oppi.

[3] Luku 0^p on reaalianalyysissä hyvinmääritellysti nolla, jos $p>0$. Jos $a<0$, on kantaluvun a korottaminen minkä tahansa reaaliluvun p määräämään potenssiin mielekästä kompleksilukujen teoriassa. Lisäksi kompleksilukujen avulla potenssin käsitettä voidaan laajentaa tästä edelleen.

[4] Tätä aihetta on tutkittu Suomessa varsin runsaasti mm. Erkki Pehkosen johtamissa tutkimusryhmissä.

[5] Esim. tutkimuksessa *Tossavainen & Luostarinen* (2004) osoittautui, että peruskoulun matematiikanopettajaksi valmistuvien opiskelijoiden todistamistaitojen hyvyys korreloi sen kanssa, missä määrin heidän käsityksensä matematiikasta sisälsivät kieleen liittyviä piirteitä.

[6] Huomattakoon vielä, että matematiikan kieliaspektin positiivinen ilmentymä on hyvin yhteensopiva erityisesti vygotskyläisen sosiokonstruktivistisen oppimiskäsityksen kanssa muttei ole ristiriidassa myöskään kognitiivisen tai situationaalisen konstruktivismin kanssa, esim. *Enkenberg*, Jorma (2004).

[7] Matematiikkakuva on matematiikan didaktiikan alaan kuuluva käsite, joka kattaa mm. yksilön käsityksen itsestä matematiikan oppijana ja käsityksen matematiikasta sekä sen oppimisesta ja opettamisesta. Yksilön menestymistä matematiikan opiskelussa pyritään selittämään mm. tutkimalla hänen matematiikkakuvaansa.

[8] Representaatiot tarkoittavat tässä yhteydessä ajatusrakennelmia, jotka edustavat jollakin tietoisuuden tasolla niitä matemaattisia käsitteitä, joita varsinaisen matemaattisen ongelman ratkaisu edellyttää.

[9] Artikkelissa *Weber* (2003) esitetään hyvä yhteenveto matemaattiseen todistamiseen liittyvistä oppimisongelmista.

[10] Esim. *Pietilä*, Anu (2002): *Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkakuva: matematiikkakokemukset matematiikkakuvan muodostajina*. Tutkimuksia 238. Helsinki: Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos.

KIRJALLISUUTTA

Enkenberg, Jorma (2004): ”Yliopistopedagogiikka haasteena ja kehittämisen kohteena”. Teoksessa Jorma Enkenberg, Erkki Savolainen & Pertti Väisänen (toim.), *Tutkiva opettajankoulutus – taitava opettaja* (ss. 7-21). Savonlinna: Joensuun yliopisto.

Pehkonen, Erkki (1995): *Pupils' View of Mathematics – Initial report for an international comparison project*. Tutkimuksia 152. Helsinki: Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos.

Tossavainen, Timo & Luostarinen, Katja (2004): ”Peruskoulun matematiikanopettajaksi opiskelevien todistamistaidot ja matematiikkakuva” . Teoksessa Kaarina Merenluoto & Mirjamaija Mikkilä-Erdmann (toim.), *Learning research challenges the domain specific approaches in teaching – A symposium for research on teaching and learning Turku 14.5.2004*. Turku: Turun yliopisto. (ss. 88-99)

Weber, Keith (2002): ”Student difficulty in constructing proofs: the need for strategic knowledge”. *Educational Studies in Mathematics* 48 (1), 101-119.

Weber, Keith (2003): ”Students' difficulties with proof”. MAA Online: Research Sampler, http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_8.html,

Kirjoittaja on matematiikan lehtori ja dosentti. Kirjoitus perustuu Oulussa 25.11.2004 Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivillä pidettyyn esitelmään.