

# Saarnio ja kontinuumihypoteesi

Jari Palomäki

**Helsingin ja Jyväskylän yliopistojen matemaatiikan dosentti Osmo Pekonen vastasi minulle *Tieteessä tapahtuu* -lehdessä 1/2004 hänen kirjaansa *Marian maa – Lasse Heikkilän elämä 1925–1961* (SKS 2002) kirjoittamaani kritiikkiin, joka ilmestyi *Tieteessä tapahtuu* -lehdessä 8/2003. Pekosen vastauksen johdosta – ja niin ikään väärinkäsitysten välttämiseksi – muutama kommentti lienee vielä paikallaan.**

Kritiikkinä (*Palomäki* 2003) kohdistui tapaan, jolla Pekonen käsitteli Uno Saarniota tieteentekijänä ja henkilönä; ei siis siihen, että Saarnion elämää ja ajattelua olisi esitelty liian pintapuolisesti tai että *Tieteessä tapahtuu* -lehdessä 6/2002 ilmestyneen artikkelini ”kaiken mahdollisen” Saarnio-tietouden olisi tullut sijaita Pekosen kirjassa. Saarnion saama osuus hänen kirjassaan ei kuitenkaan ole niin vähäinen kuin Pekonen antaa ymmärtää (*Pekonen* 2004, 44). Kirjan noin 750 nimeä sisältävästä henkilöhakemistosta voi todeta, että ”1950-luvun kulttuurivaikuttajista” vain ehkä T. S. Eliot, Ritva Heikkilä, Irja Halonen, Kirsi Kunnas, Kai Laitinen, Lassi Nummi ja Pyhä Augustinus ”vilahtavat” kirjan sivuhenkilöinä Uno Saarniota useammin.

Kritiikissäni katson, että Pekosen kirjassa *Marian maa – Lasse Heikkilän elämä 1925–1961* Uno Saarniota koskeva osuus ei ole kirjoitettu hyvän tieteellisen tavan mukaisesti. Sitä ei ole kirjoitettu rehellisin tarkoituksin ja tosiasioihin nojautuen. Myöskään Saarnion tieteellisiin tutkimuksiin ei ole osoitettu asianmukaista kunnioitusta, saati että hänen tieteellisille saavutuksilleen olisi annettu niille kuuluvaa arvoa.

## Joukko uusia väitteitä

Pekosen vastauksesta (2004) ilmenee selvästi hänen suhtautumisensa Uno Saarnioon ja toisaalta tutkijaan, joka perehtyy hänen filosofiaansa. Varmuuden vakuudeksi hän esittää vielä joukon uusia väitteitä, joihin koetan seuraavassa lyhyesti vastata.

Ensiksi, Saarnion päätyönä pidettävä teos *System und Darstellung der Transfiniten Ordnungszahlen* (1958) ei ole omakustanne, kuten Pekonen kirjoittaa (2004, 45), vaan sen on kustantanut 27.3.1952 perustettu Logiikan ja sen sovellutuk-

sien tutkimusseura ry, joka puolestaan liittyi osaksi Kansainvälisen logiikan ja tieteiden filosofian seuraa. Tämän seuran puheenjohtajana toimi professori Ferdinand Gonseth, jonka ehdotuksesta kyseinen seura perustettiin. Myös Saarnion teokset (1953) ja (1964) olivat kyseisen seuran julkaisemia. Logiikan ja sen sovellutuksen tutkimusseura ry toimi aktiivisesti aina 1980-luvun puoliväliin asti.

Toiseksi, jos Saarnion teosta (1958) ei olekaan arvioitu kansainvälisesti, niin kyseiseen teokseen perustuvat Saarnion artikkelit (1962), (1968a) ja (1968b) ovat ilmestyneet *Mathematische Annalen* -aikakauslehdessä, Saarnion artikkeli (1967) *Mathematische Zeitschrift* -aikakauslehdessä ja Saarnion artikkeli (1968c) *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* -aikakauslehdessä, jotka kaikki ovat referoituja arvostettuja matemaattisia julkaisuja. Näistä julkaisuista ainoastaan yhdessä Saarnio esittää ratkaisunsa kontinuumihypoteesille, (so. *Saarnio* 1968b).

Kolmanneksi, jos Saarnion artikkelien saamat referee-arviot ovatkin ”olleet joko kielteisiä, skeptisiä tai yhdentekeviä muutaman rivin kommentteja”, ne on silti katsottu referoinnin arvoisiksi. Sen sijaan Saarnion kontinuumihypoteesin todistuksessa mahdollisesti olevasta virheestä tai siihen sisältyvästä aukosta kyseiset refereeet eivät ole olleet lainkaan yksimielisiä (”käsittämättömyys” ja ”epäselvyys” ovat etupäässä psykologiaan viittaavia ilmauksia). Koska kontinuumihypoteesin totuus – ja jopa sen mielekkyys – on yhä avoin kysymys, eikä matematiikan todistuksen pätevyyttä ratkaista äänestämällä, olisi parasta tyytyä varovaisuuteen lausuttaessa lopullisia ja ehdottomia arvioita Saarnion kontinuumihypoteesin todistuksen matemaattisesta arvosta.

