

# Matematiikka, koulumatematiikka ja didaktinen matematiikka

Timo Tossavainen ja Tuomas Sorvali

Uudesta matematiikasta luopumisen jälkeen koulumatematiikalla ja varsinaisella matematiikalla on ollut entistä vähemmän tekemistä keskenään. Siksi perinteisen matematiikan arvosanan suorittaminen ei anna opettajaksi valmistuvalle parasta mahdollista teoreettista pohjaa toimia matematiikanopettajana peruskoulussa. Tämän ongelman – ja ennustetun matemaattisten aineiden opettajapulan – tiedosta neet yliopistot ovat tilanteen parantamiseksi ryhtyneet 1990-luvulta lähtien järjestämään ns. didaktisen matematiikan kursseja.

Vaikka didaktisesta matematiikasta puhutaan siis jo varsin yleisesti matematiikan opettajan koulutuksen yhteydessä, tämän käsitteen sisältöä ei ole tähän mennessä missään julkisesti pohdittu saati määritelty kunnolla. Tässä artikkelissa pyritään hahmottelemaan, millaisesta matematiikasta – tai näkökulmasta siihen – didaktisessa matematiikassa voisi olla kysymys.

## Mitä matematiikka on?

Pakinoitsija *Ollin* kokoelmassa *Pisteet lopussa* on tunnettu sanakirjasepitemä [1]:

F. *Fonografi* (katso gramofoni).

G. *Gramofoni* (katso fonografi).

Tämä hassuttelu muuttuu todellisuudeksi, kun ryhdytään selvittämään sanan matematiikka merkitystä. *Nykysuomen sanakirjan* mukaan *matematiikka* on oppi suureista ja niiden keskinäisistä suhteista. *Suure* taas puolestaan selitetään matemaattisen tutkimuksen kohteiden yleisnimitykseksi. Kun nämä määritelmät yhdistetään, havaitaan että *matematiikka on oppi matemaattisen tutkimuksen kohteista ja niiden keskinäisistä suhteista* [2].

*Nykysuomen sanakirja* siis määrittelee matematiikan sen itsensä avulla. Onko kyseessä pelkäs-

tään tämän sanakirjan lipsahdus, vai johtavatko kaikki matematiikan määrittely-yritykset kehämääritelmään?

Matemaattisesti hyvin valistunut kulttuurifilosofi *Oswald Spengler* käsittelee kuuluisassa teoksessaan *Länsimaiden perikato* myös matematiikkaa ja sen yhteyksiä kulttuurien kehitykseen. Pohdittuaan matematiikan erilaisia ilmenemismuotoja hän jatkaa:

”Edellä mainitusta seuraa eräs ratkaiseva tosiasia, joka on pysynyt tähän asti jopa matemaatikoilta salassa. Jos matematiikka olisi pelkkää tiedettä, kuten astronomia tai mineralogia, sen kohde olisi määriteltävissä. Ei ole mitään matematiikkaa, on vain matematiikkoja” [3].

Matematiikan luokittelu on ongelmallista. Edes matemaattiseksi tunnistetun asiakokonaisuuden jakaminen (puhtaaseen) matematiikkaan ja sovellettuun matematiikkaan ei onnistu yksiselitteisellä tavalla, vaan ”jokaisella matemaatikolla on oma käsityksensä siitä, mikä matematiikka on ’puhdasta’ ja mikä ei. Tästä aiheesta voidaan siten esim. yliopistojen hallintoelimissä käydä loputonta kiistaa” [4].

On mahdollista puhua järkevässä mielessä esimerkiksi diskreetistä matematiikasta tai analyyisistä. Lisäksi jokainen matemaatikko voi tunnistaa, kuuluuko tarkasteltavana oleva matemaattinen kokonaisuus jompaan kumpaan alaan. Matematiikan jakaminen alaluokkiin on kuitenkin harhaanjohtavaa, sillä usein matemaattisten ongelmien ratkaiseminen voi edellyttää sekä puhtaan että sovelletun matematiikan tai sekä analyysin että diskreetin matematiikan käyttöä. Lisäksi menneisyydessä matematiikalla on ymmärretty aivan eri asiaa kuin nyt, ja tulevaisuuden matematiikka voi olla taas jotakin muuta.

