

Tutkiva matematiikan oppiminen peruskoulussa

Erkki Pehkonen

Jotta koulun matematiikanopetuksessa päästäisiin rutiinopetuksesta ja kyettäisiin kehittämään myös korkeamman tason ajattelutaitoja, on rakennettava sellaisia oppimisympäristöjä, joissa luovan ajattelun avulla yllettäisiin ymmärtämisen kehittymiseen. Usein opettajatkin ajattelevat, että matematiikassa tarvitaan ensisijaisesti logiikkaa ja ettei luovuudella ole paljonkaan tekemistä matematiikan oppimisen kanssa. Toisaalta jos tarkastelemme matemaattikkoa, joka luo uutta matematiikkaa, emme voi sivuuttaa luovuuden merkitystä hänen toimissaan. 'Avoimien tehtävien' käyttäminen edistää matematiikanopetuksen kehittämistä tähän suuntaan.

Koulukasvatuksen tarkoituksena on joka maassa kehittää oppilaista itsenäisiä, oma-aloitteisia, kriittisesti ajattelevia, motivoituneita ja monipuolisesti taitavia kansalaisia, jotka selviävät niissä erilaisissa yhteiskunnallisissa tilanteissa, joita he kohtaavat myöhemmin elämässään. Siksi koulukasvatuksen keskeinen kysymys on, minkälainen opetus on optimaalista tälle tavoitteelle. Ideoita siihen suuntaan pyritään kehittämään tässä artikkelissa.

Yleensä ihmiset ajattelevat, että luovuudella ja matematiikalla ei ole mitään tekemistä toistensa kanssa. Tämä perustuu ihmisten koulumustoihin, jotka ovat hyvin samansuuntaisia ja joissa matematiikka yhdistyy vahvasti laskemiseen. Mutta matemaatikot ovat tiukasti eri mieltä. Esimerkiksi Kiesswetter (1983) väittää, omiin kokemuksiinsa perustuen, että joustava ajattelu on eräs tärkeimmistä ominaisuuksista, joita menestyksekkäs ongelmanratkaisija tarvitsee. Ja matematiikka on ennen kaikkea ongelmanratkaisua. Toisaalta joustava ajattelu on yksi neljästä luovuuden komponenteista. Toinen näkökulma asiaan saadaan Bishopin (1981) ajatuksesta, että matematiikassa tarvitaan kahta hyvin erilaista,

toisiaan täydentävää ajattelumoodia: Luovaa ajattelua, jolle on tyypillistä "intuitio", ja analyttistä ajattelua, jolle "logiikka" on ominaista. Verbaalisuus on aina yksiulotteisena yhdistettävissä logiikkaan, kun taas visuaalisuus liittyy intuitioon, tavallisimmin kaksi- tai kolmiulotteisena. Saman idean esitti myös Wachsmuth (1981) puhuessaan ajattelun "logiikka-moodista" ja "rentoutumis-moodista".

Jos tarkkailemme matemaatikon (tai jonkin muun alan tiedemiehen) toimintaa hänen läheistyessään uutta tehtävää, toteamme että hän yleensä ensin kokeilee erilaisilla erikoistapauksilla. Nämä ensimmäiset kokeilut ovat useimmiten satunnaisia, mutta ne vähitellen asettuvat tiettyyn suuntaan – tällöin matemaatikon mielessä herää ajatus mahdollisesta ratkaisusta. Kokeilujen perusteella hän saattaa asettaa hypoteesin, jota yrittää todistaa oikeaksi. Siksi luova toiminta on oleellinen osa matematiikan tekemistä eli ongelmien ratkaisemista.

Luovuus ja looginen ajattelu

Luovuus on käsite, joka on koettu hankalaksi määritellä. Kirjallisuudessa esiintyy monenlaista kuvailua luovuudelle, mutta yhtään yleisesti hyväksyttävää määritelmää, jonka kaikki luovuustutkijat (tai suurin osa luovuustutkijoista) voisivat hyväksyä, ei näyttäisi olevan. Kun määrittely ei ole ollut mahdollista, niin on ollut tyypillistä kuvailla luovuus sellaisten henkilöiden käyttäytymisen kautta, joita yleisesti pidetään luovina. Erilaisissa luovuutta käsittelevissä kirjoissa voidaan lukea Arkhimedeen "Heureka"-kokemuksesta sekä Darwinin vuosia kestäneestä tietojen keräämisestä ja järjestämisestä ennen ideaa evoluutiosta.