## Virheellistä matematiikkaa

Kirjassaan *Marian maa* Pekonen kirjoittaa Saarnion kontinuumihypoteesia koskevasta artikkelista (*Saarnio* 1968b) seuraavasti: ”Saarnion esittämä todistus on kuitenkin virheellinen ja hänen jälkimaineensa matemaattikkona sama kuin muidenkin virvatulta ajaneiden.” Mikäli ”virva-

tulen ajamisella” tarkoitetaan yritystä todistaa kontinuumihypoteesi, niin on hyvä muistaa, että mm. Georg Cantor, Julius König, David Hilbert ja Kurt Gödel ovat myös yrittäneet todistaa sitä. Tällä hetkellä kontinuumihypoteesin todistamista yrittää erityisesti W. Hugh Woodin, jonka maine on jo lähellä Saharon Shelahia.

Useat tulokset viittaisivat siihen, että kontinuumihypoteesi olisi epätosi, ja tarkemmin, että kontinuumin kardinaaliluku olisi  $\aleph_2$ . Näin ollen on todennäköistä, että Saarnion(kin) todistuksessa on virhe, mutta mahdollinen virhe ei kuitenkaan ole riittävä peruste tulla kutsutuksi charlataaniksi (so., petkuttaja, huijari, silmäkääntäjä, puoskari) kuten Pekonen väittää (Pekonen 2004, 45).

Jopa virheellinen todistus voi olla matemaatiikan kehityksen kannalta hedelmällinen. Esimerkiksi David Hilbertin (1925) ehdottama kontinuumihypoteesin todistus oli virheellinen. Arvioidessaan Gödelin kontinuumihypoteesin ristiriidattomuustodistusta Paul Bernays (1940) kuitenkin kiinnitti huomion Hilbertin ja Gödelin menetelmien samanlaisuuteen. Myöhemmin kirjeessään van Heijenoortille 8.7.1965 Gödel vahvisti analogian, tosin etäiseksi (van Heijenoort 1967, 368, 369; ks. myös Solovay 1995, 120-127 ja Wang 1996, 249-251). Gödel poikkesi Hilbertistä ensinnäkin siinä, että Hilbert käytti vain rekursiivisesti määriteltyjä funktioita tai joukkoja, kun taas Gödel käytti myös ei-konstruktivisia määritelmiä. Gödel otti lisäksi järjestysluvat annettuina, kun taas Hilbert yritti konstruoida ne (van Heijenoort 1967, 369; Wang 1996, 250). Van Heijenoort toteaa Hilbertin artikkelin kuitenkin antaneen syyänsä lukuteoreettisten funktiohierarkioiden ja erilaisten funktioiden rekursiivisten määritelmien tutkimuksille (van Heijenoort 1967, 369).

Hilbertin tavoin Saarniokin pyrki konstruimaan riittävän suuria järjestyslukuja. Tässä hän käytti apunaan kehittämäänsä ns. järjestyslukujen korkeampia laskutapoja. Toisaalta Gödelin tavoin Saarnio käytti myös vahvoja ei-konstruktivisia oletuksia ja määritelmiä, joiden eksplikoiminen vaatii vielä tutkimista. Joka tapauksessa Saarnio oletti valinta-aksioman, minkä vuoksi hänen voidaan myös olettaa, että kontinuumi voidaan hyvinjärjestää. Tällöin kontinuumilla olisi järjestysluku, joka puolestaan ilmaisisi sen kardinaaliluvun. Ainakin Saarnion artikkeli (1967) on antanut syyänsä Fred Krögerin vuonna 1971 ilmestyneelle väitöskirjalle *Über die Konstruktion höherer arithmetischer Ordinalzahloperationen nach Saarnio*.

Kröger oli Kurt Schütten oppilas ja hän toimii nykyään tietojenkäsittelytieteen professorina Münchenin yliopistossa.

