Virvatulilla

Tapani Hyttinen

Osmo Pekosen kirjasta *Marian maa – Lasse Heikkilän elämä 1925–1961* alkanut ja *Tieteessä tapahtuu* -lehden sivuilla jatkunut Pekosen ja Jari Palomäen väittely Uuno Saarnion persoonasta ja hänen tieteellisten töidensä merkityksestä on herättänyt yllättävää mielenkiintoa työpaikkani kahvihuoneessa. Näin erityisesti väittelyn kontinuumihypoteesia koskeva osa. Koska lisäksi kuvittelen tietäväni jotain kontinuumihypoteesista ja tästä huolimatta minulla on ollut vaikeuksia ymmärtää kaikkia väittelyssä käytettyjä argumentteja, arvelin, että löytyisi lukijoita kirjoitelmalle, jossa yritettäisiin selventää sitä mistä kontinuumihypoteesiksi kutsutussa ongelmassa on kysymys.

Tähän pyrin tällä kirjoituksella ja teen tämän tietoisena siitä, että lopputulos voi olla päinvastainen. Puutun Pekosen ja Palomäen esittämistä virheellisistä väittämistä vain niihin jotka koskevat suoraan kontinuumihypoteesin ratkaisemista. [1]

Tämän esityksen kannalta on itse asiassa yhdentekevää, mitä kontinuumihypoteesi väittää. Mainitsen sen kuitenkin: kontinuumihypoteesin mukaan jokaiselta reaalilukujen joukon osajoukolta on joko injektio luonnollistenlukujen joukkoon tai surjektio reaalilukujen joukkoon. Tämän David Hilbert valitsi ongelmaksi numero yksi vuodelta 1900 peräisin olevalle matemaatikkojen keskuudessa kuuluisalle avointen ongelmien listalleen.

Pyrin vastaamaan seuraaviin kahteen kysymykseen:

K1. Onko kontinuumihypoteesi avoin ongelma?

K2. Jos vastaus ensimmäiseen kysymykseen on kyllä, niin mitä kontinuumihypoteesin ratkaiseminen tarkoittaa?

Seuraavan pedanttisen huomautuksen lukija voi sivuuttaa: Esitykseni yksinkertaistamiseksi oletan koko ajan, että joukko-opin standardi aksiomatisointi on ristiriidaton.

Avoin ongelma?

Ensimmäinen yllä olevista kysymyksistä on kompakysymys, sillä vastaamalla siihen miten tahansa vastaaja sitoutuu väistämättä joihinkin matematiikan perusteita koskeviin filosofisiin näkemyksiin. Tästä seuraa, että kysymykseen ei voi vastata tarkastelematta, Pekosen sanoja käyttääkseni, runollisia metafooria.

Matematiikan perusteilla tarkoitan niitä käsitteitä ja tosina pidettyjä (?) periaatteita, joita matemaatikko voi käyttää todistuksissaan ilman, että hänen tarvitsee niitä käsitteiden tapauksessa määritellä ja periaatteiden tapauksessa todistaa tai mainita teoreemojensa oletuksissa. Esimerkiksi funktion $f{:}R^2 \to R$, $f(x,y)=x+y$, olemassa oloon tarvittavia periaatteita ei mainita teoreeman oletuksissa vaikka tätä funktiota todistuksessa käytettäisiinkin eikä funktion käsitteen taustalla olevaa joukon käsitettä määritellä. Näitä perusteita koskevilla filosofisilla näkemyksillä tarkoitan vastausta kysymykseen miten ja millä perusteella nämä periaatteet on valittu ja yleisemmin sitä mitä totuudella matematiikassa tarkoitetaan.

