Topologia ja fysiikka

Osmo Pekonen

Matematiikan klassisia päähaaroja ovat analyysi, algebra ja geometria, joiden kaikkien juuret ovat jo antiikissa. Fysiikan teorioiden matemaattisessa mallintamisessa tarvitaan tietysti näitä kaikkia. Hieman yllättävämpää on, että monissa fysiikan ilmiöissä myös topologia näyttelee ratkaisevan tärkeää osaa. Topologia itsenäistyi tieteenalana melko myöhään, vasta 1800-luvulla. Viime vuosikymmeninä topologian ja fysiikan vuorovaikutuksesta on tullut yksi matemaattisen fysiikan kiehtovimpia tutkimustrendejä.

Topologia on melko nuori tieteenala. Sana 'topologia' tavataan ensimmäisen kerran saksalaisen J B Listingin vuonna 1847 ilmestyneessä teoksessa *Vorstudien zur Topologie*.

Topologian juuret ulottuvat kuitenkin kauemmaksi historiaan. Ensimmäinen kuuluisaksi tullut topologinen probleema oli Königsbergin siltojen ongelma, jonka sveitsiläinen Leonhard Euler ratkaisi vuonna 1736. Königsbergin kaupunki sijaitsi Pregel-joen varrella Itä-Preussissa (nykyisin se on nimeltään Kaliningrad ja kuuluu Venäjään). Kaupungin keskusta sijaitsi joen saarella, jonka yhdisti mantereeseen seitsemän siltaa (*kuva 1*). Königsbergin asukkailla oli sunnuntaikävelyillään tapana kulkea pitkin siltojaan ja pohdiskella olisiko mahdollista kiertää kaikki sillat astumatta kahta kertaa samalle sillalle. Kokeellinen vastaus oli kielteinen. Euler esitti asialle matemaattisen todistuksen *graafiteorian* avulla: Jos kaupungin eri sektorit (A, B, C, D) kutistetaan pisteiksi ja niitä yhdistävät sillat viivoiksi, tilannetta voidaan havainnollistaa yksinkertaisen kaavion avulla (*kuva 2*).

Tällaista kaaviota sanotaan yleisesti *graafiksi*. Lukija piirtäköön mielivaltaisia lisäesimerkkejä. Pisteet ovat graafin *kärkiä* ja viivat graafin *särmiä*. Graafi on *yhtenäinen*, jos kustakin sen kärjestä voidaan särmiä pitkin kulkea jokaiseen muuhun kärkeen. Mahdollisia kulkureittejä voi tietysti olla useita. Mikäli samaa särmää pitkin ei kuljeta kahta kertaa, kyseessä on kärkiä yhdistävä *polku*. Jos polun alku- ja loppupiste ovat sama kärki, kyseessä on *suljettu* polku. Näitä käsitteitä käyttäen Königsbergin seitsemän sillan ongelma voidaan helposti yleistää koskemaan mielivaltaista graafia.

Olkoon kärjen *kertaluku* siitä alkavien särmien lukumäärä. Euler todisti seuraavan lauseen: "Olkoon annettu yhtenäinen graafi. Jos sen kaikki särmät voidaan kiertää samaa polkua pitkin, niin joko jokaisen kärjen kertaluku on parillinen tai tasan kahden kärjen kertaluku on pariton ja kaikkien muiden parillinen." Edellisessä tapauksessa kiertokäynti onnistuu suljettua polkua pitkin; jälkimmäisessä tapauksessa taas parittoman kertaluvun kärjet voidaan ottaa polun alku- ja loppupisteiksi. (Pyydämme lukijaa vaivaamaan päätään näiden tulosten todistamiseksi!) Vilkaisu Königsbergin siltojen muodostamaan kuvioon osoittaa, ettei Eulerin ehdon kumpikaan tapaus ole voimassa, joten vaaditun kaltainen kiertokäynti on mahdoton.

Sivumennen sanoen Königsberg tuhoutui pahoin vuoden 1945 pommituksissa, ja kuuluisista seitsemästä sillasta vain neljä on jäänyt jäljelle. Matemaatikko voi vain surullisena todeta siltaongelman muuttuneen triviaaliksi.

Topologian perusongelma: monistojen luokittelu

Matematiikassa voimme tutkia kaikenulotteisia avaruuksia. Graafiteoria havainnollistaa, että jo yksiulotteistenkin avaruuksien - pelkkien viivojen - topologisesta teoriasta löytyy kiinnostavia ongelmia. Topologian peruskäsite on *n-ulotteinen monisto*. Se tarkoittaa yhtenäistä joukkoa, joka jokaisen pisteensä ympäristössä muistuttaa tavanomaista n-ulotteista euklidista avaruutta, tapauksessa n=1 reaalisuoraa, tapauksessa n=2 euklidista tasoa jne. Graafi ei tämän määritelmän mukaan yleisesti ole 1-ulotteinen monisto, sehän voi kärkipisteissään haarautua, toisin kuin reaalisuora. Yksiulotteiset monistot onkin äkkiä luokiteltu: Itseään leikkaava viiva ei tule kysymykseen, vaan viivan on joko jäätävä päistään avoimeksi tai sulkeuduttava silmukaksi.

Moniston *yhtenäisyys* tarkoittaa, että sen jokaiset kaksi pistettä voidaan yhdistää jatkuvalla viivalla; muussa tapauksessa monistolla on useampia osia eli *komponentteja*.

