

# Opastettu kierros matematiikan näkymättömään katedraaliin

Aatos Lahtinen

**Hannu Karttunen:** *Tiedettä kaikille. Matematiikka. Tähtitieteellinen yhdistys Ursa ry, 2006, 151 s.*

Väärin ymmärretty nero on usein toistuva käsite. Harvemmin on kuultu väärin ymmärretystä tieteestä. Silti matematiikka voisi hyvin uskoutua ystävilleen sanoen, etteivät ihmiset ymmärrä mikä minä todella olen. Aika moni ystävä taisi vastata, että emme mekään tahdo sitä ymmärtää.

Tämä tuntuu hämmästyttävältä. Matematiikkaa opetetaan koulussa ensimmäisestä luokasta alkaen. Pitäisihän jokaisen tietää, mitä matematiikka on. Näin ei kuitenkaan ole. Kysyttäessä jokamies vastaa matematiikan olevan laskentoa, jota hoystetään erilaisilla kaavoilla yhtälön ratkaisemisesta, kappaleiden tilavuuksista, derivaoinnista ja muusta sellaisesta, mitä hän ei ole koulun jälkeen tarvinnut. Minullekin on ihmetelty, mitä matemaatikko oikein tekee, kun kaikki oleellinen on jo koulussa käsitelty.

Mitä matematiikka sitten on muuta kuin koululaskento kaavoineen? Matematiikka on itse asiassa valtava katedraali, ikivanha, alati kasvava kaunis rakennus holveineen, torneineen, sivulaivoineen ja salakäytävineen, jotka yhdistävät käsittämättömällä tavalla matematiikkaa muihin tieteisiin ja teknologiaan. Rakennuksen koolla ei ole ylärajaa, ei myöskään rakennuskustannuksilla, rakennuslupaa ei tarvitse anoa, ei huolehtia rakennustarvikkeista. Tämä mittava rakennustyö kestää paljon kauemmin kuin lisäkin kirkon pystyttäminen. Matematiikan katedraalia onkin kohotettu taivasta kohti jo kolmisentuhatta vuotta ja olemme ilmeisesti vasta työn alussa. Koulussa opetetaan vain katedraalin rakennuskivien lounhintaa.

Katedraalin rakentajat, matemaatikot, ovat luovan työn tekijöitä, joilla on unelma. Unelman sa he haluavat toteuttaa lisäämällä katedraaliin oman luomuksensa. Rakentaminen perustuu tarkkoihin lujuuslaskelmiin. Kivien on liityttävä toisiinsa niin lujasti, että uusia holveja voidaan

käyttää seuraavan, sitä seuraavan ja taas sitä seuraavan kerroksen pohjana. Unelmat eivät aina toteudu, työ jää torsioksi tai jopa sortuu. Mutta näin tapahtuu kaikessa luovassa työssä.

### *Miten kuvata näkymätöntä?*

Jos matematiikka on niin mahtava rakennus, että Kufun pyramidi ei kelpaa edes nurkkakiveksi, niin miksi ihmiset eivät sitten huomaa sen suuruutta ja kauneutta? Miksi he kuvittelevat, että matematiikka on vain kivilouhos? Syynä on, että tämä valtava luomus on täysin abstrakti, aineeton ja näkymätön. Siitä ei voi ottaa valokuvia, se ei näy tutkassa, ei läpivalaisuissa. Niinpä kaikki mitä ihmiset ovat rakennuksesta havainneet, on se kivenlouhintaoppi, mitä he ovat koulussa saaneet.

Miten sitten välittää tätä näkymätöntä suuruutta ja kauneutta muille? Eräs mahdollisuus on nostaa esille matematiikan käsittämätön, lähes mystinen hyödyllisyys ihmisen toiminnoissa. Nyt en puhu kauppalaskuista, enkä liikennelaskennasta, vaan luonnonlaeista, koneista, laitteista, tietokoneohjelmista, sään ennustamisesta ja muusta sellaisesta. Matematiikan katedraalia voisi vähätellen sanoa monitoimitaloksi tai teollisuuskyläksi. Matematiikka on paitsi tieteen kieli, myös nykyisen teknillisen yhteiskunnan luoja, pystyssä pitäjä ja kehittäjä. Havainnollistajan ongelma onkin tuleen taas, että valmiissa koneissa ja laitteissa ei matematiikka näy. Sitä ei voi osoittaa sormella, on tyydyttävä selittämiseen ja vertauskuvien esittämiseen.

