Alain Connes'n epäkommutatiivinen maailma

Osmo Pekonen

Ranskalainen matematiikko Alain Connes sai Ruotsin kuninkaallisen tiedeakatemian vuoden 2001 Crafoordin palkinnon "operaattorialgebroita koskevista uraauurtavista tutkimuksistaan sekä epäkommutatiivisen geometrian perustamisesta". Hänen teoriansa mahdollistaa uudenlaisen tavan tarkastella luonnon perusilmiöitä.

Alain Connes syntyi 1. huhtikuuta 1947 Draguignanissa, Varin departementissa Ranskassa. Hän oli klassinen ihmelapsi, joka opiskeli pianonsoittoa ja sen ohella kiinnostui jo seitsemänvuotiaana matematiikasta. Connes'n suoraviivainen ura kuljetti hänet Ranskan tieteen maineikkaimpiin instituutioihin. Hän tuli École Normale Supérieure'n oppilaaksi 1966 ja kirjoitti ensimmäiset julkaisunsa 1969. Ranskan tiedeakatemian tunnustuspalkinnon hän sai 1975. Hänet valittiin Institut des Hautes Études Scientifiques'n (IHES) professoriksi 1979, Ranskan tiedeakatemian jäseneksi 1983 ja Collège de France'n professoriksi 1984. Hän on myös Yhdysvaltojen, Kanadan, Norjan ja Tanskan tiedeakatemioiden jäsen.

Connes loi maineensa 1970-luvulla tyypin III von Neumannin algebroiden luokittelua koskeneilla töillään. Tästä varsin teknisestä aiheesta hän esitelmöi Helsingin Kansainvälisessä Matemaatikkokongressissa (ICM) vuonna 1978. Varsovan ICM:ssä – joka Puolan sotatilalain vuoksi pidettiin vasta 1983 – hän sai Fieldsin mitalin. Vähitellen Connes'n tutkimusten pohjalta hahmottui kokonaan uusi tapa tarkastella geometriaa, *epäkommutatiivinen geometria*. Pääteoksensa "Epäkommutatiivinen geometria" Connes julkaisi ranskaksi 1990 ja englanniksi 1994.

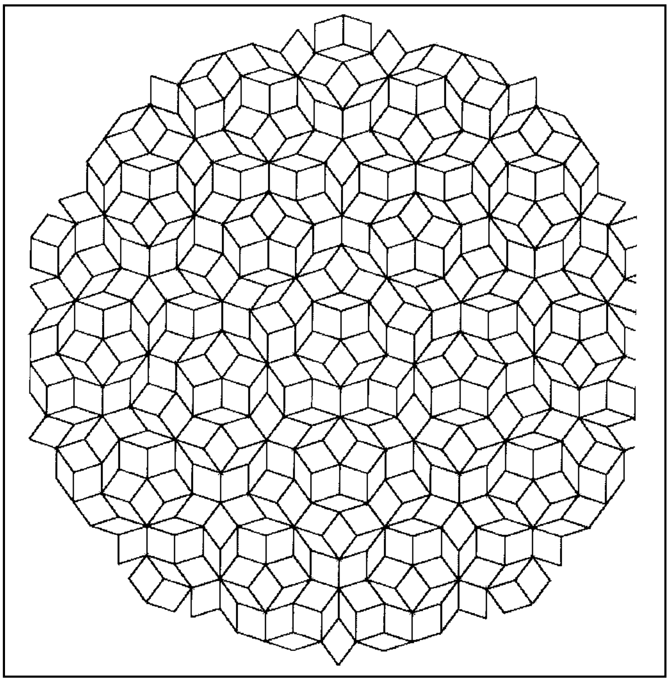
Connes'n Collège de France'ssa pitämän virkaanastujaisluennon suomennos sisältyy toimittamaani antologiaan *Symbolien metsässä: matemaattisia esseitä* (1992). Kyseisessä tekstissä Connes selittää epäkommutatiivisen geometrian Heisenbergin matriisimekaniikasta juontuvat juuret.