On siis luovuttava matematiikan määrittelyyrityksistä ja tyydyttävä toteamaan, että matematiikka on ihmismielen määrittelemätön perus-

piirre. Onkin tapana sanoa, että matematiikkaa on kaikki se, mitä matemaatikot tekevät.

Matematiikkaa on jossain muodossa ilmennyt niin kauan kuin ihmisiä on ollut olemassa. Vanhimmat matematiikkaan liittyvät arkeologiset löydöt ovat ainakin monia tuhansia, ehkäpä kymmeniä tuhansia vuosia vanhoja. Matematiikkaa pidetään hyvin universaalina, mutta onkohan ihmisten luoma matematiikka kuitenkin vain ihmisille ymmärrettävää? Joskus esitettiin ajatus, että marsilaisiin yritettäisiin ottaa yhteyttä rakentamalla Saharaan suunnattoman suuri valaistu Pythagoraa lausetta esittävä kuvio. Ajateltiin, että marsilaiset ovat ilman muuta kiinnostuneita geometriasta, jos ovat pystyneet luomaan korkean kulttuurin. Ihminen ei siis kuvittele pelkästään jumaliaan, vaan myös universumin mahdolliset muut asukkaat itsensä kaltaisiksi.

### *Muuttuva koulumatematiikka*

Matematiikka on koulussa äidinkielen ohella keskeisimpiä oppiaineita. Matematiikan opiskelun katsotaan olevan lapsille ja nuorille välttämättöntä, vaikka koulussa opetettavan matematiikan sisällöt eivät aina tunnu vastaavan odotuksia. Kun peruskouluun siirryttäessä 1960- ja 1970-luvulla yritettiin samalla toteuttaa myös matematiikan opetuksen kokonaisuudistus, nousi sitä vastustamaan voimakas kansanliike. Harva kouluun liittyvä asia on pystynyt nostattamaan samanlaisia intohimoja kuin tämä uuden matematiikan nimellä tunnettu hanke. Uudistuksesta oli luovuttava ja palattava vanhaan, kansakoulusta tuttuun laskentoon. Koulumatematiikkaan kaajoaminen tuntui siis loukkaavan ihmisten sisimpiä tunteja.

Spengleriä mukaillen voitaisiin ehkä sanoa, että ei ole mitään koulumatematiikkaa, on vain matematiikanopettajia. Koulumatematiikkaa on siis kaikki se, mitä matematiikan tunneilla tehdään. Jokainen innokas matematiikanopettaja pitää omaa opetustaan esimerkiksi kelpaavana. Kuitenkin se, mikä sopii yhdelle opettajalle, saattaa olla täysin soveltumaton toiselle. Juuri matematiikan opetuksessa pitäisi antaa kaikkien kukkien kukkia. Ennen kaikkea on huomattava, ettei ole mitään ajasta ja paikasta riippumattomia koulumatematiikan sisältöjä. Erikoisesti ei ole mitään syytä olettaa, että esimerkiksi 1900-luvun alun koulumatematiikka olisi ollenkaan sopivaa 2000-luvulla.

Turkuun perustettiin yliopisto vuonna 1640. Yliopiston tehtävänä oli kasvattaa taitavia virka-

miehiä valtion ja kirkon palvelukseen. Luterilaisen oikeaoppisuuden aikana yliopistossa annettu opetus tähtäsi ensisijaisesti puhdasta uskoa puolustamaan kykenevien pappien kouluttamiseen. Pappiskoulutukseen katsottiin kuuluvan sellaisten tähtitieteellisten laskutekniikkojen hallitseminen, joiden avulla syrjäiselläkin paikkakunnalla toimiva pappi pystyi määrittämään paaston alun eli laskiaisen, pääsiäisen ja muiden liikkuvien pyhien ajankohdat. Tätä varten Turun Akatemiassa toimi heti alusta alkaen matematiikan professori.