### *Mitä Cohen todella sanoi?*

Kirjassaan *Marian maa* (s. 201) Pekonen kirjoittaa: ”Luultavimmin Heikkilä oli kuitenkin niin Saarnion visioiden lumoissa, ettei hän aavistanut kontinuumihypoteesin todistamisen matemaattista mahdottomuutta. Vuonna 1963 lopullisen selvyuden tullessa asiaan Heikkilä oli jo kuollut.” Näin Pekonen antaa ymmärtää, että Paul J. Cohenin tulokset olisivat lopullisesti ratkaisseet kontinuumihypoteesin. Tähän viittäisi myös Pekosen lause: ”Artikkeleissaan Saarnio väittää kokonaan tai osittain todistaneensa ns. kontinuumihypoteesin eli ratkaisseensa aikansa tieteen yhden huippuongelman” (s. 45, kursivointi J.P.).

Cohenin tulokset osoittivat, että mikäli joukko-opin Zermelo–Fraenkel-aksiomat (ZF) ovat ristiriidattomia, niin on olemassa ZF-malleja, joissa a) valinta-aksioma ja kontinuumihypoteesi pätevät, mutta konstruktivisuusaksioma, johon Gödelin vuoden 1938 tulos perustui, ei päde, b) valinta-aksioma pätee, muttei kontinuumihypoteesi, ja c) valinta-aksioma ei päde, jolloin ei siis kontinuumihypoteesikaan päde (ks. Cohen 1966).

Näin Cohenin *metamatematisista* tuloksista seuraisi, että kontinuumin kardinaaliluku voi olla (lähes) mikä tahansa. Tälle formalistiselle näkemykselle on matemaatikkojen piirissä kannatuksensa ja tätä oletin Pekosenkin kannattavan. Lienen kuitenkin erehtynyt, sillä Pekonen (2004, 45) kirjoittaakin, että “[p]latonismihan ei ole tieteellinen teoria, vaan runollinen metafora”, joista ensin mainittu virke on totta ja jälkimmäinen epätotta. Itse asiassa platonismi on ontologinen sitoumus, joka matemaatiikan yhteydessä tarkoittaa lähinnä sitä, että matemaattisilla olioilla on itsenäinen olemassaolonsa. Tällöin matemaattiset lauseet ovat joko tosia tai epätosia matemaattisista todistuksista ja matemaatikoistakin riippumatta, eli kuten Pekonen itsekin pyrki asian ilmaisemaan: “[v]äärää matemaattikkaa oikeaksi ei platonisminkaan avulla voida muuttaa” (*ibid.*). Tämä platonismia koskeva kömmähdys viitanneekin siihen, ettei Pekonen juuri tunne kontinuumihypoteesin totuutta ja sen todistamiseen liittyvää matemaattista saati filosofista problematiikkaa. Se selittäisi myös, miksi hän kokee väitteeni ”oudoiksi”.

Pekosen olisi suonut pidättäytyvän Uuno Saarnion vuoden 1972 henkilökohtaiseen surutyöhön liittyvien spritisti-istuntojen lähemmästä ”rationaalista” kuvailusta myös kirjassaan *Marian maa* (s. 201), koska Uuno Saarnion ainoa elossa oleva omainen Reino Saarnio huomautti hänelle tästä kirjeessään 5.9.2000. Tästä huolimatta hän ei malttanut jättää tätä asiaa kuvailematta; vieläpä kai edes asiaa vuonna 1961 kuolleen Lasse Heikkilän ”silmälasien läpi” katsoessaankaan.

Saarnion tieteellisistä töistä en ole löytänyt mitään spiritismiin viittaavaa. Vuoden 2003 tietokirjallisuuden laatukirjalistaan kuuluvassa Pekosen ko. kirjassa sanotaan, että kyseessä ei ole elämäkerrallinen romaani, vaan siinä on pitäydyytty dokumentteihin (*ibid.*, 13). Hänen mukaansa kirja on kirjoitettu subjektiivisesti ihailmansa ranskalaisen kirjallisuussestiikan perinteiden mukaisesti (*ibid.*, 20). Ranskalainen fysiologi Claude Bernard on sen sijaan todennut: ”Taide on *minä*; tiede on *me*”, jolla hän on tahtonut ilmaista tieteen objektiivisuutta ja epäpersoonallisuutta taiteen vastakohtana.

Pekonen on huolissaan ”pienille tiedemaille tyypillisestä ilmiöstä”, jossa ”jostain tietehistorian hämärästä charlataanista” ”ruvetaan väkisin tekemään suurmiestä” (Pekonen 2004, 45, 46). Häneltä jää kuitenkin huomaamatta vastaava ”pienille tiedemaille tyypillinen ilmiö”, jossa ”suurmiehestä” ”ruvetaan väkisin tekemään” ”tietehistorian hämärä charlataani.” Saarnion matematiikkaa ja erityisesti symboli-relaatiota koskevat tutkimukset ovat ”tuottaneet erityistä kunniaa Suomen tieteelle” ainakin Saksassa.