Miltei jokainen tutkija on muotoillut kirjallisuudessa oman versionsa määritelmästä. Matti

Bergström määrittelee luovuuden "toimintona, jossa yksilö tuottaa jotakin uutta ja ennalta määrittämättömää" (Bergström 1984, 159). Edelleen hän ottaa käyttöön käsitteet "arkipäivän luovuus" ja "sunnuntailuovuus": Ensimmäinen käsite liittyy sellaisten uusien assosiaatioiden löytämiseen, jotka ovat ennustettavissa, kun vain assosioitavat elementit tunnetaan. Sen sijaan todellinen luovuus (jälkimmäinen) vaatii erityiset olosuhteet eikä sitä voida saavuttaa intentionaalisesti eikä mekaanisin menetelmin.

Luova ajattelu voidaan määritellä loogisen ajattelun ja divergentin ajattelun tavoitteellisenä yhdistelmänä. Divergentti ajattelu perustuu intuition, mutta sillä on tietoinen tavoite. Kun yksilö soveltaa luovaa ajattelua käytännölliseen ongelmanratkaisutilanteeseen, hän ensimmäisessä vaiheessa tuottaa divergentin ajattelun avulla useita mahdollisia ideoita. Jotkut niistä näyttävät soveltuvan ongelman ratkaisun tuottamiseen. Näistä tehdään yhteenveto loogisen ajattelun avulla. Samoin ratkaisun tarkistamiseen käytetään loogista ajattelua.

Tasapaino logiikan ja luovuuden välillä on hyvin tärkeä. Jos yksilö painottaa loogista ajattelua liian paljon, hän vastaavasti vaimentaa luovuuttaan. Mitä logiikassa voitetaan, se luovuudessa menetetään, ja päinvastoin. Luovuus vaatii kehittyäkseen toiminnanvapautta ylenmääräisestä paineesta ja kontrollista. Sääntöjen ja algoritmien, jotka ovat jonotoimintoja, jatkuva painoitus saattaa estää luovuuden ja ongelmanratkaisutaitojen kehittymisen. Sellaiset oppimisympäristöt, jotka tarjoavat oppilaille mahdollisuuksia tutkimiseen, non-verbaaliin ilmaisuun, laboratoriotyöskentelyyn ja moniaistiseen oppimiseen, voivat antaa oppilaille mahdollisuuksia saavuttaa uusia tasoja matematiikassa.

Tiedon merkitys ongelmanratkaisuprosessissa on hyvin tunnettu ja yleisesti hyväksytty. Mutta tutkimukset ovat näyttäneet, että kuten liian vähän tietoa myös liian paljon tietoa voi alentaa ihmisaivojen informaationprosessointikykyä ja tehokkuutta; siksi nämä molemmat saattavat asettaa esteen luovuudelle. Yksilö, joka on saanut yksipuolisen tietopainotteisen kasvatuksen saattaa olla kyvytön käyttämään luovuuttaan, koska vastaavia osia hänen aivoistaan ei ole harjoitettu riittävästi, mutta sen sijaan estäviä osia enemmänkin.

Nyky-yhteiskuntamme painottaa ja palkitsee erityisesti jonotoimintoja. Koulussa korostetaan oppilaiden sanallista itseilmaisua (sekä verbaalisesti että kirjoitettuna) ja erilaisten sääntöjen seuraamista. Luovuusvoimavarojen aktivointi näyttää olevan välttämätön edellytys onnistuneelle

ongelmanratkaisulle. Toisaalta omaehtoinen ongelmanratkaisu edistää oppilaiden luovuutta. Mutta käytettyjen ongelmien pitäisi olla oppilaille sopivan tasoisia, koska heidän olisi koettava onnistumiselämyksiä, jotta motivoituisivat jatkaamaan ongelmien ratkaisemista.

Tutkimustehtävät ratkaisuna koulussa

Matematiikka ei ole vain laskemista, vaan opetuksen päämääränä pitäisi olla myös ymmärtäminen. Tavanomaista kouluopetusta on syytetty siitä, että se pitää toimintaa ja kontekstia, jossa oppiminen tapahtuu, täysin erillisenä. Psykologiset tutkimukset ovat kuitenkin osoittaneet, että oppiminen on vahvasti tilannesidonnaista. Uusimmat oppimispsykologiset tutkimukset ovat mm. vahvistaneet hypoteesin, että tosiasioiden ja toimintojen oppiminen tapahtuu erilaisin mekanismein. Tästäkin syystä koulun matematiikanopetukseen olisi liitettävä uusia elementtejä. Tavanomainen opetus soveltuu hyvin tosiasioiden oppimiseen, mutta toimintatapojen oppimiseen tarvitaan uusia menetelmiä.

