



Matematiikan kauneus

Olli Lehto

Informaatiotekniikka on tuonut matemaattisen kulttuurin keskuuteemme ennalta aavistamattoman voimakkaasti. Tässä yhteydessä on syntynyt matematiikkaakin koskevia arvokeskusteluja. Kuinka kova tiede matematiikka oikeastaan on?

Tässä valossa "Matematiikan kauneus" on ajankohtainen ja tervetullut aihe, mutta ongelmaton se ei ole. Tässä niteessä on myöskin säveltäjä Einojuhani Rautavaaran kirjoitus musiikin kauneudesta. Näissä kahdessa aiheessa "Matematiikan kauneus" ja "Musiikin kauneus" on eräs olennainen ero. Musiikin kauneutta pidetään jotenkin itsestään selvänä, sitä ei tarvitse selitellä.

Myös matematiikassa on vahva esteettinen piirre. Mutta vaikka matematiikkaa opetetaan koko maailmassa kaikille kouluikäisille, se on siltäkin hyvin eristäytynyt kulttuurin muoto. Sen kauneus on kätkeytyneenä kuin musiikin, sen vuoksi että suuri osa tätä kauneutta ei helposti avaudu muille kuin matematiikkaa tunteville. Tietysti musiikistakin tuntija saa irti toisella tavalla kuin maallikko, mutta musiikkia kuunnellessa oppimattomankaan eteen ei nouse sellaista seinää kuin matemaattisen teorian hienouksia selitettäessä. Jean Sibeliuksen viulukonsertto avautuu aivan toisella tavalla kuin Rolf Nevanlinnan arvojenjakautumisteoria.

Matematiikka-avusteinen kauneus on kyllä usein helposti nähtävissä, erityisen vaikuttavasti rakennustaiteessa. Klassillinen esimerkki ovat Egyptin muotokauniit pyramidit, joiden rakentamisessa matematiikalla oli tärkeä osansa. Muina raskaimman sarjan esimerkkeinä voi mainita kaksi Rooman kaunista aukiota. Capitolium-kukkulan Piazza del Campidogliota suunnitellessaan Michelangelo turvautui matemaattisiin laskelmiin, kun hän pyrki saamaan rakennusten mittasuhteet katsojan silmää miellyttäväksi ja kun hän suunnitteli torin kiveytyksen kuvioita ja torille johtavaa ramppeja. Matematiikkaa käytettiin myös suunniteltaessa Pietarin kirkon edessä olevaa mahtavaa aukiota, erityisesti sen pylväsrivistöä. Rooman toreja ihaillessaan katsoja ei tosin taida juurikaan matematiikkaa ajatella.