Kirjapainotaidon kehittyminen ja almanakkojen julkaiseminen olivat jo jonkin aikaa sitten tehneet tämän teknistä laatua olevan taitotiedon käytännön kannalta tarpeettomaksi. Kuitenkin matematiikan professori *Simon Kexlerus* pani opetustyössään paljon painoa näiden tekniikkojen opettamiselle, ja hän pahoitteli, että almanakkojen myötä matematiikan harrastus oli pahasti taantunut. Kexleruksen antaman varoittavan esimerkin mukaisesti pitäisikin koko ajan tarkkaillla, korostetaanko matematiikan opetuksessa ylen määrin asioita, jotka uudet olosuhteet ovat jo syrjäyttäneet [5].

### *Millaista laskutaitoa nykyisin tarvitaan?*

Vielä muutama vuosikymmen sitten monet käytännön ammatit edellyttivät hyvää laskutaitoa. Kynällä ja paperilla jouduttiin suorittamaan runsaasti vaikeitakin laskutehtäviä. Esimerkiksi kauppiaan piti käsin laskea jokaisen asiakkaan ostosten yhteishinta. Nyt ei kukaan laske käsin enää mitään, päivittäistavaroiden hinnoittelu tapahtuu kaupassa täysin automaattisesti. Laskimien ja tietokoneiden kehitys on siis tehnyt puhtaasti teknistä laatua olevan laskutaidon käytännön kannalta tarpeettomaksi. Kuitenkin kouluopetuksessa pannaan ylen määrin painoa juuri mekaaniseen laskennon opetteluun. Varmasti Simon Kexlerusta huvittaa haudassaan seurata tilannetta.

Uuden matematiikan vastustus perustui väitteeseen, etteivät lapset enää opi koulussa laskemaan. Kukaan uudistuksen puoltajista ei rohjennut kysyä, miksi lasten sitten pitäisi oppia laskemaan. Mekaaninen laskutaito on todella tullut käytännön kannalta tarpeettomaksi. Nähtäväksi jää, miten kauan aikaa kuluu, ennen kuin tämä tosiasia yleisesti tunnustetaan.

Dosentti George Malaty toteaa kirjassaan *Johdatus matematiikan rakenteeseen*, että juuri laskemisen osaamisen korostaminen on tuonut ongelmia

matematiikan opetukseen, erityisesti matematiikan rakenteen hahmottamiseen. Tämän seurauksena voi jopa helppojen laskutehtävienkin ratkaiseminen olla hankalaa, kun laskija toimii mekaanisesti, noudattaa oppimiaan sääntöjä koneellisesti, eikä pysty löytämään tehtävään parhaiten soveltuvaa laskujärjestystä. Laskentopainotteinen matematiikan opetus ei siis enää palvele sen enempää arkipäivän kuin jatko-opintojenkaan tarpeita.

Kun mekaaniseen laskutaitoon ei enää tarvitsisi keskittyä, voitaisiin matematiikan tunnit käyttää tätä hyödyllisempien asioiden opetteluun. Nykykoulussa opittu mekaaninen laskutaito soveltuisi hyvin 1950-luvun sekatarvarakaupan myyjälle, mutta on lähes hyödytön nopeita suuruusluokka-arvioita vaativissa tilanteissa. Euroihin on totuteltu pari vuotta, mutta suomalaisten enemmistön rahantaju ei ole palannut ennalleen [6]. Kymmenen tai kaksikymmentä euroa heittää menemään helpommin kuin ennen viisikymmentä tai sata markkaa. Tasarahatarjouksena olevista kahvista ja pullasta saatetaan maksaa kymppi ja uusista perunoista torilla yhtä monta euroa kuin ennen markkaa. Erityisen sokeita tunnutaan olevan kolikoiden arvolle. Niihin suhtaudutaan kuin penneihin. Onko sitten ihme, jos rahat eivät enää tunnu riittävän yhtä hyvin kuin ennen?

Tällaisten ongelmien syytä voidaan etsiä epäonnistuneesta laskennon opetuksesta. Pelkkä kuuden kertotaulu ei riitä, kun pitäisi nopeasti hahmottaa eurohintojen suuruusluokka. Ei hyödytä mitään, vaikka osattaisiin kuinka hyvin tahansa suorittaa mekaanisia laskuja kynällä ja paperilla.

