

# Matematiikan aineenopettajakoulutuksesta ja didaktisesta

## matematiikasta

Timo Tossavainen

**Professori Olli Martio kirjoitti varsin provosoi-  
vasti didaktisesta matematiikasta *Tieteessä ta-  
pahtuu* -lehdessä 2/2004. Didaktisen matematiikan  
käyttönotolle löytyy kuitenkin paljon pe-  
rusteita. Artikkeliamme (Tossavainen – Sorva-  
li, *Tieteessä tapahtuu* 1/2004) ei ollut missään  
nimessä laadittu laskutaidon opettamisen vas-  
tustamiseksi!**

Matematiikan aineenopettajakoulutuksesta pu-  
huttaessa on syytä muistaa, että kyse on itse asi-  
assa sekä peruskoulun että lukion ja muiden  
keskiasteen oppilaitosten matematiikanopetta-  
jien kouluttamisesta. Usein matematiikan ai-  
neenopettajakoulutusta tarkastellaan silti pel-  
kästään lukion tarpeiden ja ongelmien näkökul-  
masta. Opetustuntien määrällä mitattuna perus-  
koulussa annettavasta matematiikan opetuksesta  
muodostuu kuitenkin suurin osan lähes jokaisen  
kansalaisen matemaattisesta sivistyksestä.

Miten sitten opettajankoulutus on onnistu-  
nut peruskoulun matematiikan tarpeiden kan-  
nalta? Ainakaan koululaisten oppimistulosten  
valossa tulokset eivät näytä tyydyttävän edes  
opettajankoulutukseen osallistuvien matemati-  
ikan laitosten edustajiakaan (ks. viitteet 1-3).  
Asia paljastuu ainelaitosten kannalta vielä kiu-  
sallisemmaksi, kun tarkastellaan, kuinka opet-  
tajien koulutustaso on yhteydessä oppilaiden  
menestymisen kanssa.

Opetushallitus arvioi vuoden 2000 maalisi-  
kuun lopussa kuudennen vuosiluokan mate-  
matiikan oppimistuloksia ja oppilaiden asentei-  
ta matematiikkaa kohtaan. Arviointiin valittiin  
289 koulua ja yli 4000 oppilasta. Tutkimuksessa  
pyrittiin ottamaan huomioon kaikki mahdolliset  
tekijät kielestä (suomi/ruotsi) koulujen kokoon.  
Parhaat oppimistulokset matematiikassa oli niil-  
lä oppilailla, joiden opettajana toimi seminaaris-  
ta valmistunut kansakoulunopettaja. Tämä oppi-  
lasryhmä menestyi kiistattomasti ja merkittävästi  
paremmin kuin esim. ne oppilaat, joiden opet-  
tajana toimi yliopistossa matematiikkaan vähin-  
tään approbaturin verran erikoistunut luokan-  
opettaja tai matematiikan aineenopettaja.

Tragikoomisinta tutkimustuloksissa on, että  
niiden opettajien oppilailla (N=36), joilla ma-  
tematiikka oli korkeakoulututkinnossa sivuai-  
neena, oppimistulokset olivat selvästi surke-  
ammat kuin niiden luokanopettajien oppilailla  
(N=557), joilla matematiikka oli erikoistumisai-  
ne (Niemi 2001, 89-91). Onneksi ensin mainittu  
oppilasryhmä on sen verran pieni, ettei sen pe-  
rusteella voi vielä tehdä kovin sitovia tilastolli-  
sia johtopäätöksiä. Silti tämän tutkimuksen va-  
lossa näyttää siltä, etteivät matematiikan oppi-  
mistulokset välttämättä ainakaan huononisi, jos  
matematiikan laitoksilta kiellettäisiin kokonaan  
osallistuminen opettajankoulutukseen perus-  
koulun osalta.

