

Pekonen ja kontinuumihypoteesi

Jari Palomäki

Suomalaisen Kirjallisuuden Seuran julkaisemassa kirjassa *Marian maa – Lasse Heikkilän elämä 1925–1961* Jyväskylän ja Helsingin yliopistojen matematiikan dosentti Osmo Pekonen kuvaa paitsi Saarnion kontinuumihypoteesin todistamista, myös Uno Saarniota henkilönä tavalla, jota ei voi jättää kritisoimatta.

”Filosofian rikkaus” on käydä rohkeaa kamppailua merkittävien ja haastavien ongelmien kanssa, eikä ”köyhemmästi” selostaa muiden ajatuksia tai olla ajattelematta lainkaan. Filosofi ja matemaatikko Uno Saarnio (1896–1977), joka teki varsinaisen ammatillisen elämäntyönsä kirjastoalalla, ei kavahtanut vaikeita ongelmia. Hän esitti ratkaisunsa muun muassa yhdessä Aarni Penttilän kanssa kehittämänsä sanateorian avulla ns. Grellingin paradoksille (Saarnio 1937), sekä myöhemmin joukko-opiin kuuluvalla kontinuumihypoteesille (esim. Saarnio 1964, 1968, 1969; VI luku).

Yleisesitys Uno Saarnion filosofiasta sisältyi artikkeliini *Tieteessä tapahtuu* -lehdessä 6/2002.

Pekosen esittämä kontinuumihypoteesin historiallinen katsaus on erikoinen, sillä hänen mukaansa kontinuumihypoteesin ”[o]ngelmalla on syvät aatehistorialliset juuret, jotka johtavat aina keskiajan teologiaan,” (ibid., 192). Otaksuttavasti ihminen on kuitenkin yrittänyt ymmärtää kontinuumia jo tuhansia vuosia, mikä on johdattanut muun muassa pythagoralaiset irrationaalilukuihin ja Zenon Elealaisen paradokseihin – ja toisaalta taas ennen Georg Cantorin tutkimuksia kontinuumihypoteesia ei olisi voitu matemaattisesti edes muotoilla.

Mitä Cantor oikeasti sanoi?

Varhaisin Cantorin kontinuumin luonnehdinta ajoittui vuoteen 1873 hänen kirjeessään Dedekindille (*Cantor/Dedekind* 1937, 14, 15) ja hänen artikkelissaan vuonna 1874 (*Cantor* 1932, 115–118), jolloin hän osoitti, että reaalilukujen joukko ei ole

numeroituva. Kontinuumihypoteesin hän esitti ensimmäisen kerran artikkelissaan vuonna 1878 (ibid., 119–133), muodossa, että jokainen ylinumeroituva reaalilukujen joukko voidaan asettaa yksi-yksiseen vastaavuuteen kaikkien reaalilukujen joukon kanssa, toisin sanoen, ettei olisi olemassa kardinaalilukua, joka olisi luonnollisten lukujen joukon kardinaliteettia suurempi, mutta reaalilukujen joukon kardinaliteettia pienempi.

Vuoden 1883 artikkelissaan (ibid., 165–209), Cantor esitti paremman muotoilun kontinuumihypoteesille: reaalilukujen joukolla on sama mahtavuus kuin kaikkien numeroituvien ordinaalilukujen joukolla. Vasta vuonna 1895 (ibid., 282–311) esittämällänsä alef-merkinnällä Cantor kykeni ilmaisemaan kontinuumihypoteesin sen nykyisin kardinaalilukua koskevassa ja Pekosen esittämässä muodossa (vrt. Pekonen 2002, 198).

Pekonen antaa ymmärtää, että kontinuumihypoteesin riippumattomuus joukko-opin muista aksioomeista olisi mahdollisuutena seurausta Kurt Gödelin vuoden 1931 aritmetiikkaa koskevista epätäydellisyyslauseista. Paremminkin Gödelin ja Cohenin kontinuumihypoteesia koskevissa ristiriidattomuustodistuksissa vuosina 1938 ja 1963 luotiin mallit, joissa toisessa joukko-opin aksioomat lisättyinä kontinuumihypoteesilla pätee (Gödel) ja toisessa joukko-opin aksioomat lisättyinä kontinuumihypoteesin negaatiolla pätee (Cohen), jolloin siis kontinuumihypoteesi on joukko-opin aksioomeista riippumaton.