Tavallisen geometrian yleistys

Epäkommutatiivinen geometria on tavallisen geometrian yleistys, jossa luovutaan tavanomaisesta pisteavaruudesta ja työskennellään kvanttimekaniikalle ominaisten Hilbert-avaruuksien operaattorien kielellä. Täsmällisemmin puhuen avainkäsitteenä on C^*-algebra. Se tarkoittaa Hilbert-avaruuden rajoitettujen operaattorien alialgebraa, joka on suljettu adjungaatin muodostamisen suhteen.

Tavanomaisia pisteavaruuksia mallinnetaan differentioituvina monistoina M. Niiden päällä voidaan määritellä differentioituvia kompleksiarvoisia funktioita $f,g,\dots$, joita voidaan kertoa kompleksiluvuilla tai keskenään sekä laskea yhteen; muodostuu siis funktioalgebra, josta voidaan tehdä C^*-algebra. Merkitään sitä $C^\infty(M)$. Tämä algebra on kommutatiivinen eli vaihdannainen, ts. $f.g=g.f$. Venäläisen Israel M. Gelfandin teoreema sanoo, että algebra $C^\infty(M)$ pitää sisällään saman informaation kuin monisto M. Toisin sanoen kaikki moniston M differentiaaligeometrian tavanomaiset käsitteet kuten etäisyys, kaarevuus jne. voidaan ilmaista vain algebraa $C^\infty(M)$ käyttäen. Aikaisemmassa artikkelissani (*Tieteessä tapahtuu* 5/1995) olen kaavoja käyttäen selittänyt, miten tämä tapahtuu esimerkiksi etäisyyden tapauksessa. Connes'n teorian johtoajatus on yleistää tällaiset konstruktiot myös *epäkommutatiivisten* algebroiden ($f.g \neq g.f$) tapaukseen.

Epäkommutatiiviset algebrat eivät ole harvinaisuuksia. Äärellisulotteinen perusesimerkki on $n \times n$ -kokoisten kompleksimatriisien



Kuva 1. Penrosen tiilitystä.

kertolasku. Mielenkiintoisemmat esimerkit ovat ääretönulotteisia. Kun konstruktion lähtökohdaksi otetaan epäkommutatiivinen algebra, mitään vastaavaa ”allaolevaa” monistoa ei siis enää ole, ei ainakaan tavanomaisena pisteavaruutena. Siitä huolimatta voidaan määritellä uudessa, epäkommutatiivisessa mielessä kaikki entiset geometrian peruskäsitteet. Pisteavaruudesta luopuminen tuntuu aluksi hurjalta ajatukselta, mutta Planckin pituuden 10^{-35} m alapuolella kaikki on mahdollista. Tavanomainen avaruusaikahan muuttuu John Archibald Wheelerin sanoin ”avaruusaikavaahdoksi”.

Penrosen tiilitykset

Epäkommutatiivinen geometria tarjoaa mahdollisuuden tutkia monia sellaisia konfiguraatioita, joissa tavanomaisen topologian ja geometrian menetelmät raukeavat tyhjiin. Yleistajuisia esimerkkejä ei ole monta, mutta yksi tällainen tarjoutuu tarkasteltavaksi *Penrosen tiilitysten* muodossa. Tiilitys tarkoittaa tason peittämistä samoja peruskuvioita, tässä tapauksessa kahta erilaista tiiltä, toistamalla (*kuva 1*). Englantilaisen Sir Roger Penrosen vuonna 1974 keksimä epäperiodinen tiilitys on tuttu suomalaisillekin, sillä se on konkreettisena betonilaatoituksena toteutettu tiedekeskus Heurekan pihamaalla, pääsisäänkäynnin edustalla (tosin hiukan erilaisia tiiliä käyttämällä kuin kuvassa 1).