Vastauksessaan Pekonen sanoo, ettei löydä kritiikistäni tieteellistä sisältöä (*ibid.* 2004, 44). Tieteellisyyden kaikkein oleellisimpiin tunnusmerkkeihin kuuluu, että jokaiselle väitteelle on annettava perustelu, jonka tulee olla julkinen, ja että perustelun velvollisuus kuuluu väitteen esittäjälle (ks. Ketonen 1976, 14). Kritiikissäni (Palomäki 2003) esitin perusteluja, joiden mukaan Pekosen kirjassaan *Marian maa* kaikkea Uuno Saarniosta kirjoittamaa ei voi pitää totena. Julkistaessaan tieteellisiä tuloksiaan tutkijat asettavat ne samalla julkisen kritiikin ja arvostelun alaisiksi, sillä vapaan tieteellisen keskustelun voi katsoa parhaiten edistävän tieteessä tavoiteltavaa objektiivisuutta. Saarnion tieteellisten töiden arvoa ei kuitenkaan ratkaista *ad hominem*-tyyppisin argumentein.

- Bernays, P. (1940): ”Review of Gödel 1939”. *The Journal of Symbolic Logic* 5, 117-118.
- Cohen, P. J. (1966): *Set theory and the Continuum Hypothesis*. New York: Benjamin.
- Gödel, K. (1995): *Collected Works, Volume III – Unpublished Essays and Lectures*. Toim. S. Feferman etc. New York, Oxford: Oxford University Press.
- Hilbert, D. (1925): ”Über das Unendliche”. *Mathematischen Annalen* 95 (1926), 161-190. Englanninkielinen käännös S. Bauer-Mengelberg ”On the Infinite” teoksessa van Heijenoort (toim.) 1967, 369-392.
- Ketonen, O. (1976): *Se pyörii sittenkin. Tieteenfilosofian peruskysymyksiä*. Porvoo, Helsinki: WSOY.
- Palomäki, J. (2002): ”Uuno Saarnio – omintakeinen filosofi”. *Tieteessä tapahtuu* 6/2002, 15-20.
- Palomäki, J. (2003): ”Pekonen ja kontinuumihypoteesi”. *Tieteessä tapahtuu* 8/2003, 56-59.
- Pekonen, O. (2002): *Marian maa. Lasse Heikkilän elämä 1925-1961*. Helsinki: Suomalaisen Kirjallisuuden Seura.
- Pekonen, O. (2004): ”Pekonen vastaa Palomäelle”. *Tieteessä tapahtuu* 1/2004, 44-46.
- Saarnio, U. (1953): *Die Wohlordnung einer nichtabzählbaren Menge und die Lösung des Kontinuumsproblems*. Helsinki: Gesellschaft für Logik und Ihre Anwendungen.
- Saarnio, U. (1958): *System und Darstellung der Transfiniten Ordnungszahlen. Mit Einführung von Prof. Dr. Heinrich Behmann*. Helsinki: Gesellschaft für Logik und Ihre Anwendungen.
- Saarnio, U. (1962): ”Von Rechenoperationen höherer Ordnung bei der Darstellung der transfiniten Ordnungszahlen”. *Mathematische Annalen* 146, 217-225.
- Saarnio, U. (1964): *Eine Zuordnung zwischen den ersten zwei Cantorschen Zahlklassen und den 2<sup>0</sup> Dualfolge*. Helsinki: Gesellschaft für Logik und ihre Anwendungen.
- Saarnio, U. (1967): ”Über die Positionsdarstellung der Ordnungszahlen der Cantorschen zweiten Zahlenklasse”. *Mathematische Zeitschrift* 100, 396-413.
- Saarnio, U. (1968a): ”Die kritischen Zahlen höherer Ordnung innerhalb der zweiten Cantorschen Zahlenklasse”. *Mathematische Annalen* 178, 173-183.
- Saarnio, U. (1968b): ”Eine konstruktive Darstellung für die Richtigkeit der Kontinuumshypothese”. *Mathematische Annalen* 178, 335-353.
- Saarnio, U. (1968c): ”Ein Zeichensystem für die Darstellung der transfiniten Ordnungszahlen der zweiten Zahlenklasse”. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 14, 321-328.
- Solovay, R. M. (1995): ”Introductory note to Gödel \*1939b and \*1940a”. Teoksessa Gödel 1995, 114-127.
- van Heijenoort, J., (toim.) (1967): *From Frege to Gödel – A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Cambridge Mass.: Harvard University Press.
- Wang, H. (1996): *A Logical Journey. From Gödel to Philosophy*. Cambridge, Mass.: The MIT Press.

Kirjoittaja on teoreettisen filosofian dosentti Tampereen yliopistossa ja Tampereen teknillisen yliopiston Porin yksikössä.