Yksiulotteisen moniston *suunnistaminen* taas merkitsee sen varustamista kiertokäynnin suuntaa osoittavalla nuolella, mikä on aina mahdollista. Pinnan (n=2) tai kappaleen (n=3) *suunnistuvuudesta* puhuminen sen sijaan on hankalampaa. Monisto on suunnistuva, jos sen kunkin pisteen ympäristö voidaan varustaa koordinaatistolla, jonka "kätisyys" pysyy hyvin määriteltynä pisteen liikkuessa monistolla. Tunnetuin esimerkki ei-suunnistuvasta pinnasta on *Möbiuksen nauha* (*kuva 3*). Kun Möbiuksen nauhan ympäri tehdään kierros, vasenkätinen koordinaatisto vaihtuu oikeakätiseksi.

Moniston yhtenäisyys tai suunnistuvuus ovat esimerkkejä topologisista ominaisuuksista. Tämä tarkoittaa, että ne säilyvät *jatkuvissa* muunnoksissa, toisin sanoen kun monistoa deformoidaan kuin muovailuvahaa muotoillen tai taikinaa vaivaten; moniston leikkaamiseen tai liimaamiseen sen sijaan ei ole lupaa. Kaksiulotteisia monistoja voidaan kuvitella erilaisten munkkien ja rinkelien pintoina. Tällaisten leivonnaisten "reikien" (tai oikeastaan "kahvojen") lukumäärä on topologinen invariantti, nimeltään pinnan genus.

Topologian perusongelmana voidaan pitää n-ulotteisten monistojen yleistä luokittelua mahdollisimman pitkälle. On siis kehitettävä *topologisia invariantteja*, joiden avulla kaksi annettua monistoa voidaan topologisesti erottaa toisistaan. Topologisesti ekvivalentteja monistoja sanotaan *homeomorfisiksi.* Kaikkien monistojen täydellinen luokittelu tiedetään periaatteessakin ratkeamattomaksi ongelmaksi ulottuvuudesta 4 alkaen.

Yksinkertainen tapa tutkia pintojen homeomorfisuutta on vertailla pinnalle mahtuvien *kutistuvien silmukoiden* lukumäärää. Esimerkiksi pyöreän pallon pinnalla on ilmeistä, että jokainen silmukka voidaan kutistaa pisteeksi. Rinkilänmuotoisen kappaleen eli *toruksen* pinnalta sen sijaan löytyy monenlaisia kutistumattomia silmukoita. Pallopinta ja torus eivät siis ole homeomorfisia.

Kaikki kaksiulotteiset pinnat, jotka ovat yhtenäisiä, suunnistuvia, reunattomia ja *kompakteja* (ts äärellissäteiseen palloon mahtuvia) voidaan luokitella yksinomaan genuksen mukaan. Tavallinen pyöreä munkki vastaa genuksen 0 pintaa; tavallinen rinkeli genuksen 1 pintaa; viipurinrinkeli leipomistavasta riippuen vähintään genuksen 2 pintaa (*kuva 4*). Topologin silmin katsottuna myöskään rinkelillä ja kahvikupilla ei ole eroa, koska molemmat ovat genuksen 1 pintoja!

Genuksen g kantama informaatio voidaan yhtä hyvin koodata *Eulerin karakteristikan* nimellä tunnettuun invarianttiin. Sen arvo on genuksen g tapauksessa 2-2g. Myöhemmin opimme mitä hyötyä tästä on.

Ulottuvuudessa 1 kaksi annettua viivanpätkää, jotka eivät muodosta silmukkaa (tai jotka muodostavat silmukan), ovat aina keskenään homeomorfisia. Niillä voi kuitenkin olla eri pituus. Se on *metrinen* ominaisuus, joka ei kuulu topologian vaan geometrian tutkimuskohteisiin. Metrisiä ominaisuuksia ovat myös pinta-ala, tilavuus, kulman suuruus jne. Tällaisiin suureisiin päästään käsiksi, kun topologinen monisto varustetaan *metriikalla* eli metrisellä rakenteella.

Monistolla annetun metrisen rakenteen tärkein invariantti on *kaarevuus.* Viivan tai pinnan tapauksessa kaarevuuden käsite on ymmärrettävissä myös arkikielen avulla. Esimerkiksi tavallisella paperiarkilla ei ole kaarevuutta: se on *litteä* avaruus. Jos paperiarkki taivutetaan esimerkiksi sylinteriksi tai kartioksi, kyseessä on edelleen litteä avaruus. Paperiarkkia ei sen sijaan ole mahdollista taivuttaa pallopinnaksi, joka on kaareva. Pinnan kaarevuuden määritteli ensimmäisenä saksalainen Carl Friedrich Gauss arkipäiväisen intuitiomme pohjalta. Sen sijaan n-ulotteisten monistojen kaarevuudesta puhuminen edellytti Gaussin kaarevuuden syvällistä yleistämistä, jonka toteutti saksalainen Bernhard Riemann. Gaussin kaarevuus on kaksiulotteisen pinnan jokaisessa pisteessä määritelty numeerinen invariantti, kun taas Riemannin kaarevuus on huomattavasti monimutkaisempi objekti: neli-indeksinen tensori. Kaarevuudella on syvällinen fysikaalinen merkitys. Esimerkiksi neliulotteisen avaruusajan kaarevuus on yleisen suhteellisuusteorian peruskäsite.