Matematiikan sisäinen kauneus

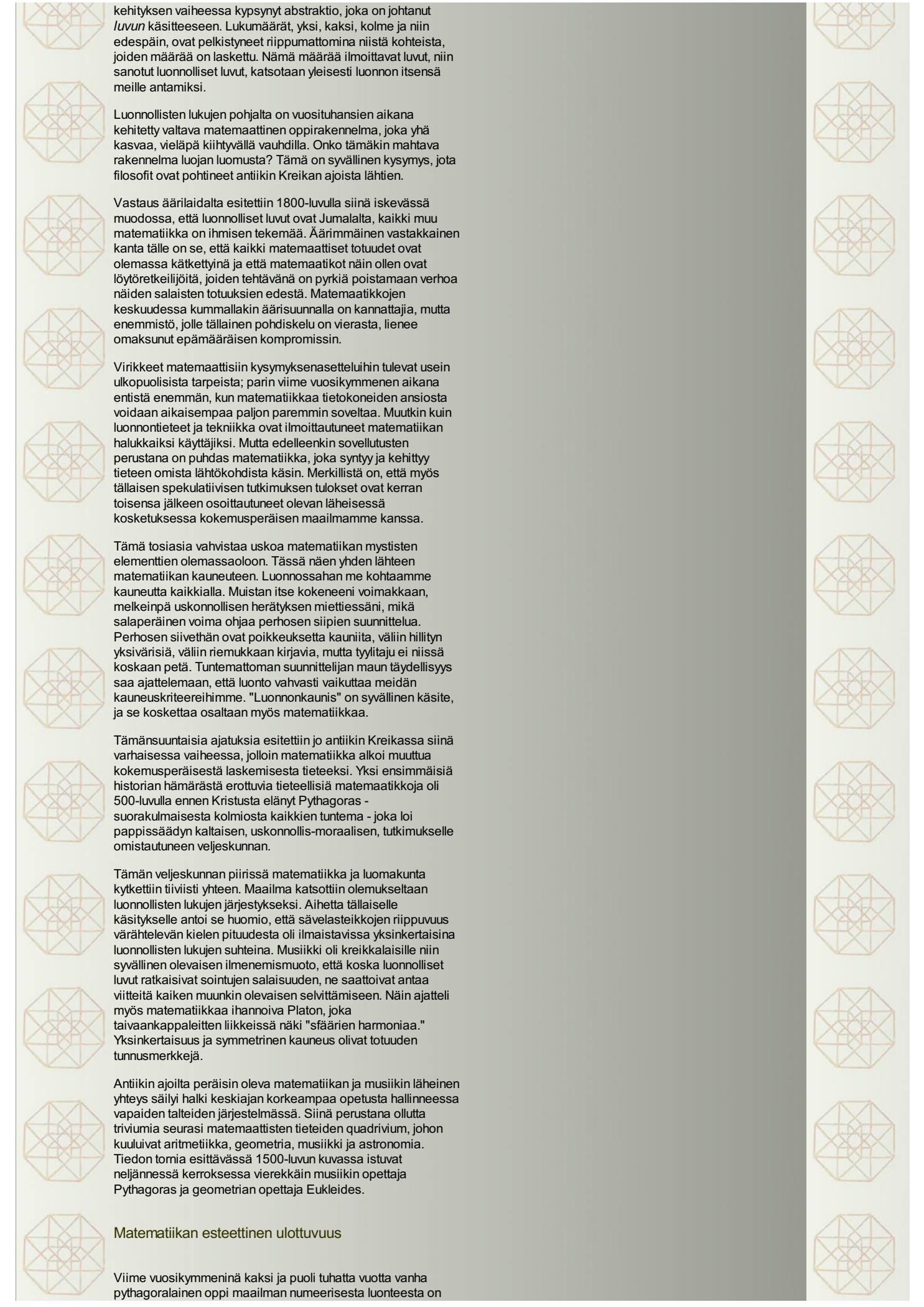
Matematiikassa itsessäänkin on paljon silmää miellyttävää visuaalisuutta, kauniita käyriä ja pintoja ja säännöllisiä kolmiulotteisia kappaleita. Symmetrisiä geometrisia tasokuvioita on paljon käytetty ornamentiikassa; yhtenä vaikuttavana esimerkkinä ovat islamin taiteen koristeelliset geometriset kuviot.

Vuonna 1978 Helsingissä pidettiin suuri matematiikan kansainvälinen kongressi, jonka johdosta julkaistiin matematiikka-aiheinen postimerkki. Suunnittelutyön saanut taiteilija sanoi haluavansa tehdä kauniin matematiikkaa kuvaavan merkin, mutta myönsi minulle muutamaa viikkoa myöhemmin joutuneensa pitkän suunnittelu-uransa vaikeimman tehtävän eteen. Yritin kaupata hänelle kongressin logoa, joka oli modulifunktion teoriasta tunnettu kaunis kuvio. Se ei kelvannut, koska postimerkki ei saanut mainostaa kongressia, mutta muita malliksi tuomiani kuvia hyväksikäyttäen taiteilija teki mielestäni ihan laatuunkäyvän merkin. Lohdutukseksi minulle hän kelpuutti kongressin logon ensipäivän kuoren leimaan. Muut postimerkin julkaisseet kongressin isäntämaat ovat useimmiten vältäneet matematiikan kuvaamisen valkeuden välitsemällä merkin aiheeksi tunnettuja kansallisia matemaatikkojaan.