Toinen mahdollisuus on yrittää kuvailla itse katedraalia. Ongelmana on edelleen miten kuvata näkymätöntä. Yleiskuvaa voi antaa erilaisilla vertauksilla konkreettisiin asioihin, mutta vertaukset ovat vain vertauksia. Todemman kuvan saamiseksi on lähdeävä kuvaamaan itse rakennusta tai ainakin sen rakennuspiirustuksia ja dokumentteja. Vaikeutena on nyt, että niitä ei ole kirjoitettu suomeksi vaan matematiikaksi ja matematiikan suomentaminen on paljon vaikeampi työ kuin vaikkapa japaniksi kirjoitetun tankan suomentaminen.

Onneksi silloin tällöin löytyy uskalikkoja, jotka yrittävät välittää muille kuvaa matematiikan tosiolemuksesta. On merkillepantavaa, että he eivät läheskään aina ole matematiikan katedraalin rakentajia, vaan muiden tieteiden ammattilaisia, jotka ovat vuokranneet työskentelytilaa rakennuksesta. Toisaalta muun alan ammattilainen osaa ehkä meitä matemaatikkoja paremmin kuvata matematiikan rakenteita yleistajuisesti.

### *Matematiikka on luovaa ajattelua*

Hyvän tieteellisen yleissivistyksen ja luistavan kynän omaava tähtitieteen dosentti Hannu Karttunen on tällainen uskalikko. Hän on Tähtitieteellinen yhdistys Ursan sarjassa *Tiedettä kaikille* julkaissut aiemmin yleisesitykset tähtitieteestä ja fysiikasta. Nyt Karttunen on uskaltanut kuvaamaan matematiikan tosiolemusta. Pienellä kielialueella tässä on selvästi ajateltu enemmän sivistystä kuin taloudellista hyötyä. Kysymys on kulttuuriteosta, jolle on täysi syy toivottaa menestystä. Sivumennen sanottuna kustantajan nimi URSA tarkoittaa latinassa naaraskarhua ja naiset ovat aina olleet miehiä kiinnostuneempia kulttuurista.

Heti kirjansa esipuheessa Karttunen pelkistää onnistuneesti matematiikan olemuksen: matematiikka on lähinnä luovaa ajattelua. Kirjan tavoitteeksi hän asettaa, että koulumatematiikan läpikäynyt lukija saa edes jonkinlaisen mielikuvan mitä todellinen matematiikka voi olla. Yleistajuisessa esityksessä tämä on ainoa järkevä lähtötason valinta. Valitettavasti se samalla rajaa, miten korkealle matematiikan katedraalissa voi kiivetä.

Tavoitteensa toteuttamiseksi Karttusella on käytettävänä 150 suurikokoista sivua, joissa leipäteksti soljuu kahdella palstalla miellyttävän kokoisena. Tämäkin on hyvin pieni tila siihen nähden, että aivan tavallisen yliopiston matematiikan laitoksen kirjastossa on toistatuhatta hyllymetriä matemaattista kirjallisuutta, joka lisäksi karttuu parikymmentä metriä vuodessa. Niinpä ei ole ihme, että kirjaan on mahtunut vain pieni valikoima sellaisia katedraalin osia, joihin voidaan järjestää opastettuja kierroksia koulumatematiikan pohjalta. Vika ei ole tekijän, vaan matematiikan laajuuden ja syvällisyyden.

Sanottakoon heti, että Karttunen on onnistunut tehtävässään kiittävästi. Työ ei kuitenkaan ole täydellinen ja monet valinnat perustuvat tietysti tekijän henkilökohtaisiin mieltymyksiin. Tämä tarjoaa arvostelijalle tilaisuuden tuherata joihinkin kohtiin Aatoksen puumerkkinsä.