Matemaatikoilta meni pitkään, ennen kuin moniston topologisten ja metristen ominaisuuksien välillä alettiin tehdä selvä ero. Aluksi molempia tutkimuskohteita kutsuttiin suuripiirteisesti vain geometriaksi. Gauss pahoitteli eräässä kirjoituksessaan vuonna 1832, etteivät *Geometria Situs* (topologia) ja *Geometria Magnitudinis* (metrinen geometria) vielä olleet erillisiksi tunnustettuja tieteenaloja. Gaussin kuuluisa kontribuutio oli hänen "suurenmoinen teoreemansa", Theorema Egregium, joka mahdollisti pinnan kaarevuuden laskemisen sen metriikasta. Siitä ei ollut pitkä matka tulokseen, josta Gauss jakaa kunnian ranskalaisen Pierre Bonnet'n kanssa: "Suunnistuvan ja kompaktin pinnan Eulerin karakteristika on (positiivisella vakiolla normitusta vaille) yhtä kuin pinnan keskikaarevuus." Gaussin-Bonnet'n teoreema on prototyyppi *indeksilauseista*, jotka ilmaisevat monistojen topologisten ja metris-analyyttisten invarianttien välisiä syvällisiä yhteyksiä.

Topologinen invariantti on luonteenomaisesti *globaali* invariantti, joka antaa informaatiota tutkittavan kohteen kokonaishahmosta. Kaarevuus puolestaan on *lokaali* ominaisuus. Gaussin-Bonnet'n teoreemassa esiintyvä keskikaarevuus on silti globaali, sehän lasketaan integroimalla Gaussin kaarevuus koko moniston yli. Moniston globaalin topologian - vaikkapa genuksen - ennalta määrääminen asettaa ankaria reunaehtoja kaarevuudelle. Gaussin-Bonnet'n teoreeman mukaan genuksen 0 pinnalla positiivinen kaarevuus dominoi; vähintään genusta 2 olevilla pinnoilla taas negatiivinen. Torus (genus 1) on rajatapaus, sillä sen Eulerin karakteristika on nolla: positiivinen ja negatiivinen kaarevuus kumoavat keskikaarevuutta laskettaessa toisensa.

Ranskalainen Henri Poincaré tulkitsi Eulerin karakteristikan uudelleen pinnan dynamiikan näkökulmasta. Niinpä puhutaan myös Eulerin-Poincarén karakteristikasta. Poincaré analysoi pinnan "kentissä" (vaikkapa maapallon tuulien tai merivirtojen vuoviivoissa) esiintyviä singulariteetteja, joiden luonteelle pinnan topologia myös asettaa reunaehtoja. Poincarén tuloksella on sovelluksia jopa meteorologiassa. Topologinen selitys sille tosiasialle, että maapallon ilmakehässä aina vaikuttaa sykloni ja antisykloni, on viime kädessä planeettamme genus, joka on 0. Jupiter-planeetan kaasukehässä singulariteetit näkyvät kahtena täplänä.

Gaussin, Riemannin ja Poincarén geometristen ja topologisten innovaatioiden taustalla oli usein voimakas fysikaalinen intuitio siitä, kuinka asioiden täytyy olla. Leikkisästi voimme tietysti sanoa myös Eulerin topologisten tarkastelujen lähtökohtana olleen fysikaalinen ongelma - ovathan Königsbergin sillat ja niillä kävelijät reaalimaailman fysikaalisia objekteja!

Topologian toinen lähtökohta: solmuteoria

Graafit pysyvät tasossa, mutta entäpä jos tutkimme yksiulotteisten viivojen muodostamia kuvioita avaruudessa? Tällöin joudumme tekemisiin *solmuteorian* kanssa. Sisäisen geometrian näkökulmasta eli *intrinsisesti* tarkasteltuna on olemassa vain kaksi erilaista yksiulotteista monistoa: avoin viiva ja suljettu silmukka. Jos sen sijaan otamme huomioon myös ympäröivän avaruuden eli vaihdamme tarkastelun *ekstrinsiseksi*, uusia mahdollisia kuvioita ilmaantuu pilvin pimein, itse asiassa äärettömästi. Esimerkiksi *apilasolmu* eroaa ekstrinsisesti pelkästä silmukasta, ja itse asiassa on olemassa kaksi erilaista apilasolmua, jotka ovat toistensa peilikuvia (*kuva 5*).

Aleksanteri Suuri avasi Gordionin solmun miekkansa sivalluksella, mutta topologilta sopii odottaa hieman sofistikoituneempaa lähestymistapaa. Mikä solmu oikeastaan on matemaattisesti tarkasteltuna? Millaisia ovat solmujen topologiset invariantit? Mitkä solmut voidaan avata tai muuntaa topologisesti toisikseen - turvautumatta saksiin tai miekkaan? Solmuteoria tutkii kaikkia näitä kysymyksiä. Yleistä vastausta ei kuitenkaan ole. Solmuteoriassa on säilynyt partiopojille ja merimiehille ominaisen askartelun maku. Erilaisia solmuja ja niiden invariantteja tunnetaan valtavan paljon, mutta yleinen teoria puuttuu.

