Matematiikan ymmärtyminen eetteriksi

■ Pentti Alanen

Vallitseva käsitys fysiikasta on, että Albert Einsteinin suhteellisuusteorioiden myötä Newtonin teorioiden sisältämä ajatus absoluuttisesta ajasta ja avaruudesta on osoitettu virheelliseksi. Albert A. Michelsonin ja Edward W. Morleyn klassisen kokeen katsotaan kumonneen olettamuksen eetteristä, joka tarvittaisiin fysikaalisten ilmiöiden taustaksi. Samassa yhteydessä katsotaan luovutun siitä ennakkoluulosta, että avaruuden geometrian on oltava euklidinen. Einsteinin teorioiden mukaan aine ja avaruus ovat yhteen kietoutuneet siten, että painovoima, gravitaatio, määrää avaruuden geometrian. Geometria avaruuden kuvaajana poistuu tällöin riippumattoman taustakoordinaatiston asemasta ja empiirinen geometria voidaan selvittää empiirisin keinoin. Erilaisia geometrioita voi olla monia, tutkimuksen asia on selvittää, mikä niistä kuvaa oikein empiiristä todellisuutta.

Matematiikka on kokemuksesta ja mielipiteistä riippumaton objektiivinen tiede. Emme testaa empiirisin keinoin tai enemmistöpäätöksin kertotaulun paikkansapitävyyttä. Jos matematiikka ei millään tavalla ole riippuvuussuhteessa empiiriseen maailmaan, se näyttää edustavan dualismia, muodostavan fysiikan taustalle eräänlaisen tietoteoreettisen eetterin, absoluuttisen vertailuperustan, johon suhteessa empiiristä maailmaa ajatellaan voitavan tarkasti kuvata. Tästä asiantilasta seuraa ongelma, jota lukuisat eturivin fyysikot ja matemaatikot Einsteinista alkaen ovat hämmästelleet: kuinka on mahdollista, että riippumattomat matemaattiset menetelmät osoittautuvat soveltuvan loistavasti fysikaalisen maailman kuvaamiseen. Eugene Wigner toteaa artikkelissaan ”Matematiikan käsittämätön tehokkuus luonnontieteissä (Wigner 1992), että ”matematiikan valtava hyödyllisyys luonnontieteissä on sangen arvoituksellista ja ettei sille ole mitään järjellistä selitystä”.

Asiantila saattaa kuitenkin olla selitettävissä. Ongelman voi aiheuttaa geometrian soveltamiseen liittyvä päättelyvirhe. Nykyisin vallitsevaa käsitystä geometrian ja empiirisen maailman suhteesta kuvaa Michael Atiyahin kanta hänen kirjoituksessaan ”Matematiikka ja fysikaalinen maailma” (mt.):

> Tarkastelkaamme seuraavaksi hieman toisenlaista geometriaa: pallonpinnan, esimerkiksi maapallon geometriaa. Ensimmäinen ongelmamme on selvittää, mitä ”suorat viivat” nyt tarkoittavat. Määrittelemme ne lyhimpinä teinä pisteestä toiseen. Jokainen lentokapteeni tietää, että lyhin tie Lontoosta New Yorkiin on pitkin isoympyrän kaarta. Tästä saamme määritelmän suorille viivoille pallon pinnalla. Jos kehittelemme edelleen näin muodostuvaa geometriaa, havaitsemme, ettei kolmion kulmien summa enää ole kaksi suoraa kulmaa. Itse asiassa tuo summa on aina suurempi kuin kaksi suoraa kulmaa. Ottakaamme esimerkiksi pallokolmion ABC yhdeksi kärjeksi A pohjoisnapa ja valitkaamme kaksi muuta kärkeä B ja C päiväntasaajalta siten, että kaaren BC pituus on yksi neljäsosa päiväntasaajan pituudesta. Silloin havaitsemme helposti, että kolmion ABC kaikki kulmat ovat suoria, joten sen kulmien summa on yhtä kuin kolme suoraa kulmaa.