Epäperiodisuus tarkoittaa, ettei Penrosen tiilityksessä mikään kuvio toistu jaksollisesti —- toisin kuin tavanomaisessa tapettikankaassa. Vielä vahvemminkin: Aidosti epäperiodisessa tiilityksessä ei ole edes mahdollista asettaa tiiliä siten, että niistä muodostuisi säännöllisesti toistuva kuvio. Ainoastaan samoja kahta peruselementtiä käyttäen saadaan aikaan jopa äärettömän monta erilaista Penrosen tiilitystä. Ei silti ole mahdollista eksplisiittisesti verrata kahta tiilitystä toisiinsa, sillä mikä tahansa yhdestä Penrosen tiilityksestä erotettu äärellinen näytepala löytyy samanlaisena jokaisesta muustakin, jopa äärettömän monta kertaa!

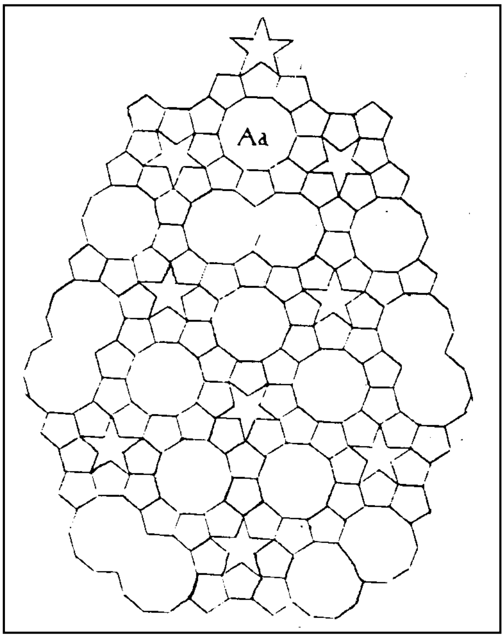
Sanomme, että kaksi Penrosen tiilitystä ovat *ekvivalentteja*, jos ne voidaan koko kuviota liu’uttamalla tai kiertämällä saattaa yhtenemään. Kyseessä on ekvivalenssirelaatio, joten voimme tarkastella sen ekvivalenssiluokkien muodostamaa tekijäavaruutta X. Kyseinen tekijäavaruus siis sisältää yhden edustajan kustakin ekvivalenssiluokasta eli kertoo kuinka monta ”aidosti erilaista” Penrosen tiilitystä on olemassa. Äärettömän monta – mutta millainen avaruus X oikeastaan on? Millainen topologia siihen voitaisiin panna? Klassisessa mielessä topologia tarkoittaa *avointen joukkojen* kokoelmaa eli tietoa siitä, mitkä tiilitykset ovat ”lähellä toisiaan”, jos kokonaiskuviota ruvetaan tyhjentämään äärellisillä osakuvioilla. Mutta edellä sanotun mukaanhan vastaus on: mitkä tahansa! Päädytään siis väistämättä triviaaliin topologiaan, jonka ainoat avoimet joukot ovat tyhjä joukko ja X itse. Tutkittava objekti X ei silti suinkaan ole triviaali, joten klassisen topologian lähestymistapa on sitä tutkittaessa väärä.

Alain Connes on esittänyt hedelmällisemmän tavan tutkia X:n rakennetta. Emme voi mennä yksityiskohtiin, mutta kaikki Penrosen tiilitykset voidaan tietyllä tavalla samaistaa nollista ja ykkösistä koostuviksi bittijonoiksi, joissa ei koskaan ole kahta ykköstä peräkkäin. Sanomme, että kaksi tällaista bittijonoa x_n ja y_n ovat ekvivalentteja, jos jostakin n:n arvosta n_0 alkaen ne yhtyvät, ts. $x_n = y_n$ kaikilla $n \geq n_0$. Bittijonojen ekvivalenssiluokkien joukko voidaan täydentää epäkommutatiiviseksi C^*-algebraksi, jolloin se antaa epäkommutatiivisen geometrian mukaisen mallin X:lle. Tämän mallin tuottama X:n vaihtoehtoinen "topologia" on kaikkea muuta kuin triviaali.