Viimeisen kahdenkymmenen vuoden aikana on ainedidaktisen tutkimuksen puitteissa kehitetty matematiikanopetukseen menetelmiä, jotka sopivat yhteen konstruktivistisen oppimisnäemyksen kanssa. Yrityksiä vastata näihin vaatimuksiin voidaan löytää olemassa olevasta kirjallisuudesta. Eräs yleistä kirjallisuudessa kuvailtu opetusmalli on avoimien tehtävien käyttäminen ymmärtämisen ja luovuuden edistämiseksi.

Ongelmanratkaisulla on pitkä perinne koulu-matematiikassa. Yleensä sitä on opetettu (ja joissakin kouluissa opetetaan edelleenkin) "mallista oppimisen" menetelmällä: ts. opettaja näyttää ratkaisumenetelmän joillakin esimerkeillä, jota oppilaat sitten soveltavat samankaltaisiin ongelmiin. Aina silloin tällöin tällaista opetustyyliä on kritisoitu muodolliseksi ja kaavamaiseksi, mutta kaikki yritykset saada opetus muutetuksi pois formaaleista opetusmenetelmistä ovat epäonnistuneet.

Tässä artikkelissa lähtökohtana on sellainen ongelman määritelmä, joka näyttää yleistyvän kirjallisuudessa: Sellaista tehtävätilannetta kutsutaan *ongelmaksi*, missä yksilö on pakotettu yhdistämään ongelman ratkaisemiseksi olemassa olevaa tietoaan (hänelle) uudella tavalla. Jos hän heti tunnistaa tehtävän ratkaisemiseksi tarvittavat toimet, niin kyseinen tehtävä on hänelle rutii-nitehtävä. Siis käsite "ongelma" on suhteellinen – se on aina sidottu aikaan ja henkilöön.

Edelleen tehtävän sanotaan olevan *avoim*, jos sen alku- tai lopputilanne ei ole tarkasti määritetty. Avoimien tehtävien ratkaisemisessa oppilailla on vapaus tuoda mukaan lisäoletuksia ratkaisuprosessin aikana. Tällöin he käytännössä päätyvät erilaisiin, mutta aivan yhtä oikeisiin tuloksiin. Siksi avoimilla tehtävillä on tavallisesti useita oikeita vastauksia. Avoimiin tehtäviin kuuluvat mm. arkielämän ongelmat, ongelman asettaminen, ongelmakentät (tai ongelmajonot), ongelmat ilman kysymystä, ongelmuunnokset ("entä-jos"-menetelmä), projektityöt ja tutkimustehtävät. Tutkimustehtävälle (*investigation*) on tyypillistä, että alkutilanne on annettu. Sen puitteissa saa oppilas itse muotoilla ongelmansa ja ratkaista sen. Käytetäessä avoimia tehtäviä matematiikanopetuksessa saavat oppilaat mahdollisuuden työskennellä aktiivimatematiikon tapaan.

Tutkimustietoon liittyviä esimerkkejä avoimien tehtävien koulusovelluksista löytyy ongelmakenttien muodossa esimerkiksi julkaisusta Pehkonen (1997a). Näitä on myös työstetty kouluopetuksen suuntaan (esim. Pehkonen 1994, Rossi & Pehkonen 1995, Pehkonen 1997b).

Uuteen opetuskulttuuriin

Tutkimukset ovat osoittaneet, että suurimpana esteenä yrityksissä kehittää koulujen matematiikanopetusta avoimien tehtävien käyttämisen suuntaan näyttää olevan opettajien matematiikkakuva (ts. heidän käsityksensä siitä, millaista on hyvä matematiikanopetus). Tämä kuva, joka pohjaa syvälle opettajan perususkomuksiin matematiikasta ja sen opettamisesta ja oppimisesta, ohjaa vahvasti heidän opetusratkaisujaan. Jos avoin opetus ei kuulu opettajan opetuskäsitykseen, niin sen toteutus ei näytä olevan tuloksellista, vaikka opettaja olisi koulutettu ko. opetusmenetelmään. Siksi opettajan omat uskomukset ja käsitykset ovat avainasemassa.