Kokemukseni mukaan valtaosa matemaatikoista sijoittuu akselille jonka toisessa päässä on formalismi (sanan nykymerkityksessä) ja toisessa realismi (liberaali platonismi), näin siitäkin huolimatta, että filosofista näkemystä kysyttäessä vastaus olisi evvk. Tarkastelen siksi vastausta ensimmäiseen kysymykseen näiden kahden näkemyksen valossa. (Muitakin vaihtoehtoja toki on, esimerkiksi finitisti pitäisi koko kontinuumihypoteesiä roskana koska reaalilukuja on vain äärellinen määrä.)

Realisti uskoo, että matemaattiset väitteet puhuvat ihmismielestä riippumattomasta objektiivisesta todellisuudesta, jolloin matemaattisten väitteiden, vaikkapa ”luonnollisten lukujen 4 ja 7 summa on 11”, totuudesta puhuminen on mielekästä. Matemaattiset väitteet ovat tällöin totta tai epätotta pitkälti samassa mielessä kuin väite ”nyt sataa”. Erityisesti tästä seuraa, että matemaattisilla väitteillä kuten kontinuumihypoteesi on totuusarvo, jolloin kontinuumihypoteesi on avoin ongelma. Realistille Paul Cohenin tulos, että joukko-opin standardi aksiomatisointi ZFC ei ratkaise kontinuumihypoteesiä tarkoittaa, että kontinuumihypoteesi on todistuvasti erittäin vaikea ongelma, tästä enemmän myöhemmin.

Formalisti ei usko, että matematiikka puhuu todellisuudesta. Formalistille matemaattiset väitteet ovat vain sitä miltä ne ensisilmäyksellä kirjoitettuina näyttävätkin eli merkkijonoja. Esimerkiksi väite ”4+7=11” on kuuden merkin jono, jossa vaikkapa toiseksi viimeinen merkki on ”1”. Formalistille matematiikka on tiede, joka manipuloi näitä merkkijonoja yhdessä sovittujen sääntöjen avulla. Tätä manipulointia kutsutaan todistamiseksi. Formalistille matemaattiset väitteet eivät ole tosia tai epätosia vaan olioita, jotka kenties voidaan todistaa joistain oletuksista ja joiden negaatio voidaan kenties todistaa joistain muista oletuksista. Tällöin kysymys kontinuumihypoteesin avoimuudesta on mieletön (paitsi jos kontinuumiongelman ymmärretään tarkoittavan sitä, voidaanko kontinuumihypoteesi todistaa ZFC:ssä, tästä enemmän tuonnempana). Cohenin tulos kertoo formalistille että ZFC sattuu olemaan sellainen aksioomasysteemi, josta kontinuumihypoteesia ei voi todistaa ja josta (jo Kurt Gödelin tuloksen nojalla) ei voi todistaa myöskään sen negaatiota – ei siis mitään muuta.

Kirjassaan Pekonen toteaa: ”Saarnio ei kuitenkaan koskaan uskonut Cohenin tulosta todeksi, vaan jatkoi härkäpäisesti kontinuumihypoteesin tutkimista” ja että ”Heikkilä oli kuitenkin niin Saarnion visioiden lumoissa, ettei hän aavistanut kontinuumihypoteesin todistamisen matemaattista mahdottomuutta”. Koska tulevien, erityisesti kuoleman jälkeisten, tapahtumien aavisteleminen kuuluu Helsingin yliopistossa viralliselle haamu-, aave- ja kummitusvastaavalle, tarkastelen tässä sitä olisiko Saarnion pitänyt uskoa kontinuumihypoteesin todistamisen matemaattiseen mahdottomuuteen?

Kyllä olisi, jos kontinuumihypoteesin todistamisella tarkoitetaan sen todistamista ZFC:ssä (tai jossain heikommassa aksiomasysteemissä). En kuitenkaan usko Georg Cantorin tarkoittaneen tätä esittäessään kontinuumihypoteesin avoimena ongelmana. Tätä epäilystä tukee huomio, että Ernst Zermelo julkaisi ensimmäisen joukko-opin aksiomatisoinnin 30 vuotta sen jälkeen kun Cantor oli kontinuumiongelmansa esittänyt ja Abraham Fraenkel syntyi pitkälle toistakymmentä vuotta kontinuumiongelman esittämisen jälkeen.