Riippumattomuustodistuksia esiintyi jo paljon ennen vuoden 1931 Gödelin epätäydellisyystodistuksiaikin, esimerkiksi 1830-luvun todistukset paralleeliaksioman riippumattomuudesta Eukleideen muista aksioomeista, mikä puolestaan mahdollisti epäeuklidisten geometrioiden kehittelyn. Analogia paralleeliaksioman ja kontinuumihypoteesin, ts. epäeuklidisen geometrian ja ”epäcantorilaisen” joukko-opin, välillä ei kuitenkaan ole yhtä ilmeinen kuin mitä yleisesti, Pekonen mukaan lukien (ibid., 199), annetaan ymmärtää. Esimerkiksi kontinuumihypoteesia ei ole ehdotettu aksiomaksi toisin kuin paralleeli-

aksioomaa, ja toisaalta paralleeliaksiooman totuuden määrittämiseksi ei ole ehdotettu uusia aksiomeja toisin kuin kontinuumihypoteesin.

Saarnio väitti todistaneensa kontinuumihypoteesin ja esitti väitteelleen perustelunsa. Pekonen puolestaan väittää, että Saarnion esittämä todistus on virheellinen. Väitteensä perusteena Pekosella on uskomus, että kontinuumihypoteesin riippumattomuus joukko-opin muista aksiomeista osoittaisi kyseisen todistuksen mahdottomaksi (Pekonen 2002, 201, ks. myös Pekonen 1999, 64). Platonistisen käsityksen mukaan tämä ei pidä paikkaansa. Ensinnäkin Saarnio tunnusti Cohenin tuloksen (ks. esimerkiksi ensimmäinen virke Saarnio 1968, 335), toisin kuin Pekonen väittää (Pekonen 1999; 64; 2002, 201). Toiseksi, Gödelin ja Cohenin tulokset koskevat nimenomaan joukko-opin aksiomaattikkaa, ts. että kontinuumihypoteesi on tavanomaisten joukko-oppien aksiomeista (Zermelo-Fraenkel, von Neumann-Bernays-Gödel, Morse-Kelley jne.) riippumaton. Sitä vastoin Pekonen kirjoittaa, että ”Heikkilä oli kuitenkin niin Saarnion visioiden lumoissa, ettei hän aavistanut kontinuumihypoteesin todistamisen matemaattista mahdottomuutta” ja että asiaan olisi tullut lopullinen selvyyys vuonna 1963 (Pekonen 2002, 201). Näin ei siis ole.

Platonistisen tulkinnan mukaan kontinuumihypoteesi on joko tosi tai epätosi; aksiomeista riippumatta. Niinpä platonisti Gödelkin pyrki vielä 1970 todistamaan kontinuumihypoteesia epätodeksi (ks. Gödel 1995, 405-425). Saarnion todistuksen pätevyys on yhä kiistanalainen. Vaikka todistus osoittautuisi epäpäteväksikin, jos siis Saarnion jälkimaine matemaatikkona olisi sama kuin eräiden muidenkin ”virvatulta ajaneiden” (Pekonen 2002, 201) eli kontinuumihypoteesin todistamista yrittäneiden matemaatikkojen kuten Cantorin, Königin, Hilbertin ja Gödelin, olisi Saarniokin varsin maineikas. Katsaus kontinuumihypoteesin totuutta koskevan tutkimuksen nykyvaiheisiin sisältyy W. Hugh Woodinin artikkeliin (2001).

Pekosen oudot käsitykset Uno Saarniosta

Osmo Pekonen käsittelee kirjassaan (2002) Uno Saarniota paitsi tieteen tekijänä ja matemaatikkona, myös henkilönä.

