Fraktaalimatematiikan kauneus ja kauheus ovat katsojan silmissä

Maarit Järvenpää

Pidättekö Sibeliuksen musiikista? Entä fraktaalimatematiikasta? Vaikka näiden kysymysten vertailu saattaa vaikuttaa mahdottomalta, yhtäläisyyksiä löytyy yllättävän paljon – tarkasteltiinpa asiaa joko musiikin tai matematiikan ammattilaisen näkökulmasta. Siinä, missä musiikin harrastaja joko pitää tai ei pidä kuulemastaan, musiikin ammattilainen analysoi teoksen tonaalisia suhteita sekä rytmillisiä ja soinnillisia ominaisuuksia. Tämän analyysin tulos ei kuitenkaan ole sen tekijästä riippumaton, mikä näkyy selvästi esimerkiksi sanomalehtien musiikkiarvosteluista.

”Mieluummin vaikka kalanmaksaöljyä kuin Sibeliusta”, kirjoitti eräs musiikkikriitikko Sibeliuksen 4. sinfonian kantaesityksen jälkeen. Sibeliuksen musiikin kauneus ja kauheus ovat siis kuulijan korvissa. Fraktaalimatematiikkaa koskevan kysymyksen tarkastelua varten pyrin aluksi selvittämään lyhyesti muutamia peruskäsitteitä.

Fraktaali on matemaattinen käsite, jolla tarkoitetaan objektia, jonka rakenteessa on yksityiskohtia mielivaltaisen pienissä mittakaavoissa. Mikäli käytettävissä olisi rajattomasti suurentava mikroskooppi, jonka avulla fraktaaleja voitaisiin tutkia, niiden rakenteessa havaittaisiin loputtomasti yksityiskohtia: säröjä, kulmia, mutkia, kiemuroita jne.

Benoit Mandelbrot otti sanan fraktaali käyttöön 1970-luvulla. Se juontaa juurensa latinankielisestä sanasta *fractus*, joka tarkoittaa murtunutta. Fraktaalien hienorakenteesta johtuen perinteiset geometrian työkalut eivät sovellu niiden tutkimiseen.

Ääretön käyrä

Tarkastellaan esimerkkinä erästä fraktaaliklassikkoa, von Kochin käyrää, joka on nimetty keksijänsä ruotsalaisen matemaatikon Helge von Kochin mukaan. Käyrän konstruktio aloitetaan janasta. Ensin janan keskeltä poistetaan kolmannes ja poistettu kolmannes korvataan tasasivuisen kolmion kahdella sivulla. Seuraavassa vaiheessa sama menettely toistetaan jokaisella edellisen vaiheen neljällä janalla. Jatkamalla näin loputtomasti tuloksena saadaan von Kochin käyrä. Tällaisen päättymättömän konstruktion tulosta on mahdotonta piirtää, mutta k:nnen vaiheen murtoviiva antaa siitä hyvän approksimaation suurilla k:n arvoilla.

Miten tämä joukko eroaa klassisen geometrian käsitteistä? Verrataan sitä vaikkapa puoliympyrän kaareen ja pyritään aluksi mittaamaan molempien pituudet. Puoliympyrän kaaren pituus voidaan mitata helposti. Mikäli ympyrän säde on yksi metri, kaaren pituus on likimain 3,14 metriä. Viiden metrin mittanauha riittää siis mainiosti kaaren mittaamiseen.

Kuinka pitkä mittanauha tarvitaan von Kochin käyrän pituuden mittaamiseen? Otetaan konstruktion lähtökohdaksi yhden metrin mittainen jana. Ensimmäisessä vaiheessa metrinmittaisen janan keskeltä poistetaan kolmannes ja se korvataan kahdella kolmasosametrin mittaisella janalla.