Visuaalisen kauneuden lisäksi matematiikka voi pintaa syvemmillä tarjota suurtakin esteettistä mielihyvää kristallinkirkaasta, loogisesti etenevästä, hienoja oivalluksia sisältävästä päättelystä ja, usein vieläkin vaikuttavammin, todistusketjun lopputuloksesta, joka parhaimmillaan sisältää syvällistä tietoa tiiviissä, elegantissa muodossa.

Yksi lähestymistapa tällaiseen kauneuteen on historiallinen, ja se johtaakin meidät suoraan matematiikan salaperäiseen maailmaan. Matematiikan alkuna on jossain ihmisen





kehityksen vaiheessa kypsytetty abstraktio, joka on johtanut *luvun* käsitteeseen. Lukumäärät, yksi, kaksi, kolme ja niin edespäin, ovat pelkistyneet riippumattomina niistä kohteista, joiden määrää on laskettu. Nämä määrää ilmoittavat luvut, niin sanotut luonnolliset luvut, katsotaan yleisesti luonnon itsensä meille antamiksi.

Luonnollisten lukujen pohjalta on vuosituhansien aikana kehitetty valtava matemaattinen oppirakennelma, joka yhä kasvaa, vieläpä kiihtyvällä vauhdilla. Onko tämäkin mahtava rakennelma luojan luomusta? Tämä on syvälinen kysymys, jota filosofit ovat pohjineet antiikin Kreikan ajoista lähtien.

Vastaus ääriäidä esitettiin 1800-luvulla siinä iskevässä muodossa, että luonnolliset luvut ovat Jumalalta, kaikki muu matemaattikka on ihmisen tekemää. Äärimmäinen vastakkainen kanta tälle on se, että kaikki matemaattiset totuudet ovat olemassa kätettyinä ja että matemaatikot näin ollen ovat löytöretkeilijöitä, joiden tehtävänä on pyrkiä poistamaan verhoa näiden salaisten totuuksien edestä. Matemaatikkojen keskuudessa kummallakin äärisuunnalla on kannattajia, mutta enemmistö, jolle tällainen pohdiskelu on vierasta, lienee omaksunut epämääräisen kompromissin.

Virikkeet matemaattisiin kysymyksenasetteluihin tulevat usein ulkopuolisista tarpeista; parin viime vuosikymmenen aikana entistä enemmän, kun matemaattikka tietokoneiden ansiosta voidaan aikaisempaa paljon paremmin soveltaa. Muutkin kuin luonnontieteet ja tekniikka ovat ilmoittautuneet matematiikan halukkaiksi käyttäjiksi. Mutta edelleenkin sovellutusten perustana on puhdas matemaattikka, joka syntyy ja kehittyy tieteen omista lähtökohdista käsin. Merkittävää on, että myös tällaisen spekulatiivisen tutkimuksen tulokset ovat kerran toisensa jälkeen osoittautuneet olevan läheisessä kosketuksessa kokemusperäisen maailmamme kanssa.

Tämä tosiasia vahvistaa uskoa matematiikan mystisten elementtien olemassaoloon. Tässä näen yhden lähteen matematiikan kauneuteen. Luonnossahan me kohtaamme kauneutta kaikkialla. Muistan itse kokeneeni voimakkaan, melkein epäuskonallisen herätyksen miettiessäni, mikä salaperäinen voima ohjaa perhosen siipien suunnittelua. Perhosen siivethän ovat poikkeuksetta kauniita, väliin hillityn yksivärisiä, väliin riemukkaan kirjavia, mutta tyyliä ei niissä koskaan petä. Tuntemattoman suunnittelijan maun täydellisyys saa ajattelemaan, että luonto vahvasti vaikuttaa meidän kauneuskriteereihimme. "Luonnonkaunis" on syvälinen käsite, ja se koskettaa osaltaan myös matemaattikka.