Kirja on jaettu 14 erikokoiseen lukuun alkaen matemaattisesta päättelystä ja edeten sitten lukujen matematiikan, matematiikan salakielien, joukkojen matematiikan, äärettömyyden, muotojen matematiikan, algebran, muutoksen matematiikan, toden ja epätoden matematiikan ja sattuman matematiikan kautta matematiikan apuvälineisiin ja inversio-ongelmien kautta ajanvietematematiikkaan sekä lopuksi matematiikan perusteiden koulukuntiin. Esitys kattaa

riittävän hyvin tällä tasolla käsiteltävissä olevat matematiikan alat. Alojen valinnasta, keskinäisistä painotuksista samoin kuin niiden sijoittelusta eri otsikkojen alle on tietysti jokaisella oma käsityksensä. Esimerkiksi oma luku inversio-ongelmille on selvästi tähtitieteilijän valinta. Analyysia olisi mielestäni voinut valitun lähtötason pohjaltakin esitellä hieman enemmän sen tärkeyden vuoksi.

Kirjan lopussa on ehdotuksia lisälukemiseksi, laaja hakemisto sekä tavallisimpien matemaattisten symbolien luettelo.

### *”Matematiikan hassut merkit”?*

Karttunen on yrittänyt havainnollistaa matematiikan katedraalin kokoa käsiteltävien asioiden suurella määrällä. Hakemistossa on noin 500 käsitettä ja nimeä. Niinpä esitellyiksi tulevat kaikki tavalliset popularisointikohteet Hilbertin koskaan täyttymättömästä hotellista fraktaaleihin sekä positiiviseksi lisäksi myös vähemmän tavallista matematiikkaa. Jopa Lebesguen mitta mainitaan. Valitun linjan varjopuolena on, että sinänsä oleelliseen hyvin keskittyvät esitykset jäävät suppeiksi, mistä asioiden ymmärtäminen väistämättä kärsii.

Kirjassa on pyritty keveyteen ja helppolukuisuuteen. Varsinaista tekstiä elävöittävät anekdotit, kaskut ja runsas kuvitus, täydentävät tietoisuutta ja kuuluisien matemaatikoiden mikroelämäkerrat. Niinpä perustekstin osuudeksi jää monessa luvussa alle puolet kokonaispinta-alasta. Ajallista syvyyttä esitykseen tulee tekstiin upotetuilla historiakatsauksilla, jotka mukavasti korostavat matematiikkaa alati kehittyvänä tieteenä.

Karttunen kirjoittaa sujuvasti, mutta en ole vakuuttunut siitä, että hänen tyylikeinokseen valitsema puhekielisyys todella edistää helppolukuisuutta. Minusta se tuntui lähinnä vieroittavalta. Lisäksi ainakin matemaatikko kyllästyy helposti runsaaseen adjektiivien käyttöön tyyliin ”matematiikan hassut merkit”, ”järjettömät irrationaaliluvut”, ”omituinen integraalimerkki” jne.”.

Onnistunut kuvitus piristää kirjan yleisilmettä, tuo lisätietoa ja edistää asioiden ymmärtämistä, joskus jopa kädestä pitäen. Kun tekijä kuvaa matematiikan merkintöjä risukasaksi, niin tekstin yläpuolella on hänen ottamansa valokuva risukasasta. Jarno Kantelisen piirtämät uhkapeurit, kilpikonaa ajava sankari (Zenonille Akhilleus eikä Akilleus), kinastelevat filosofit ja ennen

kaikkea elämäniloiset lehmät keventävät mukavasti matematiikan raskautta. Tosin onhan lehmälläkin painoa, jopa 900 kg. Karttunen onkin aikamoinen voimamies, kun hän mahtavuutta havainnollistaessaan noin vain heittää viiden lehmän joukosta yhden pois.