### *Didaktisen matematiikan ilmestyminen*

Sanapari *didaktinen matematiikka* esiintyy ainakin Joensuun, Jyväskylän, Tampereen ja Lapin yliopistojen järjestämien arvosanakoulutusten tai näihin sisältyvien kurssien nimissä. Mielenkiintoista on, että eräissä Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksen virantäyttösuunnitelmissa kuvataan laitoksen tehtäviä seuraavasti: ”Uusia (matematiikan) tutkimuksen kehittämisalueita laitoksella ovat ... ja didaktinen matematiikka” [7].

Didaktinen matematiikka ilmestyi akateemiseen kielenkäyttöön viime vuosikymmenen aikana ikään kuin varkain, lähinnä LUMA-talkoisiin liittyneiden opettajille suunnattujen matematiikan poikkeus- ja täydennyskoulutusten kauppal-

listen nimien kautta. Käytännössä didaktisella matematiikalla tarkoitettiin aluksi siis lähinnä luokanopettajiksi opiskeleville tai jo valmistuneille luokanopettajille varta vasten räätälöityjä matematiikan kursseja, joita matematiikan laitokset järjestivät muun opetuksensa ohessa.

Tällaisesta alkutilanteesta on viime vuosina kuitenkin edetty jo varsin pitkälle, kuten Jyväskylän yliopiston virantäyttösuunnitelmien sanamuodot ja vuonna 2002 Joensuun yliopistossa järjestetty didaktisen matematiikan väitös [8] osoittavat. Luonnehdintaa [9] lukuun ottamatta kuitenkin missään ei liene julkisesti pohdittu, mitä didaktisella matematiikalla lopulta ymmärretään, vaikka ainakin hallinnollinen tarve didaktisen matematiikan määrittelemiselle on jo olemassa. Toisaalta fysiikan opetuksen kehittämiseksi syntynyt *didaktinen fysiikka* on jo julistettu omaksi tieteenalaksi [10].

Universaalia didaktista matematiikkaa lienee olemassa yhtä vähän kuin on olemassa ajasta ja paikasta riippumatonta matematiikkaa. Tällöin myöskään mikään yritys määritellä didaktista matematiikkaa normiluonteisesti ei johda yhtä aikaa sekä riittävän kattavaan että riittävän yksityiskohtaiseen määritelmään. Tämän takia didaktinen matematiikka lienee parhaiten kuvailtavissa näkökulmana matematiikkaan tai tapana tehdä matematiikkaa. Tämä on yhteensopivaa sen ajatuksen kanssa, että matematiikka voidaan ymmärtää pikemminkin taidoksi tehdä jotakin kuin tiedoksi jostakin. Kexleruksen aikaan pidettiin tarkoin erossa kaksi oppineisuuden muotoa, joista toinen oli *ars*, *taito* tai *taide*, ja toinen *scientia*, *tiede* tai *tieteellinen tieto*. Matematiikka oli silloin *ars*, silloinen fysiikka taas *scientia* [11].

### *Matematiikan opettajankoulutuksessa tulisi keskittyä perusasioihin*

Koulumatematiikkaan kuuluu yksinkertaisten reaali-lukuyhtälöiden ratkaisua. Perinteisillä analyysin kursseilla on tuleville matematiikanopettajille selvitetty, että yhtälöiden ratkaisuprosessin perinpohjainen ymmärtäminen edellyttää aksiomaattisen lähestymistavan noudattamista. Yleensä analyysin peruskurssien harjoitustehtävänä tai luennoilla näytetäänkin, kuinka esim. yhtälöillä

$$(1) \quad a+x=b \quad \text{ja} \quad ax=b, \quad \text{missä} \quad a \neq 0$$

on yksikäsitteiset ratkaisut kunnassa.