Epäperiodisten tiilitysten tarina sinänsä on huvittava esimerkki siitä, miten kuka tahansa harrastelija olisi voinut tehdä geometrian perusteita järisyttävän keksinnön. Lattioita ja seiniä on kaakeloitu maailman sivu, mutta näyttää siltä, ettei kukaan ollut ennen vuotta 1966 huomannut epäperiodisten tiilitysten olemassaoloa. Kyseisenä vuonna R. Berger julkaisi ensimmäisen epäperiodisen tiilityksen, mutta siihen tarvittiin peräti 20426 erilaista tiiltä! Alkoi kilpajuoksu tämän luvun pudottamiseksi. Berger itse toisti konstruktionsa 104 tiilellä, mutta pian D. E. Knuth teki sen 92 tiilellä, sitten H. Lauchli 40:llä, R. M. Robinson 35:llä, Roger Penrose 34:llä, Robinson jälleen 32:lla ja myöhemmin 24:lla, R. Ammann 16:lla ja myöhemmin 6:lla – kunnes lopulta Penrose onnistui kahdella tiilellä ja sai nimensä tässäkin yhteydessä tieteenhistoriaan.

Kuvassa 1 olevan Penrosen tiilityksen tiilet ovat vinoneliöitä, joista ensimmäisen sisäkulmat ovat 72° ja 108° ja toisen 36° ja 144°. Tiedekeskus Heurekan edustalla olevassa tiilityksessä on käytetty hiukan erilaisia tiiliä, joilla on kirjallisuudessa nimet "leija" (kite) ja "nuoli" (dart). Niissäkin esiintyvät kulmansuurudet ovat kuitenkin 36°:n monikertoja, toisin sanoen lukuarvoiltaan säännölliseen viisikulmioon ja kultaiseen leikkaukseen liittyviä. Tuntuu merkilliseltä, ettei näin yksinkertaista konfiguraatiota koskaan sattumalta keksitty, vaikka faustisia "pentagrammeja" ja kultaisia leikkauksia on piirrelty maailman sivu. Johannes Keplerin teoksessa *Harmonices Mundi* (1619) tosin esiintyy tiilitys, joka on hyvin lähellä Penrosen tiilitystä, mutta ei kuitenkaan ole sama asia (*kuva* 2).

Luonnossa epäperiodisia kidemuotoja noudattavat ns. *kvasikristallit*, esimerkiksi alumiini-palladium-manganeesi, mutta tätäkään ei ollut huomattu, vaikka kiteitä oli tutkittu ja luokiteltu vuosisatoja. Kun materiaalifyysikko Dan Shechtman löysi ensimmäiset kvasikristallit huhtikuussa 1982, häntä ei ensin tahdottu uskoa.

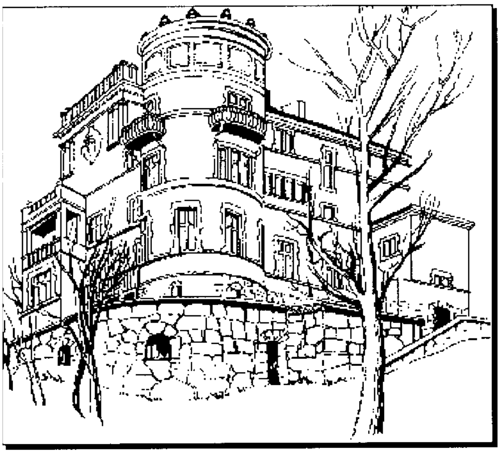


Kuva 2. Johannes Keplerin piirtämä tiilitys teoksesta Harmonices Mundi (1619).