Uskomukset (*beliefs*) muodostuvat yksilön subjektiivisten kokemusten pohjalta ja ovat aikamoisen pysyviä havainnointitapoja, jotka tavallisesti sisältävät myös tunnelatauksen. Käsitykset (*conceptions*) ymmärretään yksilön tietoisina uskomuksina, jolle yleensä voidaan antaa myös perustelu.

Laskutaitoa ja ymmärtämistä

Koulun matematiikanopetuksen pitäisi tähdätä sekä laskutaitojen hankkimiseen että ymmärtämiseen. Kumpikaan näistä ei yksin riitä, koska

rundas laskeminen ei vielä lisää ymmärtämistä eikä myöskään laskutaito lisäännny pelkästään ymmärtämisen myötä. Siksi koulun matematiikanopetuksen tavoitteena olisi oltava laskutaitojen ja ymmärtämisen kehittäminen ja mielekäs yhteenpunominen.

Kun kouluopetuksessa siirrymme rutiiniongelmien ratkaisemisesta luovaan ongelmanratkaisuun, on olemassa vaara, että ongelmanratkaisumenetelmien (*heuristic strategies*) opettamisesta tulee uusi joukko opittavia sääntöjä. Ja näin olisimme jälleen opettamassa rutiineja. Tämänasuuntaisia ehdotuksia on ollut luettavissa kirjallisuudessa jo 1980-luvulta asti. Jotta emme tekisi ratkaisustrategioista uutta opetussisältöä, olisi oppilaiden annettava itsenäisesti ratkaista ongelmia – löytää ja muotoilla omia, itsekehitettyjä ongelmanratkaisumenetelmiä. Vasta tällainen itsetyöstetty tieto voi jäädä yksilön käyttöön myöhemminkin – ja ennen kaikkea tieto siitä, että pystyy tarvittaessa kehittämään itse ratkaisumenetelmän.

Tietokoneiden kehittyessä on ihmisillä tulevaisuudessa aina enemmän aikaa luovaan toimintaan, esimerkiksi luovaan ongelmanratkaisuun. Jotkut puhuvat innostuneesti myös tietokoneiden mahdollisuuksista ongelmanratkaisussa (*artificial intelligence*). Tietokone voi parhaimmillaan kehittää käyttäjänsä loogista ajattelua, esimerkiksi Master Mind -tyyppisillä peleillä. Tietokone ei pystyne kuitenkaan koskaan saavuttamaan "sunnuntailuovuuden"-tyyppistä luovaa toimintaa, sillä se työskentelee aina ohjelmointinsa puitteissa – siksi sen ajattelu on jono- maista, ei holistista.

KIRJALLISUUTTA

- Ahtee, M. & Pehkonen, E. (eds.) (1994): *Constructivist viewpoints for school learning and teaching in mathematics and science*. University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research Report 131.
- Anderson, J. R. (1980): *Cognitive psychology and its implications*. San Francisco, Ca: Freeman.
- Bereiter, C. & Scardamalia, M. (1996): "Rethinking learning". Teoksessa *The handbook of education and learning* (eds. D.R. Olson & N. Torrance). *New models of learning, teaching and schooling*. Cambridge, Ma: Blackwell.
- Bergström, M. (1984): "Luovuus ja aivot toiminta". Teoksessa *Luovuuden ulottuvuudet* (toim. R. Haavikko & J.-E. Ruth), 159-172. Weilin+Göös: Espoo
- Bergström, M. (1985): "Ihmisaivot ja matematiikka". *Matemaattisten Aineiden Aikakauskirja* 49 (3), 211-215.