Analyysin ja myös algebran kursseilla paljon vähemmälle huomiolle jää kuitenkin joukko lähes yhtä yksinkertaisia yhtälöitä. Esimerkiksi kuinka yhtälö

$$(2) \quad x+x=1$$

ratkaistaan? Ongelma vaikuttaa ensisilmäykseltä helpolta, sillä lähes jokainen opiskelija ehdottaa tämän yhtälön yksikäsitteiseksi ratkaisuksi, aivan oikein, puolikasta eli kakkosen käänteisal-kiota.

Tarkemmin asiaa tutkittaessa kuitenkin osoitetaan, että kyse on yhtälöihin (1) nähden aivan toisentasoisesta ongelmasta, sillä esimerkkien avulla on helppoa näyttää, että on olemassa kuntia, joissa yhtälöllä (2) on yksikäsitteinen ratkaisu, ja kuntia, joissa sillä ei ole ratkaisua. Reaalilukujen tapauksessa on siis pääteltävissä, että (täydellisyysaksiooman poissulkemisen jälkeen) asian on liityttävä jollakin epätriviaalilla tavalla järjestysaksioomiin – vaikka kyseessä ei ole epäyhtälön ratkaiseminen!

Algebran ammattilaisille edellä kuvatussa ei tietenkään ole mitään uutta, eivätkä matemaatikot yleensäkään ole kiinnostuneita näin alkeellisten yhtälöiden ratkaisemisesta. Tästä on seurannut se, ettei perinteisillä matematiikan kursseilla käytännössä ole jäänyt aikaa tällaisten kysymysten läpikäymiseen.

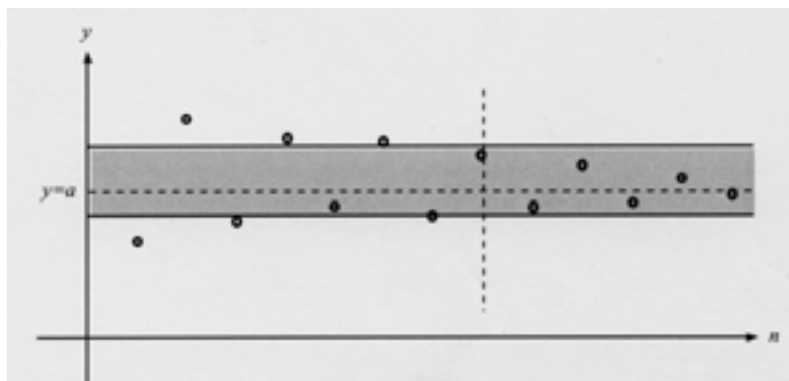
Matematiikanopettajan kannalta kyse on kuitenkin mitä mielenkiintoisimmasta asiasta. Di-

daktista matematiikkaa voisikin olla juuri sellainen toiminta, jossa keskitytään selvittämään jo kauan sitten vakiintuneiden matematiikan perusteorioiden keskeisten käsitteiden ja määritelmien välisiä enemmän tai vähemmän ilmeisiä yhteyksiä, erityisesti sellaisissa kysymyksissä, jotka liittyvät tavalla tai toisella matematiikan opettamiseen koulussa. Vaikka näihin kysymyksiin syventyminen ei tuottaisikaan uutta merkittävää matematiikkaa, se voi hyvinkin lisätä sellaista matematiikan rakenteiden ymmärtämystä, joka edistää huomattavasti matematiikan didaktiikan tieteellistä tutkimusta.

### *Matematiikkaa on olemassa myös ilman calculusta*

Millaista matematiikkaa voidaan harjoittaa kunnon piirtämällä, soittamalla tai muulla havainnollisella tavalla? Toisin sanoen missä määrin matematiikkaa on mahdollista ymmärtää ilman hyvää laskutaitoa?

Esimerkiksi yhden muuttujan reaalianalyysin rajankäyntiprosesseja voidaan hyvin havainnollistaa ns. viipalekuvioiden avulla: jonolla  $x_n$  on raja-arvo  $a$ , jos ja vain jos ko. jonon kuvalla on se ominaisuus, että minkä tahansa vaakasuoran viipaleen eli kahden horisontaalisen suoran välisen alueen, joka sisältää myös suoran  $y=a$ , ulkopuolelle jää vain äärellinen määrä jonon alkioita.