Yhteensä janoja on siis neljä kappaletta ja jokaisen pituus on $^1/_3$ metriä, joten ensimmäisessä vaiheessa murtoviivan kokonaispituudeksi saadaan $^4/_3$ metriä. Seuraavassa vaiheessa jokainen ensimmäisen vaiheen jana korvataan neljällä janalla, joiden pituus on kolmannesmetrin kolmannes eli $(^1/_3)^2$ metriä. Toisessa vaiheessa janoja on yhteensä 16 eli 4^2 kappaletta. Näin ollen toisen vaiheen murtoviivan pituudeksi saadaan $(^4/_3)^2$ metriä.

Tästä voidaan päätellä seuraava yleinen periaate: kaikille konstruktion vaiheille k murtoviivan pituuden lauseke on $(^4/_3)^k$ metriä. Von Kochin käyrän konstruktion jokaisessa vaiheessa murtoviivaan lisätään uusia mutkia. Näin ollen käyrän pituus on suurempi kuin minkä tahansa konstruktion vaiheen murtoviivan pituus. Ts. von Kochin käyrän pituus on suurempi kuin $(^4/_3)^k$ kaikilla k:n arvoilla.

Riittääkö siis viiden metrin mittanauha käyrän mittaamiseen?

Valitsemalla k:n arvoksi 6 nähdään, että käyrän pituus on suurempi kuin 5,6 metriä, joten viiden metrin mittanauha ei riitä. Entä 500 metrin mittanauha? Eipä riitä sekään, sillä k:n arvolla 22 saadaan pituudelle alaraja 560 metriä.

Mahtaako von Kochin käyrä yltää suoristettuna Helsingistä Jyväskylään? Kyllä vaan! Tämä huomataan valitsemalla k:lle arvoksi 45.

Otetaan aurinkokunta avuksi. Onko käyrä pidempi kuin maan ja kuun välinen etäisyys? Kyllä on! Tämä nähdään valitsemalla k:n arvoksi 70.

Näyttää siltä, että Kochin käyrän pituus on suurempi kuin mikä tahansa luku. Matematiikan kielelle käännettynä tämä tarkoittaa sitä, että käyrän pituus on ääretön.

Edellä todettiin, että ympyräkaaren pituus riippuu ympyrän säteestä. Mitä suurempi säde, sitä pitempi on ympyrän kaari. Von Kochin käyrä ei tällaista sääntöä noudata. Aloitetaanpa konstruktio minkä tahansa pituisesta janasta, saadaan tuloksena aina käyrä, jonka pituus on ääretön.

'Dimensio' tulee avuksi

Pituusmitta ei siis paljon kerro von Kochin käyrästä eikä siten sovellu sen kuvaamiseen.

Millaisella mitalla von Kochin käyrää sitten olisi mahdollista mitata? Fraktaalimatematiikassa oikean mitan valinta liittyy läheisesti dimension käsitteeseen. Dimensio on eräänlainen joukon kokoa mittaava parametri. Intuitiivisesti on selvää, että jana on yksiulotteinen, neliö on kaksiulotteinen ja kuutio kolmiulotteinen, ts. janan dimensio on yksi, neliön kaksi ja kuution kolme. Dimensio määrää sen mitan, jonka avulla joukkoa voidaan mitata. Janaa voidaan mitata 1-ulotteisella mitalla eli pituusmitalla. Kaksiulotteista neliötä mitataan 2-ulotteisella mitalla eli pinta-alamitalla, kun taas kuutiota mitattaessa valitaan 3-ulotteinen mitta eli tilavuusmitta.

Metrinmittaisen janan pituus on 1 metri. Neliö, jonka sivun pituus on 2 metriä, on pinta-alaltaan 4 neliömetriä. Ja jos kuution sivun pituus on 3 metriä, on sen tilavuus 27 kuutiometriä. Jokainen mittaustulos on siis nollaa suurempi luku.

Mitä näissä esimerkkitapauksissa käy, jos valitaan ulottuvuudeltaan väärä mitta? Mikä on esimerkiksi neliön tilavuus? Neliö voidaan tulkita kuutioksi, jonka korkeus on nolla. Koska kuution tilavuus saadaan kertomalla pohjan pinta-ala kuution korkeudella, saadaan neliön tilavuudeksi nolla. Vastaavasti janan pinta-ala ja tilavuus ovat nollia.