Solmun invariantti voi olla esimerkiksi luku, polynomi tai jokin monimutkaisempi algebrallinen rakenne. Konstruktioita on monenlaisia. Tarkastelkaamme paria esimerkkiä. Kun piirrämme solmun paperille, me itse asiassa projisoimme sen tasoon. Sanomme projektiota *säännölliseksi*, jos kukin ristiinmenokohta on transversaali eli muistuttaa lokaalisti pientä ristiä. Ristiinmenokohtien lukumäärä sinänsä ei ole topologinen invariantti, koska samalla solmulla voi olla hyvin monenlaisia säännöllisiä projektioita. Sen sijaan ristiinmenokohtien *pienin mahdollinen* lukumäärä antaa topologisen invariantin, jota sanotaan *ristiinmenoluvuksi*. Esimerkiksi apilasolmujen ristiinmenoluku on 3. Solmut on täydellisesti luokiteltu ristiinmenoluvun arvoon 16 saakka. Tiedetään, että on olemassa kaikkiaan 1701935 ristiinmenolukua 16 vastaavaa solmua.

Solmua yleisempi käsite on *linkki*: se on useamman toisiaan sivuamattoman, mutta mahdollisesti toisiinsa kietoutuneen solmun yhdiste. Kahden solmun muodostaman linkin tapauksessa jo Gauss osasi laskea eksplisiittisenä integraalina solmujen välisen *kietoutumisluvun*, jonka määritelmä muistuttaa ristiinmenolukua. Gaussin kaava on sisällöltään fysikaalinen; se sai motivaationsa solenoidien sähkömagneettisesta teoriasta. Sähkömagnetismin perusyhtälöiden löytäjä James Clerk Maxwell kiinnitti huomiota myös teoriansa topologiseen puoleen. Hän oivalsi, että näennäisesti "tyhjällä" avaruudella voi silti olla fysiikan lakien kannalta merkityksellinen topologinen rakenne.

Ristiinmenoluku ei ole laskennallisesti erityisen tehokas invariantti. Solmuteorian ensimmäiset edistysaskeleet saavutettiin pikemminkin *homotopian* käsitettä käyttäen. Kiinnittäkäämme solmun *S* ulkopuolelta piste *P* ja tarkastelkaamme kaikkia *P*:stä alkavia ja siihen päättyviä silmukoita, jotka eivät kosketa solmua *S* (eli pysyvät *S*:n komplementissa). Ilmeisesti jotkut silmukat voidaan esteitä kohtaamatta jatkuvasti kutistaa pisteeseen

P, kun taas toiset takertuvat solmuun *S*. Samaistamme silmukat, jotka voidaan jatkuvasti muuntaa toisikseen. Samaistettujen silmukkaluokkien joukko voidaan edelleen varustaa laskutoimituksella, joka tekee siitä algebrallisen *ryhmän*. Tämä ryhmä on solmun *S* komplementin *ensimmäinen homotopiaryhmä* eli keksijänsä mukaan *Poincarén ryhmä*.

Henri Poincaré oli *algebrallisen topologian* isä. Tällä tieteenalalla etsitään monistojen topologisia invariantteja algebrallisten rakenteiden kuten ryhmien, renkaiden, vektoriavaruuksien jne muodossa. Homotopian lisäksi tyypillisiä algebrallisen topologian käsitteitä ovat homologia ja kohomologia (joita ei valitettavasti oikein voi popularisoida kaavoihin turvautumatta).

Pelkän homotopiankaan avulla solmuteoriassa ei vielä päästä kovin pitkälle. Tehokkaimmat tunnetut invariantit ovat polynomiaalisia: ne liittävät kuhunkin solmuun yhden tai useamman muuttujan polynomin. Mainittakoon amerikkalaisen James Waddell Alexanderin polynomi (1928), englantilaisen John Horton Conwayn polynomi (1973), kuuden eri tekijän mukaan nimetty HOMFLY-polynomi (1985) tai uusiseelantilaisen Vaughan Jonesin polynomi (1986). Viimeksi mainitulla on syvällinen yhteys statistiseen mekaniikkaan, minkä ensimmäiseksi oivalsi amerikkalainen Louis Kauffman. Jonesin polynomi oli ensimmäinen kyllin hieno invariantti erottamaan esimerkiksi kuvan 5 kaksi "erikätistä" apilasolmua toisistaan.

Solmuteoria on merkillisellä tavalla vaikuttanut fysiikan kehitykseen kerran aikaisemminkin. Vuonna 1867 englantilainen fyysikko William Thomson, alias lordi Kelvin, esitti atomimallin, jossa atomit tulkittiin eetteripyörteiksi eli vortekseiksi, eräänlaisiksi pikku solmuiksi. Ajatus ei ollut niinkään järjetön, vaan se tuntui selittävän atomien perusominaisuudet: 1) Atomit ovat stabiileja, koska niitä vastaavat eetterin solmut eivät voi purkautua. 2) Erilaisten atomien suuri valikoima johtuu erilaisten solmujen suuresta määrästä. 3) Solmujen värähtelyt voitiin lukea atomien spektreistä. Tuo kaikki oli kuitenkin liian kaunista ollakseen totta! Vorteksiatomit otettiin vakavasti muutaman vuosikymmenen ajan, kunnes lopulta Bohrin atomi syrjäytti lordi Kelvinin atomin ja koko eetterihypoteesi kaatui suhteellisuusteoriaan.

Lordi Kelvinin aikalaismatemaatikot, eritoten skotlantilainen Peter Guthrie Tait, inspiroituivat kuitenkin luokittelemaan solmuja. Tait kirjoitti kolme paksua opusta solmutaulukoita, jotka taksonomisella lähestymistavallaan tuovat mieleen saman aikakauden botanistien uurastuksen. Vieläkin puhutaan *Taitin konjektuureista*, joista useimmat todisti Vaughan Jones. Tässä on siis merkillinen esimerkki tapauksesta, joka ei itse asiassa ole niinkään harvinainen: vääräkin fysikaalinen teoria voi inspiroida kelvollista matematiikkaa.