Tämä päättely ei kuitenkaan ole pätevä. Jos ”ensimmäinen ongelmamme on selvittää, mitä ”suorat viivat nyt tarkoittavat”, seuraava ongelmamme on selvittää, mitä käsitteet ”kulma” ja ”tangentti” nyt tarkoittavat. Euklidisessa tasogeometriassa kulman koko määritetään kulman sivujen väliin jäävän ympyrän kaaren ja vastaavan ympyrän säteen suhteen avulla. Tällöin säteen ja ympyrän kaaren absoluuttisella pituudella ei ole merkitystä, niiden suhde ilmaisee kulman koon yksikäsitteisesti. Ympyröiden leikkauspisteeseen muodostuvan kulman suuruus määrätään euklidisessa geometriassa mittaamalla kulmapisteeseen piirrettyjen ympyränkaarta sivuavien tangenttien välinen kulma. Mikä on tangentti? Se on määritelmän mukaan suora. Koska määrittelimme Atiyahin esimerkissä empiirisen suoran isoympyrän kaaren osaksi, meidän on määriteltävä tässä esimerkissä käyttämämme, suoraksi oletettu empiirinen tangentti samalla tavalla. Tällöin tangentti yhtyy koko pituudeltaan pallon isoympyrän kaareen. Jos kuitenkin käytämme suoran käsitettä kahdella eri tavalla, ensiksi empiirisen pallon isoympyränä, mutta mittauslaitteen kyseessä ollen isoympyrästä eroavana tangenttina, postuloimme empiiriseen mittaukseemme taustan, riippumattoman ”matemaattisen eetterin”, johon nähden empiirisen maailman geometria määritetään. Jos sen sijaan käytämme suoran käsitettä koko ajan samalla tavalla, huomaamme, että esimerkkimme pallopinnan mittauksissa kulmaksi nimitetyn kuvion koko ei enää ole ympyrän kaaren ja sitä vastaavan säteen samana pysyvä suhde. Saatava lukema riippuu käytetyn mittauslaitteen absoluuttisesta koosta. Pieni mittauslaite antaa käytännössä lukemaksi 90 astetta, mutta Atiyahin kuvion kokoinen mittalaite 60 astetta. Jos käytämme varomattomasti myös tästä mitatusta kuviosta nimeä ”kulma”, saamme aikaan käsitteellistä sekaannusta, joka johtuu siitä, että samat sanat siirretään käsitteinä sellaisinaan toiseen ympäristöön. Sana ”kulma” tai ”suora” ei merkitse identtistä asiaa euklidisessa ja epäeuklidisessa geometriassa.

Maailmasta riippumaton matemaattinen kriteeri otetaan tässä mitaksi empiirisen ilmiön tutkimuksessa. Jo alkeisgeometrian oppikirjoissa todetaan kuitenkin, että ”mitan on oltava samaa laatua kuin mitattava kohde”. Empiirisen maailman mittauksissa on käytettävä empiirisiä instrumentteja, ja käytettävissä olevien mittalaitteiden ominaisuudet riippuvat juuri siitä samasta maailmasta, joka on mittausten kohteena. Yritys määrittää maailman empiirinen geometria siitä itsestään riippuvin menetelmin sisältää kehäpäätelmän, joka vastaa Münchausenin yritystä nostaa itseään tukasta. Tämän kehän oletetaan tulevan vältetyksi, jos mittausmenetelmä on matemaattinen, jota eivät koske samat periaatteet kuin mittauksen kohdetta.

Ludwig Wittgenstein toi *Tractatus*-teoksessaan esiin teesin kielen ja maailman yhteen kietoutumisesta. Tämän näkökannan mukaan olemme maailman vankeja, emmekä voi päästä maailman ulkopuolelle sanoaksemme, millainen maailma on. Yleiset lauseet maailmasta eivät Wittgensteinin mukaan ole mahdollisia. Tähän käsitykseen liittyvää laajaa keskustelua ovat suomeksi julkaistuissa artikkeleissa käyneet mm. Jaakko Hintikka (1992), Martin Kusch (1992) ja Karl-Otto Apel (1970).