Ensinnäkin Saarniota on vaikea mieltää sellaiseksi spiritistiksi, joksi Pekonen (2002, 201, 206) häntä luonnehtii. Esimerkiksi *Ajatuksessa* vuonna 1942 ilmestyneessä artikkelissaan ”Mitä on filo-

safia?” Saarnio erottaa kolme eri ajattelun ja siihen perustuvaa tieteen kehityksen vaihetta: mytologisen, metafyyssisen ja funktionaalisen vaiheen. Mytologinen maailmanselitys on Saarnion mukaan *esineellistä* ajattelua, metafyyssinen selitys on *periaate*-ajattelua ja funktionaalinen selitys *abstraktia* ajattelua? sanan parhaassa, logistisessa mielessä? (*ibid.*, 183), jota Saarnio luonnollisesti pyrki edustamaan. Kyseisessä artikkelissa Saarnion käsitys metafysiikasta on ilmaistu selkeästi tavalla (*ibid.*, 174, 175, 184, 185), joka ei vastaa Pekosen antamaa kuvaa.

Uno Saarnion pojan Reino Saarnion mukaan (25.4.2002) hänen isänsä ei ollut spiritisti, vaan paremminkin rauhanaatteen ja ihmisten välisen veljeyden kannattajana teosofi, jos kohta teosofeihinkin hän piti tiettyä etäisyyttä.

Pekonen kirjoittaa, että Saarnio olisi osallistunut spiritistisiin istuntoihin, joissa ”meedion kutsumat henget vakuuttivat hänen olevan oikealla tiellä kontinuumihypoteesin ratkaisuyrityksissään” (Pekonen 2002, 201). Kyseisen käsikirjoitus sivun nähtyään Reino Saarnio kirjoitti Osmo Pekoselle 5.9.2000 päivätyssä kirjeessään, että jos Uno Saarnio kävikin vaimonsa kuoleman 1972 jälkeen spiritistin luona saadakseen vielä ”yhteyttä” edesmenneeseen vaimoonsa ja tehden näin omaa henkilökohtaista surutyötä, on se selkeästi erotettava hänen tieteellisistä tutkimuksistaan. Korjausehdotuksesta huolimatta Pekonen ei korjannut kirjoittamaansa, jonka voi katsoa loukkaavan kuolleen miehen muistoa. Todetakoon vielä, että itse asiassa kaikki Saarnion kontinuumihypoteesia koskevat tutkimukset oli tehty jo 1960-luvun puoliväliin mennessä.

Saarnion itsetunnosta Pekonen kirjoittaa niin ikään tavalla, jonka todenperäisyys on kyseenalainen, ts. että ”eräässä kansainvälisessä logiikan kongressissa [Saarnio] hivuttautui itsensä Bertrand Russellin seuraan”, joka piippua poltelon oli vaipunut syvämietteiseen keskusteluun muiden logiikan nerojen kanssa. Havaitessaan tuntemattoman tulokkaan lähestymisyritykset Russell oli tokaissut: ”Älkää häiritkö meitä! Me keskustelemme nyt suomalaisen professori Uno Saarnion teoriasta” (Pekonen 2002, 199). Reino Saarnion mukaan (25.4.2002) vastaavantapainen Uno Saarnion kertoma tarina ajoittui kuitenkin vuonna 1935 Pariisissa järjestettyyn filosofian konferenssiin, jossa joukko nimekkäitä filosofeja, muun muassa Hempel, Carnap ja Popper olivat keskustelleet vilkkaasti Saarnion juuri ilmestyneestä väitöskirjasta. Keskustelua sivulta kuunnellut ja joukolle ennestään tuntematon Saarnio oli lähestynyt heitä häiriötään anteeksi pyydellen

ja sanonut, että hän on se Saarnio, jonka työstä he paraikaa keskustelevat. Kyseessä ei siis ollut Pekosen mainitsema ”itsensä” ”piippua poltteleva” ”syvämietteiseen keskusteluun” ”vaipunut” ”logiikan nero” Bertrand Russell, eikä Saarnio liene kertonut tarinaa kellekään siinä muodossa eikä varsinkaan siinä tarkoituksessa, missä Pekonen sen kertoi.