Piirroksen avulla ei tietenkään voida konkreettisesti näyttää jonon koko loppuosaa. Silti kuvan avulla voidaan paljon pelkkää puhetta tai kirjoitettua tekstiä helpommin kertoa, mistä jonon raja-arvon määritelmässä on todella kysymys. Tämän lähestymistavan avulla voidaan kätevästi siirtyä jonojen raja-arvojen tarkastelusta funk-

tioiden raja-arvotarkasteluun ja päinvastoin. Myös jatkuvien funktioiden laskusääntöjen ja peruslauseiden tarkastelut voidaan suorittaa varsin yksityiskohtaisesti pelkästään suorakulmioiden, viipaleiden ja reaalilukujen täydellisyysaksiooman avulla [12].

Kun määritelmien ja kuvioiden välinen yhteys ymmärretään kunnolla, paljastuu ettei kuvioajattelussa ole kyse matemaattisesta täsmällisyydestä tai sen abstraktiudesta luopumisesta. Kokemuksemme valossa vaikuttaa myös siltä, että kuvioajattelu auttaa opiskelijoita motivoitumaan entistä paremmin perinteisen,  $\epsilon$ - $\delta$ -tekniikan oppimiseen. Vaikka perinteisessäkin matematiikan opetuksessa on käytetty havainnollistavia kuvia, matemaattisen ajattelun ilmaisemista ilman laskukaavoja ei ole vielä tutkittu tarpeeksi. Jos ajatellaan, mikä rooli animaatioilla on jo nyt esim. kemiassa molekyyli-tason rakenteiden tutkimuksessa, ei liene mahdotonta kuvitella tulevaisuutta, jossa mm. tietokoneohjelmien kehittymisen myötä myös osa matematiikan tutkimuksesta muuttuu entistä visuaalisemmaksi toiminnaksi.

### *Matematiikka on kieli*

Sekä Spenglerin että nykyajan konstruktivistien käsitysten kanssa yhteensopivaa on sanoa, ettei matematiikan opiskelijankaan kannalta matematiikka ole mikään muuttumaton valmiiksi olemassa oleva objekti vaan hänen ajatustensa muodostama kokonaisuus, joka syntyy ja muuntuu sitä mukaa kun hän kykenee itse luomaan symbolit ja kielen näiden ajatusten ilmaisemiseksi. Se, että matemaatikot ja matematiikan opiskelijat kykenevät kommunikoimaan keskenään, perustuu lähinnä oppikirjoiden ja opettajien kautta opiskelijoille periytyvään epämääräiseen sopimukseen yhteisten symbolien ja sanojen käytöstä. Tällainen sopimus ei tietenkään voi olla missään mielessä universaali, mikä paljastuu jo toteamalla, kuinka eri tavoilla samoja ajatusrakenteita esitetään puhtaassa ja sovelletussa matematiikassa.

Koulumatematiikan lähtökohta on tähän mennessä ollut edelliselle lähinnä päinvastainen. Sekä koululaisten että heidän opettajiensa matematiikkakuvaa tutkittaessa on paljastunut, että useimmille heistä matematiikka on jotain valmiina annettavaa, ja oppijan tehtävänä on omaksua se sellaisenaan. Tämä käsitys on löydettävissä myös monista matematiikan didaktiikan alaan kuuluvista esityksistä, siitäkin huolimatta, että ongelmanratkaisu ja (heikko) konstruktivismi ovat näissä usein käytettyjä käsitteitä [13].

Didaktisen matematiikan kolmantena tehtävänä voidaan pitää matematiikan ja sen opettamisen tarkastelemista ja tutkimista siitä näkökulmasta, että matematiikka on elävä ja muuttuva kieli. Matematiikka on siis jotakin, jota puhutaan ja kirjoitetaan, eikä jokin, johon viitataan. Tämän

näkökulman vähättely johtaa helposti huolimattomaan matemaattiseen kielenkäyttöön, mikä puolestaan ei voi olla vaikuttamatta esimerkiksi siihen, kuinka kommunikointi opettajan ja oppilaan välillä onnistuu. Matematiikan oppimisvaikeuksien tutkimuksessa on tähän ongelmaan painauduttu vain vähän.