Entä mikä on kuution 1-ulotteinen mitta eli pituus? Käytetään pituuden mittaamiseen mittanauhaa, jota tungetaan kuution sisään. Mitä ohuempi mittanauha on, sitä enemmän sitä mahtuu kuution sisään. Erityisesti äärettömän ohutta mittanauhaa voidaan laittaa kuution sisään äärettömän paljon ja näin ollen kuution pituudeksi saadaan ääretön. Vastaavasti nähdään, että kuution pinta-ala ja neliön pituus ovat myös äärettömiä. Ulottuvuudeltaan oikea mitta antaa siis kaikissa näissä esimerkeissä vastaukseksi positiivisen luvun.

Mitta, jonka ulottuvuus on suurempi kuin tutkittavan joukon dimensio, antaa tulokseksi nollan, kun taas mitta, joka on ulottuvuudeltaan tutkittavaa joukkoa pienempi, antaa vastaukseksi äärettömän.

Aikaisemmin todettiin, että von Kochin käyrän pituus on ääretön. Käyrän pinta-ala on myös helposti laskettavissa ja se osoittautuu nollaksi. Tämän tulkinnan mukaan pituus ja pinta-ala eivät sovellu käyrän mittaamiseen, koska ne ovat ulottuvuudeltaan vääränsuuruisia mittoja. Osoittautuukin, että von Kochin käyrän dimensio on suurempi kuin yksi ja pienempi kuin kaksi. Tämä voidaan tulkita siten, että käyrä on janaa suurempi joukko, mutta neliötä pienempi.

Käyrän dimension tarkan arvon laskeminen ei kuitenkaan ole aivan suoraviivaista. Fraktaalidimensiota laskettaessa joukkoa mitataan siten, että tiettyä kokoa pienemmät epäsäännöllisyydet jätetään aluksi huomioimatta. Tämän jälkeen näiden mittaustulosten käyttäytymistä tarkastellaan, kun fraktaalin hienorakennetta huomioidaan yhä tarkemmin ja tarkemmin. Tämä voidaan muuttaa matemaattiseksi lausekkeeksi, josta laskemalla saadaan janalle, neliölle ja kuutiolle juuri ne dimensioiden arvot, jotka vastaavat mielikuvaa.

Von Kochin käyrän dimension arvoksi saadaan likimain 1,26. Käyrän dimensio ei siis ole kokonaisluku. Vastaavasti, kuten janan, neliön ja kuution tapauksissa, on olemassa 1,26-ulotteinen mitta, joka antaa von Kochin käyrän mitaksi nollaa suuremman luvun ja vieläpä niin, että mitan arvo on sitä suurempi mitä pidempi jana otetaan käyrän konstruktion lähtökohdaksi.

Pidättekö fraktaalimatematiikasta?

Fraktaalimatematiikan pikakurssi on suoritettu ja voimme palata kysymykseen ”Pidättekö fraktaalimatematiikasta?" Kysymyksen arviointiperusteet riippuvat siitä, onko vastaaja soveltava matemaatikko vai ei.

Matematiikka voidaan karkeasti jakaa kahteen osaan: puhtaaseen ja soveltavaan. Annetaan jälleen Sibeliuksen musiikin tahdittaa näiden käsitteiden analysointia. Jotkut pitävät Sibeliuksen musiikista. Joillekin se ei ole kalanmaksaöljyä kummempaa. Ambulanssin hälytysääni on puolestaan hyödyllinen, mutta luultavasti se ei monia inspiroi taiteellisella kauneudellaan. Sibeliuksen musiikkia lienee mahdotonta arvioida sen hyödyllisyyden perusteella eikä hälytysäänen leimaaminen huonoksi taiteeksi ole oikeudenmukaista. Arviointikriteerit ovat siis erilaiset, mikä on myös puhtaan ja sovelletun matematiikan oleellinen ero.