Ajallisena täsmennyksenä lisättäköön, että Saarnio sai Aarni Penttilän ja Eino Kailan aloitteesta professorin arvonimen vuonna 1957. Reino Saarnion voi otaksua tietävän isänsä Uuno Saarnion elämään liittyviä tapahtumia Osmo Pekosta paremmin, kun taas Pekosen olisi tullut tarkistaa asia, joka nyt käy lähinnä kulkupuheesta.

Saarnio ja Nevanlinna

Arveluttavasti Pekonen kuvaa myös joidenkin kotimaisten kollegojen suhdetta Saarnioon. Jos esimerkiksi Rolf Nevanlinna vierastikin Lasse Heikkilää, niin ei varmastikaan siksi, että Heikkilä Pekosen mukaan ”veljeili” Uuno Saarnion kanssa (*ibid.*, 189, ks. myös *Rajala* 2003, 64). Saarnio suoritti Nevanlinnalle matematiikan laudaturin vuonna 1936 ja Reino Saarnion mukaan (25.4.2002) heidän välinsä olivat hyvät ja ”korrektit” – Saarnion pasifismista ja Nevanlinnan ”militarismista” riippumatta. Lisäksi he asuivat Töölössä lähellä toisiaan tavaten siten sattumoisin usein kadullakin. Samoin heillä molemmilla oli hyvät suhteet useisiin saksalaisiin matemaatikoihin. Molemmat kirjoittivat myös toinen toisensa juhlaulkaisuihin (*Saarnio* 1965, *Nevanlinna* 1977). Nevanlinnan matemaattinen suuntautuneisuus oli kuitenkin toisaalla kuin Saarnion.

Edelleen, toisin kuin Pekonen kirjoittaa, Uuno Saarnio ei varmastikaan ollut Veli Valpolan ”mestari” (*ibid.*, 199). Itse asiassa platonisti Saarnion ja intuitionisti Valpolan filosofiset näkemykset olivat varsin kaukana toisistaan. Gödel, jos kohta oli platonisti, teki myös merkittäviä intuitionistista logiikkaa ja matematiikkaa koskevia tutkimuksia, mikä puolestaan tekee ymmärrettäväksi Valpolan matkan Princetoniin häntä tapaamaan.

Samoin Pekonen kirjoittaa lähdeä mainitsematta, että ”Georg Henrik von Wright näki Saarnion logistisen formalismin muuttuneen itsetarjokseksi” (*ibid.*, 200), johonka käsitykseen niin ikään on vaikea yhtyä, sillä Saarnio pyrki soveltamaan modernia logiikkaa nimenomaan filosofisten tulosten aikaansaamiseksi ja perustelemi-

seksi (esim. *Saarnio* 1935, 1937, 1945, 1958, 1964).

Pekonen ei näytä tunnevan Saarnion henkilökohtaisia suhteita ja yhteistyötä useiden ulkomaisten, eritoten saksalaisten kollegojen kanssa, joista monet olivat varsin nimekkäitä filosofeja ja matemaatikkoja. Kansainvälisessä tiedeyhteisössä Saarnion matemaattiset ansiot transfiniittisten järjestyslukujen tutkijana on tunnustettu, esimerkiksi Saksan matemaatikkoseuran jäsenyys hänelle myönnettiin vuonna 1968.

Saarnion kontinuumihypoteesin todistukseen sitä vastoin on – ymmärrettävää kyllä – suhtauduttu epäillen (vrt. *Pekonen* 2002, 200). Todettakoon kuitenkin, että Saarnion päätyönä on pidettävä vuonna 1958 ilmestynyttä *System und Darstellung der Transfiniten Ordnungszahlen* -teosta, eikä niinkään Pekosen ”[e]lämätyönsä huipentumana” (2002, 201) mainitsemaa vuonna 1969 ilmestynyttä suomenkielistä *Mitä tiedämme äärettömästä?* -teosta, joka on lähinnä järjestyslukuja ja kontinuumihypoteesia koskien suomennos Saarnion aiemmista tutkimuksista (1958 ja 1964).