### *Matematiikan ja sen perinteisen didaktiikan opetuksen puutteista*

Artikkelissamme totesimme, että sanaparia di-  
daktinen matematiikka on ryhdytty käyttämään  
useammankin yliopiston matematiikan kurssi-  
en tai opintokokonaisuuksien ja jopa tutkimuk-  
sen kehittämisalueiden nimissä [4]. Siitä puhu-  
minen tuntuu kuitenkin herättävän myös vas-  
tustusta, kuten esimerkiksi Olli Martion kirjoit-  
uksesta kävi ilmi. Tällainen kritiikki pitää kui-  
tenkin kohdistaa kaikkiin niihin, jotka ovat tuo-  
neet tämän käsitteen yleiseen kielenkäyttöön,  
eikä erityisesti niihin, jotka pohdiskelevat, mitä  
sillä mahdollisesti tarkoitetaan.

Kaiken edellä sanotun perusteella lieene il-  
meistä, että matematiikan aineenopettaja-  
koulutukseen tarvitaan uusia näkökulmia.  
Artikkelimme pyrki etsimään niitä pohtimal-  
la, löytyisikö käsitteelle didaktinen matemati-  
ikka mielekäs sisältö suunnasta, joka lähen-  
täisi varsinaisen matematiikan ja oppimisen ja  
opettamisen asiantuntijoita toisiinsa. Tämä voi-  
si mielestämme luontevimmin tapahtua siten,  
että matematiikkaa tarkasteltaisiin sen kielias-  
pektia korostaen.

Matematiikka on kieli, jonka kehittyneen  
käytön erityispiirteenä on symbolien ja erikois-

merkkien runsaus. Matematiikan tuloksellisen oppimisen edellytyksenä on, että opetuksessa käytetään matemaattista kieltä virheettömästi. Tätä kieltä voidaan, kuten muitakin kieliä, käyttää monella eri tavalla ja tasolla. Erityisesti peruskoulun matematiikanopettajien koulutuksessa matematiikan kieliaspektia tulisi pitää jatkuvasti esillä, sillä peruskoulussa annettavaan opetukseen osallistutaan kielen- ja ajattelunkehittymisen kannalta kriittisessä iässä.

Didaktisesta matematiikasta puhumista näyttäisi puolustavan se, että perinteisessä matematiikan ja sen didaktiikan opetuksessa matematiikan kieliaspektiin ei ole kiinnitetty tarpeeksi huomiota. Didaktiikassa matematiikkaa tarkastellaan nimittäin useimmiten staattisena, valmiiksi annettuna objektina, johon kielen avulla vain viitataan. Toisaalta monilla matematiikan laitoksilla on edelleen nähty tarkoituksenmukaiseksi pakottaa myös opettajalinjan opiskelijat esim. differentiaaliyhtälöiden ja monen muuttujan analyysin teorian kurseille, vaikka varsin suurella osalla opiskelijoista analyysin peruskäsitteiden hallinta on sentasoista, että esimerkiksi funktiota  $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2$ , saatetaan väittää ei-jatkuvaksi mutta silti derivoituvaksi [5]. On toki olemassa ymmärrettäviäkin syitä toimia näin, mutta kieliaspektista tarkasteltuna tällainen toiminta on mainitun opiskelijajoukon kannalta lähinnä piinaamista ja opetuksen järjestäjän kannalta itsepetosta.

Toinen peruste didaktisen matematiikan käyttöön otolle on se, että suomalaisessa didaktisessa tutkimuksessa on tähän mennessä käsitelty hyvin vähän varsinaisen matematiikan oppimisen ja opettamisen ongelmia. Perinteisessä matematiikan didaktiikassa on toisin sanoen keskitytty lähinnä koulumatematiikan opetuksen problematiikkaan (*Malinen & Kupari* 2003). Matematiikka yliopistollisena oppiaineena ja koulun oppiaineena ovat varsin eri asioita [6]. Toisaalta varsinaisen matematiikan tieteellisessä tutkimuksessa matematiikan oppimisen kysymyksiin on luonnollisista syistä kiinnitetty hyvin vähän jos yhtään huomiota. Näin ollen matematiikan ja didaktiikan välimaastoon on jäänyt toistaiseksi vähän tutkittu alue.