Tällä vertauksella en suinkaan tarkoita sitä, että puhdas matematiikka on taidetta ja soveltava matematiikka pelastaa ihmishenkiä, vaan sitä, että soveltavassa matematiikassa matematiikka on työkalu, jonka avulla pyritään ratkaisemaan esimerkiksi luonnontieteisiin, taloustieteeseen tai lääketieteeseen liittyviä ongelmia, kun taas puhdas matematiikka on matematiikkaa matematiikan vuoksi. Siinä ongelmat ammennetaan usein matematiikan sisältä. Tämä johtaa yhä abstraktimpiin matemaattisiin teorioihin, joilla on yhä vähemmän yhteyksiä arkipäivän kokemuksiin ja sovelluksiin.

Fraktaalimatematiikkaa arvioidessaan soveltava matemaatikko korostanee ensisijaisesti sitä, kuinka hyvin sen avulla voidaan kuvata tutkittavaa ilmiötä tai laatia siitä ennusteita. Monissa sovelluksissa klassisen geometrian käsitteet riittävät. Esimerkiksi planeettojen liikeratoja voidaan approksimoida ellipsien avulla, vaikka liikeradat eivät aivan tarkasti ellipsejä vastaakaan. Mutta entä jos halutaan kuvata vaikkapa pilven reunaa tai taivaan rannalla näkyvää metsän rajaa? Pilvet eivät ole palloja eikä metsän raja ole suora. Joskus tällaisia lukuisia pieniä yksityiskohtia sisältäviä rakenteita tai ilmiöitä tutkittaessa sovelletaan fraktaalimatematiikkaa. Esimerkkinä mainittakoon liikenneruuhkien, topografisten pintojen ja alueellisten sademäärien mallintaminen.

Joissakin tilanteissa fraktaalimatematiikka on parempi työkalu kuin joissakin toisissa. Se ei siis ole ihmeitä tekevä monitoimikone, jonka kapasiteetti on rajaton. Koska soveltavalle matemaatikolle matematiikan kauneus tarkoittaa sen toimivuutta työkaluna, on fraktaalimatematiikka joko kaunista tai kauheaa – riippuen siitä, millaisen ongelman sen avulla haluaa taltuttaa. Onhan kirveskin kauhistus, mikäli tavoitteena on fileoida ahven, mutta halkojen hakkaamiseen se käy mainiosti!

Pieleen meni, Poincaré!

Siirrytään lopuksi puhtaaseen matematiikkaan ja 1800-luvun loppupuolelle. Tuolloin konstruoitiin matematiikan historian ensimmäiset fraktaalit – tosin tätä nimitystä niistä ei vielä silloin käytetty.

Näiden konstruktioiden tarkoituksena oli osoittaa vääriksi joitakin aiemmin totena pidettyjä matemaattisia uskomuksia ja aluksi niitä pidettiin lähinnä kiusallisina erikoistapauksina. Vähitellen yksittäisistä esimerkeistä rakentui matematiikan kauhugalleria, kun osoittautui, että epäsäännölliset poikkeukset olivatkin luultua yleisempiä. 1800-luvun vaikutusvaltaisimpiin ranskalaisiin matemaatikoihin kuuluva Charles Hermite kuvasi tätä kehitystä "valitettavaksi rutoksi", jolle hän käänsi selkänsä "pelon ja kauhun sekaisin tuntein".

Hermite ei jäänyt yksin taistelemaan ruttoa vastaa. Annettaessa tuon ajan matemaatikoille mahdollisuus valita kalanmaksaöljyn ja fraktaalimatematiikan välillä kalanmaksaöljylle löytyi paljon kannattajia. Esimerkiksi Henri Poincaré kirjoitti huolestuneena:

> "Aikaisemmin uusi funktio keksittiin johonkin käytännön tarpeeseen; tänään niitä keksitään nimenomaan siksi, että niillä voidaan osoittaa edeltäjiemme ajattelun puutteet eikä niistä koskaan saada johdetuksi mitään muuta."