Miten ratkaista

Oletamme tässä kappaleessa, että olemme vastanneet ensimmäiseen kysymykseen myöntävästi.

Cohenin tuloksesta seuraa, että kontinuumihypoteesia ei voi ratkaista nykyisin käytössä olevista matematiikan perusteista lähtien. Näin sanoessani en siis väitä, että ZFC muodostaisi matematiikan nykyiset perusteet, väitän ainoastaan, että kaikki matematiikassa nykyään käytetyt käsitteet voidaan määritellä ZFC:ssä ja kaikki yleisesti hyväksytyt periaatteet voidaan todistaa ZFC:ssä – tämä lienee kiistatonta.

Kontinuumihypoteesin ratkaisu edellyttää siten matematiikan perusteiden muuttamista. Voidaan kysyä, onko tämä mahdollista? Vastaus tähän on, että tietysti se on *mahdollista*, historian kuluessa nämä perusteet ovat muuttuneet useaan kertaan (ja aina vahvempaan suuntaan). Edellisen kerran näin tapahtui viime vuosisadalla: ensin joukko-opin käyttöönotto ja myöhemmin valinta-aksiooman käytön liberalisoituminen. Antiikin Kreikassa matematiikka perustui geometriaan, jolloin edellä mainitun funktion (x,y) -> x+y olemassaoloa vastasi tieto, että x:n ja y:n pituisista janoista voidaan konstruoida Eukleideen aksioomien avulla jana, jonka pituus on x+y.

Nykyään funktion käsite on matematiikassa niin abstrakti, että edellä mainittu perustelu ei riitä osoittamaan yhteenlaskun olemassa oloa *funktiona* (olemassa olo seuraa muutamasta yleisesti hyväksytystä joukkojen konstruktioperiaatteesta). Toisaalta matematiikan nykyisin käytössä olevat perusteet mahdollistavat matemaatikolle vaikkapa Lebesguen mitaksi kutsutun funktion käytön todistuksissa. Vuonna 1850 tällaisen olion käyttö olisi ollut skandaali.

Kontinuumihypoteesin ratkaisulle asetetaan siten seuraavat neljä vaatimusta.

V1: Esitettävä uudet (peruskäsitteet ja) periaatteet matematiikan perusteiksi.

V2: Perusteltava miksi esitetyt periaatteet ovat hyväksyttävät (todet, hyödylliset, ristiriidattomat ja/tai muuta vastaavaa).

V3: Saatava matemaatikkojen hyväksyntä näille periaatteille (kun tietää miten Cantorin joukko-oppi otettiin vastaa, on luultavaa, että tämän vaatimuksen täyttäminen on mielipuolisen vaikeaa, joskin vilkkaalla mielikuvituksella varustettu lukija saattaa pystyä kuvittelemaan myös tilanteen jossa tämän vaatimuksen ja siis myös vaatimuksen V2 täyttäminen on helppoa).

V4: Näytettävä, että näiden periaatteiden avulla kontinuumihypoteesi voidaan todellakin ratkaista.

Haluan kuitenkin korostaa, että mahdollisesti poislukien Cantor, yksin kukaan ei ole onnistunut matematiikan perusteita muuttamaan. Yleensä kysymyksessä on ollut pikemminkin hidas kehitys.

Huolimatta poikkeuksellisen kovista vaatimuksista, Cohenin tuloksen julkaisemisen jälkeen ainakin yksi rohkea henkilö on esittänyt vakavasti otettavan ehdotuksen kontinuumihypoteesin ratkaisuksi, nimittäin Palomäen mainitsema Hugh Woodin. Hänen ratkaisuehdotuksensa kiistatta täyttää vaatimukset V1 ja V4, siitä kuinka hyvin ehdotus täyttää vaatimuksen V2 käydään vilkasta keskustelua ja ainakaan tämän kirjoitelman tekijä ei usko, että ehdotus nykymuodossaan täyttää koskaan vaatimusta V3.