Polynomi- ja rationaalilausekkeiden sievennyssääntöjä harjoiteltaessa voidaan huomata, kuinka sievennysoperaatioiden järjestyksen valitseminen vaikuttaa mm. etumerkkivirheiden esiintymistodennäköisyyteen lausekkeita yhdistettäessä. Jos tullaan entistä tietoisemmaksi siitä, mitä todella tarkoitetaan kirjoitettaessa näkyviin sievennyksen eri välivaiheita, tullaan entistä tietoisemmaksi myös niistä ratkaisustrategioista, jotka johtavat turvallisimmin oikeaan lopputulokseen. Jo tällaisen näkökulman omaksuminen muuttaa ulkoisesti entisenlaisena pysyvän koulumatematiikan mekaanisesta ja itsetarkoitteellisesti toiminnasta ajattelua edistäväksi yleishyödylliseksi matematiikaksi.

### *Didaktinen matematiikka: siis mitä?*

Viime vuosina matematiikan kouluopetus on muuttunut dramaattisesti. Uudet teknologiat ovat tulleet käyttöön, opetussuunnitelmat ovat saaneet uuden luonteen ja opetuksen tavoitteita ja yhteiskunnallista merkittävyyttä on arvioitu uudelleen. Vanhemmat, kouluviranomaiset ja poliitikot odottavat matematiikanopettajilta paljon entistä suurempaa joustavuutta ja taitavuutta monenmoisista, jopa keskenään ristiriitaisista tavoitteista ja paineista selviytymisessä. Tilanne on samantapainen kaikilla koulutuksen tasoilla, paitsi että matematiikan opetus yliopistojen matematiikan laitoksilla on säilynyt suhteellisen muuttumattomana. Tieteellinen matematiikka ei näet ole perusluonteeltaan muuttunut ollenkaan samassa määrin eikä samaan suuntaan kuin yleissivistävän koulun tai matematiikkaa soveltavien alojen tarpeet ja odotukset.

Matematiikan aineenopettajakoulutuksessa sekä luokanopettajien erikoistumisopinnoissa ja täydennyskoulutuksissa on eri yliopistoissa havaittu olevan tarpeellista kehittää sisällöiltään normaalista tieteellisestä matematiikan peruskoulutuksesta eroavia kursseja. Tämä kehitystyö on muuttunut systemaattiseksi ja organisoiduksi toiminnaksi, ja siihen liittyvä tieteellinen tutkimus on käynnistymässä. Näin muodostuvaa uutta akateemista opinalaa on ryhdytty kutsumaan *didaktiseksi matematiikaksi*.



Didaktinen matematiikka on silta matematiikan ja kasvatustieteellisen tutkimuksen välillä. Siinä tarkastellaan matematiikkaa kehittyvänä ja muuntuvana tieteenalana, joka on luotu ratkaisemaan erilaisia ongelmia eri kulttuureissa eri aikakausina. Didaktisessa matematiikassa korostetaan, ettei ole mitään ajasta ja paikasta riippumatonta matematiikkaa eikä myöskään mitään pysyviä, ulkopäin annettuja, kertakaikkisia koulu-matematiikan sisältöjä. Tämän katsontatavan toivotaan rohkaisevan matematiikan didaktiikan tieteellistä tutkimusta suuntautumaan entistä enemmän opetuksen sisältöjen pohdintaan, erityisesti kyseenalaistamaan itsestään selvänä pidetty mekaanisten laskutaitojen keskeisyys opetuksessa.

Didaktisessa matematiikassa selvitetään matematiikan perusteorioiden välisiä yksinkertaisia suhteita erityisesti oppimisen ja opettamisen näkökulmasta. Tällöin korostuu matematiikan rakenteiden ymmärtämisen tärkeys jo peruslaskutoimituksia opittaessa. Matematiikkaa tarkastellaan historiallisesta näkökulmasta ja korostetaan luovuuden ja jopa taiteellisten piirteiden merkitystä matematiikassa. Matematiikkaa voidaan myös oppia ja opettaa piirtämällä, soittamalla, hahmottelemalla tai muilla havainnollisilla tavoilla.