Pieleen meni, Poincaré! Vastustuksesta huolimatta epätavallisten erikoistapausten tutkimus kehittyi erääksi 1900-luvun yleisimmäksi matemaattiseksi teoriaksi, mitta- ja integraaliteoriaksi. Ja juuri tässä teoriassa ovat fraktaalimatematiikan juuret.

Ovatko fraktaalit siis matematiikan kaunistus vai kauhistus? Mitä tahansa matematiikan kauneudella tarkoitetaankaan, alkutaipaleellaan 1800-luvun lopulla fraktaalit olivat monelle kauhistus. Uudet ajatukset, joista loppujen lopuksi kehittyi matemaattisia peruskäsitteitä, leimattiin aluksi merkityksettömiksi ja jopa vaarallisiksi. Nyt yli 100 vuotta myöhemmin on tietenkin helppoa jälkiviisastella – onhan matematiikan kehitys osoittanut varhaiset pelot turhiksi.

Kauneuskriteerit ja digitaalinen aurinkokello

Matematiikkaa pidetään usein luotaantyöntävänä tieteenalana. ”Mieluummin vaikka kalanmaksaöljyä kuin minkään sortin matematiikkaa” lienee monen maallikon motto. Mitä siis ylipäätään tarkoitetaan puhtaan matematiikan kauneudella? Mielestäni se on tapa yhdistellä ideoita matemaattisten lainalaisuuksien löytämiseksi.

Matemaattinen tulos on kaunis, kun se kokoaa hajallaan olevat palapelin palat yhteen, vaikka alunperin näytti siltä, etteivät palat välttämättä edes kuulu samaan palapeliin.

Nämä kauneuskriteerit täyttyvät esimerkiksi seuraavassa fraktaalimatematiikan tuloksessa. Tavoitteena on löytää ikivanhan ajanmittarin – aurinkokellon – digitaalinen vastine. Yksinkertainen aurinkokello on helposti tehty: maahan upotetun kepin varjo kertoo kellon ajan. Digitaalista aurinkokelloa varten keppi korvataan esineellä, jonka varjo tiettynä ajanhetkenä näyttää kyseisen ajan digitaalisesti. Onko tällaista objektia olemassa? Vastaus on myönteinen, mikäli sallitaan, että digitaalisen aurinkokellon näyttöruudulla saa näkyä lisäksi hyvin pieniä häiriöitä.

Digitaalisen aurinkokellon rakentamisessa taikasana on fraktaali. Aurinkokellon keppi korvataan fraktaalilla, joka muistuttaa sälekaihdinta, jossa eri asennoissa olevia säleitä on äärettömän paljon ja niistä kukin muodostaa varjoja eri tavoin. Konstruktio on mutkikas ja se tehdään äärettömän monen vaiheen kautta kuten von Kochin käyräkin. Digitaalinen aurinkokello on siis matemaattinen objekti, jota ei ole konkreettisesti mahdollista rakentaa. Ainakaan vielä.

Konstruktio on peräisin skotlantilaiselta matemaatikolta Kenneth Falconerilta 1980-luvulta. Samaa ideaa on myöhemmin sovellettu myös muilla matematiikan alueilla ja se on osoittautunut mainioksi avuksi matemaattisen palapelin rakentajille. Se täyttää näin ollen edellä mainitsemani kauneuskriteerit.

Yleisesti hyväksyttyjä esteettisiä ohjenuoria ei matematiikassa kuitenkaan ole. Loppujen lopuksi fraktaalimatematiikan kauneus ja kauheus ovat siis katsojan silmissä.

KIRJALLISUUTTA

Falconer, K. J. (1987): ”Digital Sundials, Paradoxical Sets, and Vitushkin’s Conjecture”. *The Mathematical Intelligencer* Vol 9, No. 1, 1987.

Boyer, C. B. (1994): *Tieteiden kuningatar*. Suom. Kimmo Pietiläinen, Art House, 1994

Kirjoittaja on akatemiatutkija ja dosentti Jyväskylän yliopiston matematiikan laitoksella. Kirjoitus perustuu esitelmään Tieteen päivillä 8.–12.1.2003.
amj@maths.jyu.fi