- Bishop, A. (1981): "Visuelle Mathematik". Teoksessa *Fragen des Geometrieunterrichts* (Hrsg. H.-G. Steiner & B. Winkelmann), 166-184. Untersuchungen zum Mathematikunterricht, IDM 1. Köln: Aulis Verlag.
- Björkqvist, O. (ed.) (1998): *Mathematics teaching from a constructivist point of view*. Department of Teacher Education. Reports from the Faculty of Education. Åbo Akademi University. No. 3.
- Branthwaite, A. (1986): "Creativity and Cognitive Skills". Teoksessa *The Skilful Mind* (ed. A. Gellatly), 183-197. Milton Keynes: Open University Press.
- Brown, S. I. (1997): "Thinking like a mathematician: A problematic perspective". *For the Learning of Mathematics* 17 (2), 36-38.
- Davis, R. B., Maher, C.A. & Noddings, N. (eds.) (1990): *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics*. JRME Monograph Number 4. Reston, Va: NCTM.
- Engström, A. (red.) 1998. Matematik och reflektion. Lund: Studentlitteratur.
- Hashimoto, Y. & Becker, J. (1999): "The open approach to teaching mathematics – creating a culture of mathematics in the classroom: Japan". Teoksessa *Developing mathematically promising students* (ed. L. J. Sheffield), 101-119. Reston (VA): NCTM.
- Haylock, D.W. (1987): "A framework for assessing mathematical creativity in schoolchildren". *Educational Studies in Mathematics* 18 (1), 59-74.
- Haylock, D.W. (1997): "Recognising Mathematical Creativity in Schoolchildren". *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 29 (3), 75-80.
- Kiesswetter, K. (1983): "Modellierung von Problemlöseprozessen". *Der Mathematikunterricht* 29 (3), 71-101.
- Leder, G., Pehkonen, E. & Törner, G. (eds.) (2002): *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* Utrecht: Kluwer.
- Nohda, N. (1991): "Paradigm of the "open-approach" method in mathematics teaching: Focus on mathematical problem solving." *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 15 (2), 75-83.
- Nohda, N. (2000): "Teaching by Open-Approach Method in Japanese Mathematics Classroom". Teoksessa *Proceedings of the PME-24 Conference* (eds. T. Nakahara & M. Koyama), Vol.1, 39-53. Hiroshima University.
- Pehkonen, E. (1991): "Developments in the understanding of problem solving". *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 23 (2), 46-50.
- Pehkonen, E. (1994): "Avoimet tehtävät vastauksena oppimisenäkemyksen esittämiin haasteisiin". Teoksessa *Matematiikka – taitoa ajatella. Yläaste ja lukio* (ed. R. Seppälä), 60-64. Suuntana oppimiskeskus 24. Helsinki: Opetushallitus.
- Pehkonen, E. (1995): "Introduction: Use of open-ended problems". *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 27 (2), 55-57.
- Pehkonen, E. (1997a): "Use of problem fields as a method for educational change". Teoksessa *Use of open-ended problems in mathematics classroom* (ed. E. Pehkonen), 73-84. University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research Report 176.
- Pehkonen, E. (1997b): *Etappi. Toiminnallisia matematiikan tehtäviä peruskouluun*. Helsinki: Edita
- Pehkonen, E. (2001): "Offene Probleme: Eine Methode zur Entwicklung des Mathematikunterrichts". *Der Mathematikunterricht* 47 (6), 60-72.
- Pehkonen, E. & Pietilä, A. (2002): "Uskomukset oppimisen ja opettamisen piilovaikeuttajina – Esimerkkinä matematiikanopetus". Teoksessa *Oppiminen ja opettajuus* (toim. E. Lehtinen & T. Hiltunen), 39-62. Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisusarja B: 71. Turku: Painosalama.
- Rossi, M. & Pehkonen, E. (1995): *Tutkimustehtävät ja niiden arviointi peruskoulun matematiikassa*. Helsinki: Opetushallitus.
- Silver, E. A. (1993): "On mathematical problem posing". Teoksessa *Proceedings of the seventeenth PME conference* (eds. I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu & F.-L. Lin). Vol. I, 66-85. University of Tsukuba, Tsukuba (Japan).
- Silver, E.A. (1997): "Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing". *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 29 (3), 75-80.
- Stacey, K. (1995): "The challenges of keeping open problem-solving open in school mathematics". *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 27 (2), 62-67.
- Torrance, E. P. (1974): *Torrance Tests of Creative Thinking*. Lexington (Mass.): Personnel Press/Ginn and Company (Xerox Corporation).
- Wachsmuth, I. (1981): "Two modes of thinking – also relevant for the learning of mathematics?" *For the Learning of Mathematics* 2 (2), 38-45.
- Wheatley, G. H., Mitchell, R., Frankland, R. L. & Kraft, R. (1978): "Hemispheric specialization and cognitive development: implications for mathematics education". *Journal for Research in Mathematics Education* 9 (1), 20-32.
- Zimmermann, B. (1983): "Problemlösen als eine Leitidee für den Mathematikunterricht". *Mathematikunterricht* 29 (3), 5-45.
- Kirjoittaja on professori Turun yliopiston Opettajankoulutuslaitoksella. Kirjoitus perustuu esitykseen Tieteen päivillä 8.-12.1.2003 seminaarissa "Tieteen oppiminen – Tutkiva ote, innostus ja luovuus".*
 erkki.pehkonen@utu.fi