Pekonen sanoo kontinuumihypoteesin merkinneen Saarniolle koko maailmankuvan perustusta (*Pekonen* 2002, 201). Kontinuumihypoteesi muodosti kuitenkin vain osan Saarnion matemaattisistakin tutkimuksista. Saarnion maailmankuva perustui ennemminkin yhdelmään leibnizilaisuutta ja kantilaisuutta, johon liittyi analyttisen filosofian mukainen modernin matemaattisen logiikan hyväksikäyttö. Lisäksi, jos kohta Platon olikin Saarniolle tärkeä – hän ei kuitenkaan ollut ”kaikki kaikessa”, kuten Pekonen kirjoittaa (*ibid.*, 242).

Pekosen kirja sisältää poikkeuksellisen määrän erilaista uskonnollista tulkintaa. Esimerkiksi Lasse Heikkilän käyttämä ”dramaattinen” merkintä ”tuulimyllyordinaalille”, ts. kuudennen laskutavan rajaordinaalille, jota Behmannin merkinnällä (ks. *Saarnio* 1958, 9) voidaan ilmaista lyhyesti ω, ω , tuo Pekoselle mieleen Pyhän Kolminaisuuden (*ibid.*, 196). Kun uskontoon liittyy vielä romanttista nerouden palvontaa (*ibid.*, 121-134), ja siihen liittyvää nerouden ja hulluuden tematiikkaa (*ibid.*, 129-131, 138, 139), saadaan matematiikan historiastakin melko erikoinen kuva. Esimerkiksi Georg Cantorin matematiikka näyttäisi palautuvan Cantorin teologisiin näkemyksiin ja hänen maanis-depressiiviseen mielisairauteensa (*ibid.*, 192, 193), eikä Gödelin paranoiaakaan unohteta (*ibid.*, 201, ks. myös *Pekonen* 1999, 63). Voimakkaana persoonana tunnettu ja uskonnosta kiinnostunut Saarnio ei kuitenkaan sovi tähän yhteyteen.

Tutkijan vastuu

Yllä on käsitelty joitakin Osmo Pekosen Uuno Saarnion tieteellisiin tutkimuksiin ja henkilöön kohdistettuja väitteitä. Käsitelystä viriää useita tieteen ja tutkimuksen etiikkaan ja jopa juridiikkaan liittyviä kysymyksiä.

Tutkijan velvollisuutena on tavoitella totuutta, mikä edellyttää varauksetonta rehellisyyttä, ts. että hän esittää tosiasiat tosiasioina ja toisaalta, ettei hän esitä tosiasiana mitään, mitä ei tiedä todeksi tai minkä tietää epätodeksi. Samoin tutkijan henkilökohtainen näkökulma olisi tuotava selkeästi ilmi eikä niin, että se ikään kuin olisi tulos tieteellisestä tutkimuksesta.

Tieteen ja tutkimuksen etiikkaan kuuluu myös tapa, jolla tutkija kertoo tuloksistaan. Esimerkiksi Pekosen, joka matemaatikkona (2002, 11), kirjoittaa lähinnä matematiikkaan perehtymättömille lukijoille, tulee alansa edustajana osoittaa erityistä huolellisuutta ja vastuullisuutta kirjansa matematiikkaa ja sen historiaan liittyvien asia- ja henkilötietojen oikeellisuutta kohtaan. Esimerkiksi Pertti Lassila, joka ei ole koulutukseltaan matemaatikko, kirjoittaa kirja-arvostelussaan, että ”Saarnion teoriat kiehtoivat Heikkilää. Pekonen käyttää kokonaisen kiinnostavan ja varmaankin asiantuntevan luvun aiheen käsittelemiseen” (Lassila 2002, B2).