Yhtenäiskenttäteoria

Connes tarkastelee tietenkin myös paljon yleisempiä avaruuksia kuin edellinen esimerkki. Hän on soveltanut epäkommutatiivista geometriaa jopa yhtenäiskenttäteorian mallintamiseen. Connes tarkastelee hiukkasfysiikan standardimallia, jonka rakenneryhmänä on U(1) x SU(2) x SU(3) ja jonka on määrä yhdistää sähkömagnetismi, heikko voima ja vahva voima. Teoriaansa varten Connes tarvitsee vain neljä ulottuvuutta – mikä on huomattava saavutus aikana, jolloin kilpailevissa stringym. teorioissa maailmankaikkeuden ulottuvuuksia tarvitaan vähintään kymmenen tai yksitoista! Tietenkin myös ulottuvuuksien käsite on tässä tulkittu epäkommutatiivisen geometrian mielessä. Connes'n esittämässä hiukkasfysiikan standardimallin uustulkinnassa on kuitenkin katsottu olevan liiaksi väljäliikettä, eikä se ole ennustanut uusia ilmiöitä. Paremmin Connes'n epäkommutatiivinen geometria on toiminut muun muassa kvantti-Hallin ilmiön mallintamisessa, mutta joudumme sivuuttamaan kaikki yksityiskohdat.

Alain Connes'n uuden geometrian ja sen fysikaalisten sovellusten yksityiskohtainen



Kuva 3. Institut Mittag-Leffler.

Kuva 4. Crafoord-mitali.

esittely edellyttäisi raskaan sarjan käsitekalustoa – kuten *K*-teoriaa ja syklistä kohomologiaa – jonka sisällyttäminen tähän artikkeliin ei olisi tarkoituksenmukaista. Koko epäkommutatiivinen geometria on sangen abstraktin tieteenalan maineessa, eikä Connes'n viitoittamille tutkimuspoluille ole ollut suurta tungosta. Vuoden kuluttua suomalaisillekin tutkijoille kuitenkin tarjoutuu erinomainen tilaisuus tavata Connes ja syventyä hänen ajatteluunsa, sillä Pohjoismaiden yhteisessä matematiikan tutkimuslaitoksessa Institut Mittag-Lefflerissä (*kuva 3*) järjestetään lukuvuoden 2003–2004 kestävä epäkommutatiivisen geometrian teemavuosi. Mukaan pääsee kutsusta.

Ruotsalaiset ovat tehokkaita rekrytoimaan kaikkien tieteenalojen huiput vierailemaan maahansa. Nobelin palkintojärjestelmän täydennyksenä heillä on olemassa Crafoordin palkinnot (*kuva 4*), jollaisen Connes siis viime vuonna sai (*kuva 5*). Anna-Greta ja Holger Crafoordin perustama palkinto jaetaan vuorovuosin matematiikan, geotieteiden, biotieteiden ja tähtitieteiden alalla; lisäksi erikoistapauksessa se voidaan myöntää nivelreuman hoidossa saavutetuista edistysaskelista. Palkinnon suuruus on 500 000 dollaria.

Kiitospuheessaan Ruotsin kuninkaalle Connes palautti mieleen, keitä muita ranskalaisia matemaatikkoja Ruotsin hovissa on liikkunut: Kuningatar Kristiina pestasi yksityisopettajakseen René Descartes'n, joka kuoli Tukholmassa keuhkokuumeeseen 1650. Kuningas Fredrik I puolestaan otti vuonna 1736 vastaan Lapinmatkalleen valmistautuvan Pierre Louis Moreau de Maupertuis'n ja lahjoitti hänelle susien karkottamista varten kiväärin.

Kuva 5. Alain Connes ottaa vastaan Crafoordin palkinnon Hänen Majesteetiltaan Ruotsin kuninkaalta Tukholmassa 26. syyskuuta 2001.

Connes filosofina

Suuren yleisön keskuudessa Connes on tullut tunnetuksi kahdesta filosofisesta teoksestaan *Matière à pensée* (1989) ja *Triangle de pensées* (2000), jotka on käännetty myös englanniksi.