Millaista toimintaa voisi sitten kuulua didaktisen matematiikan tutkimuksen piiriin? Artikkelissamme tätä asiaa jo hahmoteltiin yleisellä tasolla. Didaktisessa matematiikassa korostuu siis, jopa mekaanisen laskutaidon kustannuksella, käsitteellinen ja kielellinen matematiikan osaaminen. Sen tutkimuksen ensimmäisiin tehtäviin kuuluu nämä näkökulmat

huomioonottavien matemaattisen osaamisen mittausvälineiden kehittäminen. Tällaisen kehittämisen lähtökohtana on selvittää, missä eri muodoissa varsinaista matematiikkaa ja matemaattista ajattelua ylipäätensä voidaan esittää. Edelleen on tutkittava, millä eri tavoilla opettavasta matematiikasta ja oppijoiden matemaattisista tietorakenteista voidaan laatia mahdollisimman täydellisiä ja yhteensopivia malleja, joiden avulla voidaan suorittaa todellisen ja pitkäkestoisen oppimisen määrällisiä ja laadullisia mittauksia. Tähän liittyy läheisesti mm. äidinkielen, taito- ja taideaineiden oppimisen kehittymisen tutkimuksen seuraaminen.

Tämän jälkeen – ja kenties rinnalla – didaktisessa matematiikassa voidaan kriittisesti tarkastella koulumatematiikan sisältöjä eri luokka-asteilla sekä laskinten ja muiden apuvälineiden roolia ja merkitystä matematiikan opetuksessa. Lienee itsestään selvää, että kaiken kaikkiaan tällainen toiminta edellyttää aidosti ainakin sekä varsinaisen matematiikan että kasvatustieteen asiantuntemusta.

### *Todellinen laskutaito ja kouluopetus*

Martio toteaa kirjoituksessaan, että Suomessa käydään vähän kriittistä keskustelua kouluisa opettavasta matematiikasta, oppimääristä ja oppikirjoista. On ilahduttavaa nähdä, että matematiikan osaamiseen ja opettamiseen liittyvät asiat kuitenkin kiinnostavat myös muita kuin ammatikseen matematiikan opettamisen kanssa työskenteleviä [7].

Todellinen laskutaito ja numeroiden lukutaito ovat edelleen tarpeellisia kansalaistaitoja. Tällainen laskutaito on sellaista ajattelua ja tietoista toimintaa, joka oleellisesti eroaa sellaisesta mekaanisesta laskemisesta, jossa laskut suoritetaan orjallisen uskollisesti annetussa järjestyksessä annettuja laskualgoritmeja käyttäen. Siihen ilman muuta kuuluu kyky tarkastella suoritettavien laskujen järjestyksen optimaalisuutta ja tarvittaessa muokata esimerkiksi laskettavia lukuja niin, että laskut voidaan suorittaa tehokkaasti laskinta käyttäen tai käsin. Lisäksi todellisesti laskutaitoinen ihminen kykenee esimerkiksi arvioimaan jo ennen varsinaisten laskujen suorittamista niiden lopputuloksen suuruusluokan.

Tällainen laskeminen edellyttää toki jonkinlaista – mutta ei välttämättä erityisen tehokkaaksi hiottua – kykyä suorittaa yksinkertaisia yhteen- ja kertolaskuja päässä. Miten todellinen

laskutaito saavutetaan, on kaikille matematiikanopettajille edelleen ainakin osittain mysteerinä mielessä, ettei sitä millään koulutustasolla ole toistaiseksi kyetty juurruttamaan välttämättä edes suurimpaan osaan opetettavista.

Artikkeliamme ei missään nimessä laadittu todellisen laskutaidon opettamisen vastustamiseksi. Päinvastoin matematiikan aineenopettajakoulutuksessa on mielestämme ponnisteltava lujasti sen eteen, että todellisuus kouluissa olisi sellainen, että matematiikan tunneilla edistetäisiin todellisen laskutaidon kehittymistä monipuolisesti. Laajan TIMMS-selvityksen perusteella suomalaiset peruskoululaiset pärjäisivät kohtuullisesti lähinnä mekaanista laskemista edellyttävissä tehtävissä, mutta esimerkiksi heidän ns. käsitteellinen osaamisensa alapuolella [8]. Muun muassa tämän perusteella vaikuttaa siltä, että kouluopetuksessa käytetään vieläkin mekaanisen laskemisen harjoitteluun suhteellisesti liian paljon resursseja.