KIRJALLISUUTTA:

- Cantor, G. (1932): *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Toim. E. Zermelo. Berlin: Springer; uusinta painos vuonna 1962. Hildesheim: Olms.
- Cantor/Dedekind (1937): *Briefwechsel Cantor-Dedekind*. Toim. E. Noether ja J. Cavaillès. Paris: Hermann.
- Gödel, K., 1995: *Collected Works, Volume III – Unpublished Essays and Lectures*. Toim. S. Feferman etc. New York, Oxford: Oxford University Press.
- Nevanlinna, R. (1977): ”Randbemerkungen zum Begriff der Realität”. Teoksessa *Logik, Mathematik und Philosophie des Transzendenten. Festgabe für Uuno Saarnio zum achtzigsten Geburtstag*. Toim. A. Hakamies. München, Paderborn, Wien: Schöningh, 61-66.
- Lassila, P. (2002): ”Lasse Heikkilän toinen elämä”. *Helsingin Sanomat* 11.5.2002, B2.

- Palomäki, J. (2002): ”Uuno Saarnio – omintakeinen filosofi”. *Tieteessä tapahtuu* 6/2002, 15-20.
- Pekonen, O. (1999): ”Yksi, kaksi, kolme – ääretön!” *Tieteessä tapahtuu* 8/1999, 63, 64.
- Pekonen, O. (2002): *Marian maa. Lasse Heikkilän elämä 1925–1961*. Helsinki: Suomalaisen Kirjallisuuden Seura.
- Rajala, P. (2003): ”Runoilijan elämä ja ideat”. *Tieteessä tapahtuu* 4/2003, 63, 64.
- Saarnio, U. (1935): *Untersuchungen zur symbolischen Logik: I. Kritik des Nominalismus und Grundlegung der logistischen Zeichentheorie (Symbolologie)*. Acta Philosophica Fennica I. Helsinki: Societas Philosophica.
- Saarnio, U. (1937): ”Zur heterologischen Paradoxie”. *Theoria* III, 38-56.
- Saarnio, U. (1942): ”Mitä on filosofia?”. *Ajatus – Filosofisen Yhdistyksen Vuosikirja XI*. Helsinki: Suomen Filosofinen Yhdistys, 171-219.
- Saarnio, U. (1945): ”Arvo ja eettisyys”. *Ajatus – Filosofisen Yhdistyksen Vuosikirja XIII*. Helsinki: Suomen Filosofinen Yhdistys, 111-235. Julkaistu myös erillispainoksena *Arvo ja eettisyys*, toim. H. ja T. Rasku. Hämeenlinna: Transkirja, 1989.
- Saarnio, U. (1958): *System und Darstellung der Transfiniten Ordnungszahlen. Mit Einführung von Prof. Dr. Heinrich Behmann*. Helsinki: Gesellschaft für Logik und Ihre Anwendungen.
- Saarnio, U. (1964): *Eine Zuordnung zwischen den ersten zwei Cantorschen Zahlklassen und den 2^{\aleph_0} Dualfolge*. Helsinki: Gesellschaft für Logik und ihre Anwendungen.
- Saarnio, U. (1965): ”Nominalismus als Widerspruch”. Teoksessa *Studia logico-mathematica et philosophica. In honorem Rolf Nevanlinna: die natali eius septuagesimo 22.X.1965*. Helsinki: Acta Philosophica Fennica XVIII, 185-202.
- Saarnio, U. (1968): ”Eine konstruktive Darstellung für die Richtigkeit der Kontinuumshypothese”. *Mathematische Annalen* 178, 335-353.
- Saarnio, U. (1969): *Mitä tiedämme äärettömästä?* Porvoo, Helsinki, Juva: WSOY.
- Woodin, W. H. (2001): ”The Continuum Hypothesis, Part I & II”. *Notices of the American Mathematical Society*, Vol. 48, 567-576, 681-690.

Lisäksi painamattomina lähteinä Reino Saarnion haastattelu 25.4.2002 ja hänen kirjeensä kopio Osmo Pekoselle 5.9.2000 sekä Uuno Saarnion kirjallinen jäämistö.

Kirjoittaja on Senior Lecturer informaatiotieteiden laitoksella Masseyn yliopistossa Uudessa-Seelannissa.