Ranskan kielen sana *la pensée* on ihastuttava, koska sillä on kaksi merkitystä: 1. ajatus, ajattelu, 2. orvokki. Claude Lévi-Straussin klassikko *La pensée sauvage* voidaan siis ymmärtää joko ”villiksi ajatteluksi” tai ”villiksi orvokiksi”. Alain Connes'n kirjoissa tuskin on kysymys orvokeista, mutta ensimmäisen kirjan nimi voidaan silti ymmärtää kahdella tavalla: joko ”Ajattelun aihe” tai ”Ajatteleva aine”. Kyseessä on keskustelukirja Collège de France'n professorikollegan neurobiologi Jean-Pierre Changeux'n kanssa.

Keskustelumuotoista kirjaa on käytetty tieteen popularisoinnissa nykyaikana vähän, vaikka se on klassinen tyylilaji. Varmaankin Galileo Galilein *Dialogi kahdesta suuresta maailmanjärjestelmästä* (1632) on ollut esikuvana Connes'n toisessa kirjassa *Triangle de pensées* eli Ajatusten kolmio, jossa hän keskustelee kahden tiedeakatemiakollegansa André Lichnerowiczin ja Marcel Paul Schützenbergerin kanssa. (Molemmat ovat äskettäin edesmenneet.) Connes on kuin keskustelua ohjaileva Salviati, mutta myös Simpliciolla ja Sagredolla on paljon mielenkiintoista sanottavaa. Lichnerowicz tunnettiin sekä matematiikan että fysiikan tutkijana, erityisesti suhteellisuusteoreetikkona. Schützenberger puolestaan oli matematiikan ja fysiikan harrastustensa lisäksi myös psykiatri ja lingvisti. Tämän kirjan kansikuvassa on kolmio, jonka sivuissa lukee sanat: matematiikka, fysiikka, filosofia.

Keskustelukirjoja pitäisi tehdä enemmän, onhan nykymaailma monitieteinen ja -taiteinen! Jos joku sellaiseen ryhtyy, keskustelijoita on kuitenkin hyvä varata vähintään kolme. Alain Connes'n ja Jean-Pierre Changeux'n keskustelu ei näet luonnu erityisen hyvin, sillä molemmat tyrmäävät toisensa jo kirjan alkulehdillä. Yhteistä säveltä ei löydy, sillä Connes on tieteenfilosofialtaan platonisti, mikä on nykyaikana sangen epätavallista. Changeux taas on puhdasverinen fysikalisti, mikä taas on enemmän kuin tavanomaista.

Connes toistaa käsitystään matemaattisten ideoiden todellisesta ja ihmisestä riippumattomasta olemassaolosta ”siellä jossakin”, avaruusajan ulkopuolella, platonisten ideoiden maailmassa. ”Matemaatikon tehtävä on raottaa matemaattista todellisuutta verhoavaa huntua”, Connes sanoo. Platonistisen todellisuuden olemassaolosta todistaa se ilo, joka valtaa uutta luovan tutkijan mielen, kun hän löytää uuden idean. Piintyneen materialistin Changeux'n mielestä matemaattiset ideat sen sijaan ovat ”vain” aivojemme tuotetta, puhtaasti fysikaalisia prosesseja. Matematiikan laeissa ihastelemamme kauneus on aivojen lumoutumista omista aikaansaannoksistaan, jotka loppujen lopuksi ovat vain kulttuurievoluution tuotetta.