Kaikkien voimien yhdistäminen

Nykypäivän matemaattisen fysiikan suurin teema on pyrkimys yhdistää luonnon perusvoimat: sähkömagnetismi, heikko voima, vahva voima ja gravitaatio. Klassisella tasolla kaikkia näitä voidaan kuvata variaatio-ongelmina *pienimmän vaikutuksen periaatetta* käyttäen. Haetaan tietyn vaikutusfunktionaalin ääriarvoa varioimalla "kenttää", joka on geometrinen suure. Näin saadaan kyseisen teorian *kenttäyhtälöt*. Esimerkiksi sähkömagnetismin kenttäyhtälöt ovat Maxwellin yhtälöt (1873), joiden muuttuja on mittakentän *potentiaali*. Einsteinin kirjoittamissa gravitaation kenttäyhtälöissä (1915) muuttujana sen sijaan on avaruusajan metriikka, joka on matemaattisesti aivan erilainen suure kuin sähkömagnetismin potentiaali. Suurelta osin juuri tästä muuttujien erilaisuudesta johtuvat vaikeutemme yhdistää sähkömagnetismi ja gravitaatio.

Vuonna 1954 fyysikot Chen Ning Yang ja Robert Mills esittivät uuden tärkeän kenttäyhtälön, jolla he mallinsivat vahvaa voimaa. Myöhemmin sama yhtälö osoittautui käyttökelpoiseksi myös sähkömagnetismin ja heikon voiman yhdistämisessä (sähköheikko voima), saatiinpa lopulta vahvakin voima mukaan (standardimalli). Gravitaatio jäi kuitenkin ulkopuolelle.

Geometrinen avainkäsite näiden yhtenäisteorioiden ymmärtämiseksi on *säiekimppu*. Sen avulla mallinnetaan teorian sisäinen symmetriaryhmä: sähkömagnetismille U(1), heikolle voimalle SU(2), vahvalle voimalle SU(3). Symmetriaryhmän dimensio vastaa kentän välittäjähiukkasten lukumäärää: sähkömagnetismissa yksi fotoni, heikossa voimassa kolme välibosonia, vahvassa voimassa kahdeksan gluonia. Hiukkasfysiikan standardimallissa symmetriaryhmäksi otetaan U(1) x SU(2) x SU(3), jonka dimensio on siis 1+3+8=12.

Einsteinille teoreettisen fysiikan suuri tavoite oli "fysiikan geometrisoiminen", jonka hän itse toteutti gravitaation osalta Riemannin geometriaa soveltaen. Vastaavasti Yangin-Millsin yhtälö ja säiekimppujen teoria geometrisoivat standardimallin. Molemmissa teorioissa voidaan päätyä topologisesti hyvinkin outoihin avaruuksiin, joissa mustat aukot, madonreiät, korkeammat ulottuvuudet ynnä muut merkillisyydet ovat arkipäivää. Paluuta Immanuel Kantin väittämään, jonka mukaan euklidinen avaruus on kaiken ajattelumme apriorisesti annettu kategoria, ei siis enää ole.

Hypoteesin avaruusajan viidennestä ulottuvuudesta esittivät 1920-luvulla saksalainen Theodor Kaluza, ruotsalainen Oskar Klein ja hieman unohdettu suomalainen suurmies Gunnar Nordström; yleensä puhutaan vain Kaluzan-Kleinin mallista. Myös säiekimput tuovat peliin korkeampia ulottuvuuksia, mutta toisessa mielessä kuin Kaluzan-Kleinin-Nordströmin malli: Esimerkiksi sähkömagnetismin "viides ulottuvuus" vastaa teorian sisäistä viivakimppua, jonka "viivana" eli *säikeenä* on yksiulotteista U(1)-symmetriaa vastaten reaalisuora. Itse avaruusaika sen sijaan pysyy neliulotteisena. Yleisesti säie voi olla pelkkää viivaa korkeampiulotteinen vektoriavaruus, jolloin puhutaan *vektorikimpuista*. Esimerkiksi standardimallia kuvataan säiekimpulla (tai vektorikimpulla), jonka säie on 12-ulotteinen.

Korkeampiulotteisten säiekimppujen kuvitteleminen on työlästä. Kaikkein yksinkertaisin säiekimppu on sellainen viivakimppu, joka rakennetaan pelkän ympyrän päälle. Tämä kimppu on mahdollista visualisoida: Kuvitelkaamme saunavastaa tms vitsakimppua, jossa vitsat on suunnistettu tyvestä latvaan. Sen panta esittäköön kimpun *pohja-avaruutena* olevaa ympyrää, jolloin pantaa koskettavat yksittäiset vitsat ovat kimpun säikeitä. Kaikki tällaiset yksiulotteiset säikeet yhdessä muodostavat kimpun kaksiulotteisen *totaaliavaruuden*, jota siis voidaan ajatella sylinterin pintana. Jos kaikkien vitsojen latva osoittaa ylöspäin ja tyvi alaspäin, on kyseessä topologisesti triviaali viivakimppu. Taitava vastanvääntäjä tekaisee käden käänteessä kuitenkin myös sellaisen vastan, jossa pannan ympäri kuljettaessa vitsojen latvapuolen suunta kääntyy jatkuvasti, kunnes pannan ympäri tehdyn yhden täyden kierroksen jälkeisen vitsan latva osoittaakin alaspäin! Konstruoimme toisin sanoen Möbiuksen nauhan (*kuva 3*) mallisen saunavastan; se on topologisesti epätriviaali viivakimppu.