### *Suomalaiset olisi voinut noteerata*

Kun käytettävissä oleva tila on aihemäärään nähden kovin rajallinen, tuntuu tuhlaukselta, että taittaja on joidenkin lukujen väliin jättänyt tyhjän sivun vain voidakseen aloittaa seuraavan luvun taas aukeaman vasemmalta puolelta. Näihin kuuteen tyhjään sivuun olisi saanut mahtumaan liki 300 palstasenttimetriä lisäselitystä tai jopa uutta asiaa. Suomenkielisessä kirjassa olisi voinut edes hivenen valottaa suomalaisten panosta matematiikkaan. Tarjolla olisi ollut ainakin Rolf Nevanlinna ja hänen arvojenjakautumisteoriaansa, Olli Lehto ja suomalainen kvasikonformikuvausten koulukunta, Sören Illmanin osuus Hilbertin 5. ongelman ratkaisuun jne.

Teoksessa on kaikkiaan 18 huippumatematiikan mikroelämäkerrat. Jos markiisi Laplacen nimen eteen sijoitetaan aateluuksi osoittava de, sama pitäisi tehdä vieressä olevalle kreivi Lagrangelle. Samoin otsikko ”Newton, Sir Isaac” voisi saada tietämättömän kuvittelemaan, että Sir on etunimi. Demokraattinen ratkaisu olisi jättää tavalliseen tapaan pois sekä ”de” että ”Sir” samoin kuin paroni Leibnitzin nimen edessä oleva ”von”. He kaikki ovat matemaattisesti niin aateloituneita, ettei vähäisempiä maallisia tunnuksia tarvita.

Tässäkin teoksessa on painovirheitä, ehkä testaamassa sitä lukevan matemaatikon tarkkaavaisuutta. Pahimmat lienevät Fermat’n pienen lauseen virheellinen muoto (s. 20), sekä käännepisteen määrittäminen ensimmäisen derivaatan nollakohdaksi (s. 89). Lisäksi valitusta linjasta johtuva tekstin suppeus johtaa joskus omituisuuksiin. Esimerkiksi sivulla 51 todetaan, että jo äärellinen määrä Fourier-sarjan termejä kuvaa funktiota halutulla tarkkuudella. Tähän kyllä Fourier uskoi 1800-luvulla, mutta kuten Karttunen hyvin tietää, se edellyttää sarjan suppenemista, mikä ei aina tapahdu edes jatkuvalla funktiolle. Vastaavasti sivulla 91 sanotaan optimistisesti, että integraalifunktion arvon voi laskea sille johdetusta sarjakehitelmästä pelkillä alkeislaskutoimituksilla. Tempu edellyttäisi tietysti, että äärettömän sarjan summa voidaan esittää suljetussa muodossa, mikä on lottovoittoon verrattava onnenpotku.

Tekstin sekaan on lukijan virkistämiseksi siroteltu tehtäviä. Olisi luullut, että tähtitieteilijä olisi maininnut pakkausongelmaa kutsuttavan Keplerin ongelmaksi. Ajanvietematematiikassa oleva tehtäväsivu on jostain syystä täytetty vain osittain. Vastaavia tehtäviä olisi helposti löytynyt sivun täydeltä halukkaiden iloksi. Tehtävien vastaukset on ystävällisesti annettu kirjan lopussa.

Yksi sivu on varattu viitteille lisälukemisesta. Tällekin sivulle on jäänyt runsaasti vapaata tilaa, joten listaa olisi voinut vielä jatkaa vaikkapa teoksilla: Ivar Ekeland: *Ennakoimattoman matematiikka*, James Gleick: *Kaaos*, Michael Guillen: *Silta äärettömyyteen*, G. H. Hardy: *Matematiikan apologia*, Osmo Pekonen (toim.): *Symbolien metsässä* ja David Ruelle: *Sattuma ja kaaos*.

## *Onnistunut opaskirja matematiikan katedraaliin*

Hannu Karttusen kirja tarjoaa onnistuneen opastetun kierroksen matematiikan näkymättömään katedraaliin. Sitä voi lämpimästi suositella niille, jotka haluavat tietää, mitä muuta matematiikka on kuin laskemista. Erityisen suositeltava kirja on niille, jotka eivät halua tietää mitään matematiikasta. Karttunen voisi aukaista heidän silmänsä näkemään edes välähdyksiä matematiikan äärettömästä moninaisuudesta, rikkaudesta ja kauneudesta.

*Kirjoittaja on matematiikan professori Helsingin yliopistossa sekä mm. ylioppilastutkintolautakunnan puheenjohtaja.*