Koska toiminnallisen ja havainnollisen matematiikan ja matemaattisten lausekkeiden välisen yhteyksien ymmärtäminen on keskeistä, didaktisessa matematiikassa matematiikkaa tarkastellaan myös kielenä. Erityisesti kiinnitetään huomiota matematiikassa käytettävien sanojen ja symbolien täsmälliseen määrittelyyn sekä matematiikan ja äidinkielen välisiin yhteyksiin. Matematiikan oppimisen ongelmia lähestytään semanttisesta ja semioottisesta näkökulmasta matematiikkaan. Tähän liittyy läheisesti eri maiden opetustraditioiden vertailu ja matematiikan opetuksen historian tutkimus.

Didaktisen matematiikan yleisenä tehtävänä on matematiikasta tiedottaminen sekä matematiikan opetuksen tavoitteista ja merkityksestä käytävään julkiseen keskusteluun osallistuminen.

## VIITTEET :

- [1] Olli (1941): *Pisteet lopussa*, Helsinki: Otava, 26.
- [2] Hakusanat *matematiikka* ja *suure*, Nykysuomen sanakirja, kuudes painos (1978), Porvoo: WSOY.
- [3] Spengler (1962), 72. Teoksen laaja ja asian-tunteva analyysi matematiikasta on ajatuk-

sia herättävä.

- [4] Vala (1979), 4165.
- [5] Lehti (1983), 104-105.
- [6] Hirvasnoro, Tarja (2003): *Eurosokeus vie rahan!*, Kodin kuvalehti nro16, Turku: Sanoma Magazines Finland Oy, 22-23.
- [7] <http://www.jyu.fi/mtdk/Matleh01.html> ja <http://www.jyu.fi/mtdk/Matass94.html>
- [8] Joki, Jaakko (2002): *Ulkoluvusta hahmottavaan geometriaan: aineksia geometrian opetukseen erityisesti peruskoulussa*, Did. mat. sarja, Joensuu: Joensuun yliopisto, Matematiikan laitos.
- [9] <http://www.joensuu.fi/mathematics/DidMat/>
- [10] <http://didactical.physics.helsinki.fi/tutkimus.htm>
- [11] Lehti (1983), 44.
- [12] Merikoski, Jorma & Markku Halmetoja & Timo Tossavainen (2003): *Johdatus matemaattisen analyysin teoriaan*, Tampere: Tampereen yliopisto, Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos.
- [13] Viittaamme esimerkiksi tutkimuksiin Haapasalo (1998), Pietilä (2002) ja Ruokamo (2000).

## KIRJALLISUUTTA:

- Haapasalo, Lenni (1998): *Oppiminen, tieto ja ongelmanratkaisu*, Joensuu: Medusa Software.
- Lehti, Raimo (1983): *Matematiikan tulo Suomeen yliopistolliseksi oppiaineeksi*, REPORT-MAT-C4, Espoo: Helsingin teknillinen korkeakoulu, Matematiikan laitos.
- Malaty, George (2003): *Johdatus matematiikan rakenteeseen*, Helsinki: OPH
- Pietilä, Anu (2002): *Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkakuva: matematiikkakokemukset matematiikkakuvan muodostajina*, Helsinki: Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos.
- Ruokamo, Heli (2000): *Matemaattinen lahjakkuus ja matemaattisten sanallisten ongelmanratkaisutaitojen kehittyminen teknologiaperustaisessa oppimisympäristössä*, Helsinki: Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos.
- Spengler, Oswald (1962): *Länsimaiden perikato* (suom. Yrjö Massa), Rauma: Kirjayhtymä.
- Vala, Klaus (1979): Hakusana *matematiikka*, Otavan Suuri Ensyklopedia, Keuruu: Otava, 4165-4167.

*Kirjoittajista Tuomas Sorvali on matematiikan professori Joensuun yliopistossa ja Timo Tossavainen matematiikan lehtori Joensuun yliopiston Savonlinnan opettajankoulutuslaitoksessa.*