Matemaattiseen kirjallisuuteen säiekimput ilmestyivät kauan ennen kuin fyysikot keksivät ryhtyä niitä soveltamaan. Fyysikkojen yleiseen tietoisuuteen säiekimput tulivat vasta 1970-luvulla, jolloin erityisesti kiinalais-amerikkalainen matematiikko Shiing-Shen Chern popularisoi matematiikan ja fysiikan välistä "sanakirjaansa": Fyysikkojen mittapotentiaali on yhtä kuin matematiikoille tuttu säiekimpun *konnektio*; mittapotentiaalin kenttävoimakkuus on yhtä kuin konnektion *kaarevuus* jne. Kahden tiedeyhteisön vuosikymmeniä kestäneet keskinäiset ymmärtämisvaikeudet olivatkin suurelta osin johtuneet vain eri suuntiin kehittyneistä jargoneista. On puhuttu jopa matematiikan ja fysiikan vuorovaikutuksen "menetetystä tilaisuudesta" (Freeman Dyson).

Topologian ja fysiikan uusi lähentyminen

Chernin sanakirjassa kunniapaikalla olivat topologiset objektit. Niinpä Paul Diracin kuuluisa magneettinen monopoli voitiin nyt tulkita erään säiekimpun kanonisena konnektiona. Kyseinen kimppu on *Hopfin kimppu*, jossa pohja-avaruutena on kaksiulotteinen pallonkuori ja säikeenä ympyrä; totaaliavaruus on siis kolmiulotteinen. Tämän kimpun visualisoiminen on juuri ja juuri mahdollista (katso Virpi Kaukon ainutlaatuisia piirroksia *Arkhimedes*-lehdessä 1/1994).

Huvittava yhteensattuma on, että saksalainen Heinz Hopf julkaisi kimppunsa *Mathematische Annalen* -lehdessä vuonna 1931 eli juuri samana vuonna kuin Dirac julkaisi monopolinsa *Proceedings of the Royal Society* -lehdessä. Chernin sanakirjan yhden hakusanan ainekset olivat siis olemassa jo 1930-luvulla, mutta vasta neljäkymmentä vuotta myöhemmin matemaatikkojen ja fyysikkojen yleissivistykseen tuli tieto, että kyseessä on geometrisesti sama konstruktio.

Näyttävä demonstraatio topologian ja fysiikan yhteispelistä oli Yakir Aharonovin ja David Bohmin koejärjestely vuonna 1960 (teoriapaperi 1959). Kyseessä on ulkoisen sähkömagneettisen kentän vaikutus varatun hiukkasen kvanttitiloihin sellaisessa tilanteessa, jossa hiukkanen ei pääse alueelle, johon kenttä on keskittynyt. Tyypillinen asetelma on seuraavanlainen: Ohuen solenoidin ympärille järjestetään voimakkuudeltaan nollanarvoinen sähkömagneettinen kenttä. Otetaan käyttöön hiukkaslähde A ja fluoresoiva taso B (*kuva 6*). Annetaan varattujen hiukkasten kulkea näennäisen "tyhjiön" läpi. Asennetaan myös hila, jossa on kaksi rakoa, niin että tutkittavat hiukkaset siroavat solenoidin kahden puolen. Havainnoidaan interferenssikuvioita tasolla B sen mukaan, kulkeeko solenoidissa virta vai ei. Naiivisti ajateltuna virran kulun ei pitäisi merkitä sitä eikä tätä, jos kerran sähkömagneettisen kentän voimakkuus pysyy koko ajan nollana hiukkasten kulkureitillä. Kuitenkin interferenssikuvioiden havaitaan hieman siirtyvän. Tilanteen matemaattinen analyysi paljastaa, että solenoidin läsnäolo aiheuttaa topologisen komplikaation ("epätriviaalin holonomian"), jonka sähkömagneettisen kentän mittapotentiaali aistii. Potentiaali, jota ei voida mitata, on siis perustavanlaatuisempi suure kuin kenttävoimakkuus! Matematikon silmin tämä ei ole yllättävää: konnektio kantaa enemmän informaatiota kuin kaarevuus, joka on konnektiosta johdettu suure. Aharonovin-Bohmin koe havainnollistaa, miten luonteeltaan epälokaali kvantti-ilmiö saattaa johtua konfiguraatiossa piilevästä globaalin topologian epätriviaalisuudesta.

Säiekimppujen topologinen luokittelu on siis sekä matemaatikkoja että fyysikkoja kiinnostava tehtävä. Matemaatikkojen tätä varten kehittämä työkalu ovat *karakteristiset luokat*, jotka ovat tyypillisesti homologia- tai kohomologialuokkia. Mainittakoon Stiefelin-Whitneyn, Pontrjaginin ja Chernin luokat. Epätriviaali karakteristinen luokka merkitsee estettä kimpun "oikaisemiselle". (Supisuomalaista saunametaforaa jatkaaksemme Möbiuksen nauhan malliseksi väännettyä saunavastaa ei auki leikkaamatta enää voi trivialisoida tavallisen kaltaiseksi.) Fysikaalisesti ajateltuna epätriviaalit karakteristiset luokat vastaavat erilaisia pseudohiukkasia: monopoleja, solitoneja, instantoneja... Tällaiset objektit valtasivat matemaattisen fysiikan näyttämön 1970-luvulta alkaen.