Hienovaraisia pistoja

Connes'n ja Changeux'n keskusteluyritys on kuin meikäläisten Tieteen päivien ”päivän paini”: liian polarisoitunut yhteenotto, jossa katsoja joutuu valitsemaan puolensa. Paremmin toimiva rakenne on jälkimmäisessä kirjassa, jossa keskustelijoita on kolme. Heti ei käydä käsirysyyn tai pyritä vastustajan täystyrmäykseen, vaan jokainen keskustelija joutuu hiomaan tyyliään, tarkentamaan argumenttejaan ja kehittelemään filosofiaansa. Ideoilla leikitellään, kuviot vaihtuvat, ja lopussa jokainen tuntee oppineensa uusia sukkeluuksia. Kirja on elegantti ja sen sisältämät pistot hienovaraisia: ranskalaisten kansallisurheilulaji ei olekaan paini vaan miekkailu.Kolmen akateemikon henkevä keskustelu etenee oppihistorian ja filosofian suurista teemoista kielen ja musiikin olemukseen. Tuntemamme kielet, niin tieteen kieli kuin tavallinen kieli, ovat loogiselta rakenteeltaan lineaarisia ja edellyttävät kantajakseen lineaarista aikaa. Ihmisen kokema aika ei kuitenkaan ole pelkistettävissä standardifysiikan tuntemaksi lineaariseksi ajaksi. Ihmisellä on ajan taju, mutta metatasolla myös ajan tajuamisen taju jne. Päässämme on käynnissä epälineaarisia prosesseja, joiden mallintaminen saattaa edellyttää kvantti-ilmiöiden huomioonottamista ja ehkäpä myös epäkommutatiivista geometriaa.

Läheisesti aiheeseen liittyen Roger Penrose puolestaan on havainnollistanut inhimillisen ajattelun olemusta käyttämällä metaforana epäperiodisia tiilityksiään. Mikään äärellinen osiohan ei riitä määräämään Penrosen kuvioiden kokonaishahmoa, joka on tajuttavissa vain äärettömyyksiin asti ulottuvana kokonaisuutena. Penrosen tiilitysten analysointi on siis liikaa tavanomaiselle tietokoneelle, mutta toisaalta niillä on yritetty mallintaa Turingin konetta.

Tietokonetta on tullut tavaksi verrata ihmiseen, tai ihmistä tietokoneeseen, mutta Connes'n mielestä tällaiset vertaukset ovat typeriä. Tuntemamme tietokoneet toimivat vain nykyhetkessä ja tekevät täsmälleen sitä mitä kulloinkin niihin olemme ohjelmoineet. Ihmisen ajatus sen sijaan liitelee myös avaruusajan ulkopuolella, menneisyydessä ja tulevaisuudessa, mahdollisissa ja mahdottomissa maailmoissa. Ihmisen minuus on suuri arvoitus, jolle Connes haluaisi postuloida alkukuvan, Alkuminuuden. ”Pidän itseäni eräänlaisena tulkintana, materiaalisena realisaationa abstraktista Persoonasta, joka on vuorovaikutuksessa fysikaalisen maailman kanssa”, hän kirjoittaa.

Connes asettaa pohdittavaksi kysymyksen, eikö ajattelumme mallina musiikki polyfonisuudessaan voisi kantaa rikkaampia loogisia ideoita kuin puhumamme kielet. Hän ehdottaa, että tarkastelisimme musiikkia lähemmin saadaksemme vihjeen, millaista tulevaisuuden kvanttitietokoneiden tarvitsema kvanttilogiikka voisi olla – onhan sinfoniaorkesterin soittamassa partituurissa huomioonotettava useiden subjektien aikakokemusten välisiä vastaavaisuuksia, toisin kuin lineaarisesti etenevässä yhden subjektin logiikassa, jota matematiikassa tavallisesti käytämme.

”Ajatusten kolmion” loppusanat lausuu juutalainen fyysikko Moshe Flato, joka vertaa käytyä keskustelua Jobin kirjaan. Hän jättää lukijalle haasteeksi uusvanhan kysymyksen: Jos rupeamme uskomaan matemaattiseen ideaalitodellisuuteen, eikö meidän olisi postuloitava jotain samantapaista myös moraalin alalla?

Kirjoittaja on Helsingin ja Jyväskylän yliopistojen matematiikan dosentti.