Tämänsuuntaisia ajatuksia esitettiin jo antiikin Kreikassa siinä varhaisessa vaiheessa, jolloin matemaattikka alkoi muuttua kokemusperäisestä laskemisesta tieteeksi. Yksi ensimmäisiä historian hämärästä erottuvia tieteellisiä matemaatikkoja oli 500-luvulla ennen Kristusta elänyt Pythagoras - suorakulmaisesta kolmiosta kaikkien tuntema - joka loi pappissäädyn kaltaisen, uskonnollis-moraalisen, tutkimukselle omistautuneen veljeskunnan.

Tämän veljeskunnan piirissä matemaattikka ja luomakunta kytkettiin tiiviisti yhteen. Maailma katsottiin olemuksestaan luonnollisten lukujen järjestykseksi. Aihetta tällaiselle käsitykselle antoi se huomio, että sävelasteikkojen riippuvuus värähtelevän kielen pituudesta oli ilmaistavissa yksinkertaisina luonnollisten lukujen suhteina. Musiikki oli kreikkalaisille niin syvälinen olevaisen ilmenemismuoto, että koska luonnolliset luvut ratkaisivat sointujen salaisuuden, ne saattoivat antaa viitteitä kaiken muunkin olevaisen selvittämiseen. Näin ajatteli myös matemaattikka ihannoiva Platon, joka taivaankappaleitten liikkeissä näki "sfäärien harmoniaa." Yksinkertaisuus ja symmetrisuus olivat totuuden tunnusmerkkejä.

Antiikin ajoilta peräisin oleva matematiikan ja musiikin läheinen yhteys säilyi halki keskiajan korkeampaa opetusta hallinneessa vapaiden talteiden järjestelmässä. Siinä perustana ollut triviumia seurasi matemaattisten tieteiden quadrivium, johon kuuluivat aritmetiikka, geometria, musiikki ja astronomia. Tiedon tomia esittävässä 1500-luvun kuvassa istuvat neljännessä kerroksessa vierekkäin musiikin opettaja Pythagoras ja geometrian opettaja Eukleides.

Matematiikan esteettinen ulottuvuus

Viime vuosikymmeninä kaksi ja puoli tuhatta vuotta vanha pythagoralainen oppi maailman numeerisesta luonteesta on

saanut paljon uutta tuulta purjeisiinsa. Nythän kaikkea mahdollista tietoa, mukaan luettuna ääni ja kuva, on opittu digitoimaan eli esittämään luonnollisten lukujen avulla.

Matematiikan olemusta ja samalla sen kauneutta voi lähestyä toistakin tietä käyttämällä hyväksi eri kulttuureja koskevaa keskustelua, jota Suomessa on käyty 1960-luvulta lähtien. Tarkoitin niitä keskusteluja, jotka oli käynnistänyt englantilainen fyysikko, kirjailija ja hallintomies Sir Percy Charles Snow. Snow oli nähnyt vakavana ongelmana humanistisen ja luonnontieteellisen kulttuurin ajautumisen erilleen toisistaan.

Suomessa ensimmäisiä Snown herättämään problematiikkaan kantaa ottaneita oli Rolf Nevanlinna, joka päätyi siihen, että Snown ilmaisema huoli oli aiheeton, koska kulttuuri on jakamaton. On vain yksi kulttuuri. Nevanlinnan esittämät perustelut ovat sellaisia, että ne auttavat ymmärtämään, miksi matematiikassa on esteettinen ulottuvuus.