## VIITTEET

- [1] Näätänen, Marjatta (2001): "Mitä TIMSS-tutkimus kertoo suomalaisien koululaisten matematiikan taidoista ja matematiikan opetuksesta?" *Solmu* 6 (1), 12-17.
- [2] Martio, Olli – Lindqvist, Peter (2001): "Osataanko matematiikkaa?" *Solmu* 6 (3), 28-30.
- [3] Huovinen, Alli (2004): "Opiskelijoiden matematiikan taso laskenut". Haastattelu sanomalehti *Kalevassa* 19.1.2004.
- [4] <http://www.jyu.fi/mtdk/Matleh01.html> ja <http://www.jyu.fi/mtdk/Matass94.html>
- [5] Virtanen, A. (1994): *Matematiikan opetusharjoittelijoiden taidot lukion differentiaalilaskennassa*. Pro gradu -tutkielma, Helsingin yliopisto. Matematiikan laitos.
- [6] Tieteellistä matematiikkaa voidaan melko hyvin luonnehtia sanoilla aksiomaattinen, loogis-deduktiivinen ja abstrakti; ja koulumatematiikkaa sanoilla kokeellis-havainnollinen, reaalin ja hyödyllinen. Jo esimerkki paljastaa, kuinka nämä matematiikat eroavat toisistaan. Funktion jatkuvuus määritellään varsinaisessa matematiikassa funkti-

on lähtö- ja maaliavaruuksien avoimien joukkojen avulla, koulumatematiikassa jatkuvuuden määritelmä nojautuu siihen havainnolliseen seikkaan, että jatkuva funktio kuvaa lukusuoran yhtenäisen joukon lukusuoran yhtenäiseksi joukoksi. Koulumatematiikassa käytetty havainnollinen määritelmä on mielekäs vain varsin rajoitetun funktiojoukon yhteydessä, ja se antaa jopa väärän käsityksen jatkuvuudesta sellaisten funktioiden tapauksessa, jossa funktion määrittelyjoukkona on epäyhtenäinen joukko.

- [7] Seppälä, Matti (2004): "Laskutaito ja numeroiden lukutaito edelleen tarpeen." *Tieteessä tapahtuu* 1/2004, 54-55.
- [8] Kupari, Pekka & Reinikainen, Pasi (2001): "Matematiikan osaaminen TIMSS-tutkimuksen perusteella." *Dimensio* 65 (3), 5-8.

## KIRJALLISUUTTA

Kupari, Pekka – Reinikainen, Pasi – Nevanpää, Tiina – Törnroos, Jukka (2001): *Miten matematiikkaa ja luonnontieteitä osataan suomalaisessa peruskoulussa? Kolmas kansainvälinen matematiikka- ja luonnontiedetutkimus TIMMS 1999 Suomessa*. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos.

Malinen, Paavo – Kupari, Pekka (2003): *Miten kognitiivisista prosesseista kehiteltiin konstruktivisimia - Katsaus Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimusseuran toimintaan 1983-2003*. Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä.

Martio, Olli (2004): "Didaktista matematiikkaa?" *Tieteessä tapahtuu* 2/2004, 42-45.

Niemi, Eero. K. (2001): *Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 6. vuosiluokalla vuonna 2000*. Opetushallitus. Helsinki.

Tossavainen, Timo – Sorvali, Tuomas (2003): "Koulumatematiikka, matematiikka ja didaktinen matematiikka". *Tieteessä tapahtuu* 8/2003, 30-34.

*Kirjoittaja on filosofian tohtori ja toimii matematiikan lehtorina Joensuun yliopiston Savonlinnan opettajan-koulutuslaitoksessa.*