Englantilainen Michael Atiyah, joka sai Fieldsin mitalin vuonna 1966, on topologian ja fysiikan 1970-luvulla alkaneen uuden vuorovaikutuksen keulakuva. Hän on yksi *K-teorian* perustajista. Kyseessä on uusi matematiikan alue, joka katsottiin niin tärkeäksi, että vuonna 1985 se sai oman pääluokan (numeron 19) American Mathematical Societyn luokitusjärjestelmässä. Valtaus oli *K*-teoreetikoille niin suuri tapaus, että sitä juhlittiin sampanjalasit kädessä. *K*-teorian popularisoiminen sanallisesti olisi toivoton yritys, mutta mainittakoon että *K*-teoriassa vektorikimpuille kehitetään kokonainen aritmetiikka: kimppuja voidaan laskea yhteen jne. *K*-teoriaa työkaluna käyttäen Atiyah ja hänen amerikkalainen työtoverinsa Isadore M. Singer todistivat kuuluisan *indeksilauseensa*. Sen yksi sovellus on jo edellä mainittu Gaussin-Bonnet'n lause, jonka Chern yleisti myös *n*-ulotteisten monistojen tapaukseen. Atiyahin-Singerin indeksilause on syvällisimpiä topologisia teoreemoja, joita nykypäivän matemaattisessa fysiikassa tarvitaan.

Atiyahin ja hänen koulukuntansa työt ovat päättyneen vuosisadan matematiikan monumentaalisimpia saavutuksia. Yllättävää on silti lukea, että Atiyahin kiinnostus Yangin-Millsin yhtälöihin heräsi niinkin myöhään kuin vuonna 1976, jolloin Singer piti tästä aiheesta kurssin Oxfordissa. Atiyahin koulukunnan panos oli niin suuri, että eräässä vaiheessa vaikutti jo siltä, kuin hänen ympärilleen olisi muodostumassa "pyhä perhe", jolle kaikki Fieldsin mitalit on vastedes myönnettävä. Vuonna 1986 palkittiin Berkeleyn kansainvälisessä matemaatikkokongressissa (ICM) englantilainen Simon Donaldson ja amerikkalainen Michael Freedman. Atiyahin ajatusten pohjalta he olivat uudistaneet neliulotteisten monistojen teorian matemaattisen fysiikan uusia työkaluja kuten Yangin-Millsin yhtälöiden erikoisratkaisuja, instantoneja, soveltaen. Kioton ICM:ssä vuonna 1990 taas palkittiin matemaattisina fyysikkoina amerikkalainen Edward Witten, uusiseelantilainen Vaughan Jones ja venäläinen Vladimir Drinfeld, kaikki epäilemättä erityisesti Atiyahin suosituksesta.

Kaiken kohtuuden nimissä palkintopallille olisi Kiotossa 1990 pitänyt nostaa itse asiassa vielä neljäskin "atiyahilainen", nimittäin saksalainen Andreas Floer, mutta siihen eivät muut päättäjät enää suostuneet. Floerin sijasta vuoden 1990 neljännen Fieldsin mitalin sai japanilainen Shigefumi Mori. Hän oli epäilemättä hyvä matemaatikko, mutta myös kongressin isäntämaan Japanin edustaja. Tämä päätös haiskahti politikoinnilta ja mahdollisesti selitti Atiyahin ja eräiden muidenkin Fieldsin mitalistien poisjäämisen koko kongressista. Vielä pahempaa on, että 34-vuotias Floer kuoli "traagisissa olosuhteissa" seuraavana vuonna, sivumennen sanoen vain paria päivää ennen kuin hänen piti matkustaa Suomeen.

Andreas Floerin keskeiset työt koskivat kolmiulotteisten monistojen topologiaa, jonka aarreaittaan sopivan avaimen hän löysi *Chernin-Simonsin funktionaalista*. Kyseessä on eräs SU(2)-kimpun konnektiosta muodostettu polynomi, jolla on hämmästyttäviä erikoisominaisuuksia. Samaa käsitettä käyttäen Edward Witten perusti *topologisen kenttäteorian*, jonka vaikutusfunktionaali on topologinen invariantti. Klassisella tasolla topologinen kenttäteoria on siis triviaali kentän varioimisen suhteen! Kvanttiteoriana tarkasteltuna Wittenin topologinen kenttäteoria ei kuitenkaan ole triviaali, vaan voi tuottaa uusia kiinnostavia invariantteja. Esimerkiksi kolmiulotteiseen monistoon upotetun solmun tapauksessa se antaa Jonesin polynomin.

Sisäpiireissä tunnettu anekdootti on kertomus Atiyahin ja Wittenin yhteisestä illanvietosta Annie's Restaurant -nimisessä kalaravintolassa Swanseassa vuonna 1988: Wittenin kongressiluentoa edeltävänä iltana Atiyah ehdotti hänelle Jonesin polynomin uutta tulkintaa topologisen kenttäteorian avulla. Witten alkoi vimmatusti laskea ravintolan paperisiin pöytäliinoihin, ja vuorokautta myöhemmin hän oli vaihtanut luentonsa otsikon ja julisti valmiin teorian.