Lähtökohtana oli toteamus, että luovassa tieteellisessä tai taiteellisessa työssä tarvitaan ensiksi idea. Idean toteuttaminen on kulttuurista toimintaa, joka tarkemmin sanottuna merkitsee sitä, että johonkin abstraktiin taikka konkreettiseen materiaaliin luodaan kuvaa tästä ideasta. Näin yleisellä tasolla liikuttaessa tämä kuvailu pätee samalla tavalla kaikkiin kulttuuritoimintoihin. Matemaatikko luo eräällä tavalla kuvateosta, kun hän laatii tieteellistä teoriaansa. Aivan samalla tavalla taiteilija pyrkii toteuttamaan oivaltamaansa ideaa omassa materiaalissaan; kuvataiteessa, musiikissa tai kirjallisuudessa.

Lähtökohtana ollut idea voi syntyä välähdyksenomaisesti, mutta sen kuvaaminen, muodon antaminen sille, on yleensä paljon aikaa ja vaivaa vaativa prosessi, kaukana rutiinista. Sibelius kertoi päiväkirjoissaan, kuinka hän takoi ja takoi pyrkiessään antamaan mielessään liikkuville sävelkuvioille lopullisen muodon.


Helposti herää kysymys, eikö idean toteuttajan vapaus matematiikan tapauksessa ole suuresti rajoitettu sen takia, että matematiikka on niin tiukasti sidoksissa sääntöihinsä. Matemaattisia tuloksiahan johdetaan tietyistä perusaksioomista soveltamalla yksinkertaisia, yleisesti hyväksytyjä loogisia päättelyitä. Vapautta kuitenkin on, koska matemaattisille ideoille voidaan moninaisin tavoin antaa muoto, ja juuri muodon antaminen sallii matematiikkaan subjektiivisuutta. Sata vuotta sitten saksalaismatemaatikko Georg Cantor, joukko-opin luoja, meni jopa niin pitkälle, että julisti matematiikan olemuksen muodostuvan sen vapaudesta.

Tämä vapaus on kuitenkin kaukana mielivallasta, sillä sitä ohjailevat tiukat periaatteet. Tämä merkillinen vastakkaisuus, samanaikainen vapaus ja ankaruus, antaa matematiikalle erikoisaseman tieteiden joukossa ja vie sen lähelle kuvaamataiteita. Matemaatikon pyrkimys luoda ideasta kuva on pitkälti samanlainen kuin taidemaalarin tai kuvanveistäjän tehtävä.

Kauneus ja todistus

Tällainen väite kaipaisi tuekseen konkreettisen esimerkin. Taas tulee mieleen Rolf Nevanlinna, joka korostaessaan muodon antamisen merkitystä matemaattisessa tutkimuksessa meni niin pitkälle, että sanoi esteettisten näkökohtien paljolti ohjailleen hänen töitään. Hänen tutkimuksiansa selittämistä vaikeuttaa kuitenkin jo edellä mainitsemani matematiikan abstraktin käsitemaailman synnyttämä eristyneisyys. Vähän sama tilanne kuin se, että kiinankielellä kirjoitetun runon kauneus jää ymmärtämättä, ellei tunne kiinalaisia kirjoitusmerkkejä.

Yritän kuitenkin antaa jonkinlaisen käsityksen kauneuden ohjaavasta vaikutuksesta Nevanlinnan tutkimuksessa. Nevanlinnan 1920-luvulla kehittämä meromorffifunktioiden arvojenjakautumisteoria on merkittävimpiä ellei merkittävien suomalaisen panos matematiikkaan. Tämän teorian kulmakivenä on Nevanlinnan ensimmäiseksi pääauseeksi nimetty teoreema. Se on tulos, joka varsin vähällä laskemisella on luettavissa kaavoista, jotka olivat olemassa jo 1900-luvun alkaessa. Mutta tarvittiin taiteellista silmää huomaamaan, että nuo kaavat sopivaan muotoon saatettuina ja sopivasti tulkittuina pitivätkin sisällään mitä kauneimman tuloksen, sen, että jokainen meromorffifunktio on saamiensa arvojen suhteen symmetrinen. Funktio voi kyllä saada joitain arvoja normaalia harvemmin, mutta tämän vajauksen se aina kompensoi approksimoimalla tällaista poikkeuksellista arvoa niin paljon



tavanmukaista voimakkaammin, että tasapainotila saavutetaan. Sensaatiomainen tulos, vaikka sensaatio kieltämättä rajoittui hyvin pieneen joukkoon maapallon ihmisiä.