Hintikan mukaan kaksi kilpailevaa teoriaa kielestä ovat Jean Van Heijenoortin tekemän jaon mukaan käsitys kielestä universaalisena mediumina ja käsitys kielestä kalkyylina. Hintikka katsoo, että kalkyylikäsityksen mukaan emme ole maailman vankeja. Hänen mielestään (Hintikka 1992, s. 246–247) kalkyylikäsityksen ydinehto on, että kalkyyli on tulkittavissa yhä uudestaan, kun taas käsitys kielestä universaalisena mediumina ei salli uudelleentulkintaa. Vaikka hyväksymme Hintikan kannan, meille jää yhä se mahdollisuus, että käsitys kalkyylin uudesta tulkitsemismahdollisuudesta ulotetaan koskemaan myös niitä menetelmiä ja laitteita, joilla maailmaa tutkitaan. Edellä tällainen tulkinta tehtiin koskemaan suoran lisäksi myös tangentin ja kulman käsitteitä. Tämän ehdotuksen mukaan matematiikka on jo tulkittu empiirisesti niissä olettamuksissa, joita on jo väistämättä tehty, kun kuhunkin tutkimukseen on valittu relevantit metodit ja laitteet. Jokin vuosi sitten raportoitiin, että CERNin hiukkaskiihdyttimellä on onnistuttu havaitsemaan kuuluisan, vuosikymmeniä sitten teorian ennustaman Higgsin hiukkasen olemassaolo. Vielä uudempi uutinen on, että gravitaatioaaltoja on voitu havaita. Jotta tällaiset havainnot olisivat mahdollisia, on kyettävä rakentamaan laitteisto, jonka rakenteessa on ymmärretty, millainen etsittävä kohde on luonteeltaan, jotta tällainen havainto voidaan tehdä; ”mitan on oltava samaa laatua mitattavan kohteen kanssa”.

Niin sanotun puhtaan matematiikan tai geometrian teorioiden ei sellaisenaan tarvitse kuvata empiiristä maailmaa, mutta jokaisessa empiirisessä tarkastelussa olemme jo etukäteisesti valinneet käyttöömme sopivat matemaattiset menetelmät valitessamme relevanteiksi uskomamme tutkimusmenetelmät. Olemme tällöin tulkinneet matematiikan empiirisesti, jotta tutkimus voi onnistua. Seuraavassa tutkimuksessa voimme valita toisen tulkinnan, mutta meidän on pysyttävä kullakin kerralla johdonmukaisesti samassa tulkinnassa sekä mitan että mitattavan suhteen. Emme voi mitata empiiristä maailmaa siten, että käytämme mittauslaitteidemme teoriassa eri matematiikan tulkintaa kuin itse kohteen kuvauksessa. Tässä mielessä olemme maailman vankeja kussakin yksityisessä tapauksessa, kun olemme väistämättömän valintamme tehneet, mutta voimme myös vapautua siitä yhä uudestaan.

Tämä käsitys pitää sisällään sen mahdollisuuden, että eri ilmiöitä kuvaavien matemaattisten teorioiden ei tarvitse olla yhteismitallisia ja siksi toisiinsa redusoituvia. Matematiikka kuvaa "hämmästyttävän hyvin" empiiristä maailmaa, koska tutkimuksen tulokset ovat loogisesti yhteensopivia sen matematiikan empiirisen tulkinnan kanssa, jonka olemme jo tehneet siinä vaiheessa, jossa valitsemme tutkimuksessamme pätevät menetelmät. Matematiikka ei kuvaa maailmaa ulkoapäin, vaan maailmassa vallitsevia sisäisiä suhteita. Jos tapahtunutta tulkintaa ei ajatella tapahtuneeksi, saadut tulokset näyttävät osoittavan, että empiirinen maailma on käsittämättömällä tavalla yhteensopiva taustaksi ajatellun, eetterin kaltaisen puhtaan matematiikan kanssa. Olemmeko ymmärtäneet T*ractatuksen* loppulauseiden ajatuskulun oikein, jos yhä hyväksymme Wittgensteinin ja Apelin kannan, jonka mukaan yleiset lauseet maailmasta ovat epämielekkäitä? Maailma ei tämän käsityksen mukaan ole euklidinen eikä epäeuklidinen, koska kumpikin olettamus postuloi sellaisen maailmasta riippumattoman kriteerin, johon nähden geometria voitaisiin määrittää joillakin maailmasta riippumattomilla menetelmillä.

Kirjallisuus

Apel, K.-O. (1970): Wittgenstein ja Heidegger. Teoksessa *Filosofian tila ja tulevaisuus*, toim. Jaakko Hintikka ja Lauri Routila, Weilin + Göös.

Atiyah, M. (1992): Matematiikka ja fysikaalinen maailma. Teoksessa *Symbolien metsässä*, toim. Osmo Pekonen, Art House.

Hintikka, J. (2001): Filosofian köyhyys ja rikkaus. Art House Oy.

Kusch, M.: Hintikka J. (1998): *Kieli ja maailma*, Pohjoinen 1988.

Wigner, E. (1992): Matematiikan käsittämätön tehokkuus luonnontieteissä. Teoksessa *Symbolien metsässä*, toim. Osmo Pekonen, Art House.

Wittgenstein L. (1971): *Tractatus logico-philosophicus*, WSOY.

Kirjoittaja on professori (emeritus).