Wittenin panos ja uusimmat uutiset

Edward Witten on julkaissut yli 250 artikkelia ja johtaa kirkkaasti matemaattisen fysiikan sitaatti-indeksejä. Topologian ja fysiikan vuorovaikutus on keskeinen teema monissa hänen kuuluisissa töissään. Yleisen suhteellisuusteorian alalta mainittakoon supersymmetristä Morsen teoriaa soveltanut "positiivisen massan konjektuurin" uusi todistus, joka mainittiin hänen Fieldsin mitalinsa yhtenä perusteluna. Vuonna 1994 Witten uudisti yhdessä amerikkalaisen Nathan Seibergin kanssa Donaldsonin esittämän nelimonistojen teorian kirjaimellisesti yhdessä yössä.

Wittenin uusimmat työt koskevat *M*-teoriaa, josta olen kirjoittanut tämän lehden palstoilla ennenkin (*Tieteessä tapahtuu* 4/1999). Tässä riittäköön todeta, että kyseessä on uusi yhtenäiskenttäteoria, jossa pistemäiset alkeishiukkaset on korvattu korkeampiulotteisilla *braaneilla*. Myös avaruusaika on saanut lisäulottuvuuksia; nykyisen käsityksen mukaan avaruusaika olisi 11-ulotteinen ja teorian rakenneryhmä peräti 496-ulotteinen. Ollaan siis kaukana standardimallin 4-ulotteisesta avaruusajasta ja 12-ulotteisesta rakenneryhmästä, mutta ylimääräisten ulottuvuuksien hinnalla gravitaatio on nyt saatu mukaan. Avaruusajan kuuden ylimääräisen ulottuvuuden ajatellaan käpertyneen kokoon ns *Calabi-Yau-monistoksi*, jollainen liittyisi avaruusajan kuhunkin pisteeseen. Ei kuitenkaan tiedetä, millainen Calabi-Yau-monisto pitäisi valita myriadien mahdollisuuksien joukosta, vaan näiden monistojen luokittelu on uusi työmaa topologeille.

Uusi avainkäsite on *dualiteetti*, jonka lähtökohtana on suomalaisen Claus Montosen ja englantilaisen David Oliven paperi vuodelta 1977. Sen sitaatti-indeksi Stanfordin lineaarikiihdytinlaboratorion hep-th-nimisessä tietokannassa näkyy olevan tällä hetkellä jo 458. Dualiteetit ovat eri fysikaalisten teorioiden välisiä vastavaisuuksia, joissa yhdessä teoriassa vaikea ongelma saattaa "duaalisessa" teoriassa olla ratkaistavissa.

Ehkäpä aktiivisimmin tutkittu esimerkki dualiteeteista on tällä haavaa *peilisymmetria*. Se tarkoittaa tiettyjen Calabi-Yau-monistojen ja niiden "peilimonistojen" välistä vastaavaisuutta, joka ilmaistaan enumeratiivisen geometrian kielellä. Alan kuuluisin paperi on Candelas-de la Ossa-Green-Parkes (1991). Peilisymmetrian osittain heuristisia menetelmiä kuten ääretönulotteisten avaruuksien yli laskettuja huonosti määriteltyjä integraaleja käyttäen nämä fyysikot ennustivat oikein erään enumeratiivisen geometrian tuloksen, nimittäin kvinttisen kolmivariston astetta d=1,2,3,... olevien rationaalikäyrien lukumäärän: 2875, 609250, 317206375... Klassisesti näistä luvuista tunnettiin ainoastaan ensimmäinen, ja varsinkin kolmas luku oli sensaatio. Norjalaiset matemaatikot Ellingsrud ja Str{\o}mme yrittivät vahvistaa tuloksen, mutta laskivat ensin väärin. Vasta kuukausia myöhemmin he saivat laskunsa korjatuiksi ja myönsivät fyysikkojen olleen askeleen edellä.

Tunnetuksi tuli heidän levittämänsä sähköpostiviesti, jonka otsikkorivi oli "Physics Wins". Tunnussana huipputieteen etulinjaan tällä rintamalohkolla on *kvanttikohomologia*.

Toinen topologian ja fysiikan vuorovaikutuksen ajankohtainen trendi on *K*-teorian soveltaminen *M*-teoriaan, toisin sanoen algebrallisen topologian hienostuneimpien työkalujen tuominen yhtenäiskenttäteorian kysymysten selvitystyöhön. Tällaisten asioiden popularisoiminen on toivotonta, mutta kaikkihan löytyy netistä. Ken haluaa nähdä hämmästyttäviä kaavoja, etsiköön hep-th:sta Dan Freedin, Michael Hopkinsin ja Edward Wittenin uusimmat paperit. Oma suosikkini on hep-th/0005090, jossa lasketaan kahdella eri tavalla - sekä *K*-teorian että *M*-teorian näkökulmasta - eräs hiuksenhieno termi ja saadaan yhtäpitävä tulos.

Ken osaa arvostaa tieteen pitkää linjaa, voi nähdä topologian ja fysiikan tarinassa todella huikean oppihistoriallisen kaaren, jonka alkupää on Königsbergin silloilla!

Kirjoittaja on Helsingin ja Jyväskylän yliopistojen matematiikan dosentti, joka vietti talven 2000-2001 Henri Poincaré-instituutissa Pariisissa M-teorian teemavuoden merkeissä.