Kun matemaattinen tulos on saavutettu, ei ole harvinaista, että sille keksitään uudenlainen todistus. Tässäkin kävi niin, että kun Nevanlinna kauneuden viitoittamaa tietä kulkien oli päätenyt ensimmäiseen päälauseeseensa, huomattiin myöhemmin, että samaan tulokseen päästään suoremmin kokonaan toisenlaisia menetelmiä käyttäen. Minulla on omakohtainenkin kokemus siitä, kuinka suuresti Nevanlinnaa harmitti tällainen oikotie, jota kuljettaessa hänen ajatuksiaan ohjailleet esteettiset näkökohdat oli sivuutettu. Vailla kauneusarvoja tuo oikotiekään ei ollut suoraan asiaan menevässä yksinkertaisuudessaan ja antaessaan lopputuloksen muodossa, joka oli vielä havainnollisempi ja tarkempi kuin Nevanlinnan versio. Nevanlinna oli kauneuden voimakkaasti sisäistänyt matemaatikko, mutta mikään yksinäinen ratsastaja hän ei tässä suhteessa ollut. On olemassa sellainen käsite kuin 'matemaattinen maku', joka on hämmästyttävän universaalinen. Kansallisuudesta riippumatta matemaatikko yleensä tietää, mikä on kaunista matematiikkaa ja mikä ei. Mieleeni on jäänyt nuoruudessani lukemani maailmanmaineeseen nousseen suomalaissyntyisen Lars Ahlforsin matemaattinen julkaisu, jossa hän eräästä esittämästään tuloksesta sanoi, että sen todistus on niin ruma, ettei hän halua nähdä sitä painettuna. Englanninkielisen alkuperäistekstin sana oli *ugly*.

Matematiikan paljastuva kauneus

Matematiikassa on paljon sellaista silmiin vetoavaa kauneutta, joka pitkään pysyi piilossa myös matemaatikoilta. Tulosten visualisointi olisi vaatinut niin vaivalloisia laskutoimituksia, ettei niitä käytännössä voinut suorittaa. Tietokoneiden ansiosta tilanne on nyt radikaalisti muuttunut, ja paljon uutta kauneutta on tullut esille.

Monet matematiikkaan vähemminkin perehtyneet ovat kuulleet fraktaaleista, merkillisistä kuvioista, joissa sama struktuuri toistuu yhä pienemmässä mittakaavassa. Näihin kuvioihin oli johdettu matematiikan perustutkimuksesta käsin jo kauan ennen tietokoneita; yhtenä pioneerina oli Helsingin yliopiston matematiikan professori ja sittemmin kansleri Pekka Myrberg. Varsinaisesti teoria sai kuitenkin vauhtia vasta sen jälkeen, kun tietokoneet oli valjastettu suorittamaan laskuja ja piirtämään tulokset näkyviin. Kun mielenkiinto fraktaaleihin näin lisääntyi, alettiin ymmärtää niiden käyttökelpoisuus monissa sovellutuksissa.

Viime elokuussa Helsingissä pidetyn kansainvälisen matemaattisen konferenssin yhteydessä tšekiläinen Ranskan kulttuurikeskus järjesti tiloissaan Keskuskadulla fraktaaleja koskevan näyttelyn. Tästä maailmaa kiertäneestä näyttelystä on Pariisissa opetustarkoituksissa tehty videofilmi, joka tuo vaikuttavasti esille matematiikan dynaamista kauneutta. Esitetyt liikkuvat kuvat eivät ole mielivaltaista tietokonegrafiikkaa vaan mielekkäiden matemaattisten probleemoiden antamia tuloksia.

Kirjoittaja on akateemikko.