Johtopäätöksiä

Koska minulla ei ole aikomustakaan lukea Saarnion ratkaisuehdotusta (yllättävän moni on sen lukenut ja aina saamatta ehdotuksesta mitään irti – miksi minä olisin poikkeus; ks. vaikka Pekosen vastaus Palomäelle, muitakin Saarnion ehdotuksen lukeneita on), en ota kantaa sen laatuun ohi alla olevien yleisten huomioiden, jotka seuraavat edellä kerrotusta.

Vaikka haluaisikin pitää yllä toivoa, että Saarnion ratkaisuehdotus kontinuumihypoteesille pitää sisällään jotain matemaattisesti arvokasta, on selvää, että Saarnio ei ole ratkaissut kontinuumihypoteesiä. Kiistatonta kun on, että Saarnion ehdotus ei täytä vaatimuksia V1–3. Lisäksi minun on vaikea ymmärtää miksi joku antaisi vaatimuksen V4 täyttävän ratkaisuehdotuksen ilman, että ottaisi mitenkään kantaa vaatimukseen V1.

Ei ole uskottavaa, että henkilö joka kykenee antamaan vakavasti otettavan ratkaisuehdotuksen kontinuumihypoteesille, ei huomaisi, että ehdotus perustuu niin radikaalisti uusille käsitteille, ettei niitä voi määritellä ZFC:ssä ja/tai ilman todistusta tosina pidettäville periaatteille, joita kukaan muu matemaatikko ei ole ennen häntä käyttänyt. Voidaanko ylipäätään pitää todistusta virheettömänä jos se perustuu matematiikassa ennestään tuntemattomille tosiksi oletetuille periaatteille ilman, että tästä on todistuksessa edes mainintaa?

Palomäki korostaa, että koska Saarnio käytti naiivia joukko-oppia, Cohenin tuloksesta ei seuraa, että Saarnion ratkaisu on virheellinen. Kuten edellä sanotusta jo käy ilmi, Cohenin tuloksesta seuraa että kontinuumihypoteesin todistus on virheellinen niin kauan kun todistuksessa käytetyt periaatteet ovat niitä, joita matematiikassa on tähän saakka käytetty. Se perustuuko ehdotus johonkin formaaliin aksiomasysteemiin vai ei on yhdentekevää.

Kokonaan toinen kysymys on se kuinka vakavana tahrana sitä on pidettävä, että Helsingin Rikhardinkadun kirjaston johtaja ei harrastuksenaan onnistunut kontinuumihypoteesiä ratkaisemaan. Siis siitäkin huolimatta, että Saarnio teki harrastuksestaan julkisen. Monet kirjoittavat harrastuksekseen kirjoja ja vieläpä julkaisevat niitä.

VIITE

[1] Haluan kiittää Panu Raatikaista arvokkaista kommenteista, joita sain tämän kirjoitukseni valmisteluvaiheessa.

KIRJALLISUUTTA

Palomäki, J. (2003): ” Pekonen ja kontinuumihypoteesi”. *Tieteessä tapahtuu* 8/2003, 56-59,

Palomäki, J. (2004): ”Saarnio ja kontinuumihypoteesi”. *Tieteessä tapahtuu* 2/2004, 52-54.

Pekonen, O. (2002): *Marian maa – Lasse Heikkilän elämä 1925–1961*. Suomalaisen kirjallisuuden seura, Helsinki, 2002.

Pekonen, O. (2004): ”Pekonen vastaa Palomäelle”. *Tieteessä tapahtuu* 1/2004, 44-46.

Saarnio, U. (1969): *Mitä tiedämme äärettömästä*,.WSOY, Porvoo, 1969.

Kirjoittaja on FT ja yliopistonlehtori Helsingin yliopiston matematiikan laitoksella.