Matemaatikko symmetrioiden etsijänä

Raimo Lehti

Hermann Weyl: Symmetria. Suom. Kimmo Pietiläinen. Terra Cognita 1999.

Hermann Weyl (1885-1955) oli yksi sukupolvensa monipuolisimmista matemaatikoista. Hänen teoksistaan tunnetaan ehkä parhaiten ryhmäteorian kvanttimekaanisia menetelmiä käsittelevä teos sekä suhteellisuusteoriaa käsittelevä teos *Raum und Zeit*. Suhteellisuusteoreettiset tarkastelut johtivat Weylin tutkimaan tensorilaskentaa ja invarianttiteoriaa. Einsteinin teorian yhteydessä olivat puolittain filosofiset, puolittain matemaattiset yleistä "avaruuden" käsitettä koskevat ideat suunnanneet hänen tutkimuksensa yleistämään "vapaan liikkuvuuden" ominaisuuksien avulla tapahtuvan Eukleidisen geometrian luonnehdinnan. Tämä johti Weylin tutkimaan Lien ryhmiä sekä lineaaristen ryhmien esitysteoriaa.

Weyl oli koko ikänsä kiinnostunut filosofiasta ja metafysiikasta; hänen matemaattisissa julkaisuissaan on usein filosofinen pohjavire. Ulkoisilta mitoiltaan pieni neljästä luennosta koostuva teos *Symmetria* antaa viehättävän esimerkin hänen eri suuntiin osoittavasta kiinnostuksestaan.
Weyl ilmoittaa ajatelleensa kirjan lukijoiksi oppineita spesialisteja laajemman joukon. Tulemme kohtaamaan tosiasian, että hän kuitenkin asettaa lukijoilleen paikoittain huomattavia ennakkotietoihin ja matemaattiseen kykyyn kohdistuvia vaatimuksia. Heti aluksi (s. 5) hän ilmoittaa teoksessa päätyvänsä "yleiseen ajatukseen, joka on automorfisten muunnosten suhteen invariantti elementtien konfiguraatio". Lukijalta oletetaan alun alkaen, että hän vaivattomasti ymmärtää, mitä tämä tarkoittaa.

Bilateraalisymmetria

Ensimmäinen luku on helppoa luettavaa. Asian matematiikka on yksinkertaista, ja Weyl kirjoittaa pikemminkin symmetrian yleisiä periaatteita pohtivana luonnonfilosofina kuin matemaatikkona. Yksinkertaisimmassa symmetriassa, vasemman ja oikean välisestä symmetriasta, kuvio pysyy invarianttina, kun se peilataan symmetriatasossaan (esim. pystysuorassa tasossa. Weylin filosofinen asenne ilmenee heti hänen pohdiskellessaan symmetristä kuvapatsasta (s. 17):

"... Keksikö taiteilija symmetrian, jonka luonto on antanut olennoilleen lakiensa mukaan? Kopioiko ja hioiko hän sen, minkä luonto antaa vain epätäydellisessä muodossa? Vai onko symmetrian esteettisellä arvolla riippumaton lähde? Minulla on taipumus ajatella Platonin tapaan, että matemaattinen käsite on molempien syntyprosessin yhteinen lähde: luontoa hallitsevat matemaattiset lait synnyttävät luonnon symmetrian ja käsitteen vaistomainen hahmottuminen luovan taiteilijan ajatuksissa synnyttää symmetrian taiteeseen. ..."

Weylillä on tässä mielessään myös analoginen tieteenfilosofian probleemi. Missä määrin matemaattiseen asuun puetut teoriat koskevat jotain 'luonnossa itsessään' olevaa? Weylin asenne on varsin metafyysistä platonismia. Weyl antaa esimerkkejä bilateraalisymmetrian esiintymisestä ornamenteissa ja muissa taideteoksissa (s. 17-27) ja toteaa, että aikaa myöten ehdoton symmetria väljeni asetelmaksi, jossa kuvan 'perusidea' on symmetrinen, mutta kuvioissa ei symmetria tiukasti toteudu. Weyl kirjoittaa symmetrian esiintymisestä fysiikan laeissa (s. 28, 31):

"Tieteen kannalta vasemman ja oikean välillä ei ole periaatteellista eroa tai polaarisuutta, ... Vasemman ja oikean määrittäminen edellyttää mielivaltaista valintaa. Kun se on tehty yhdelle kappaleelle, se pätee kaikille kappaleille. ... Avaruuden sisäinen rakenne erottaa vasenkätisen ja oikeakätisen ruuvin toisistaan vain mielivaltaisen valinnan seurauksena.

Olennainen tulos on, että fysiikassa ei ole mitään, mikä viittaa vasemman ja oikean perustavaa laatua olevaan eroon. Vasen ja oikea ovat samanarvoisia samaan tapaan kuin kaikki avaruuden pisteet ja suunnat ovat samanarvoisia. Paikka, suunta, vasen ja oikea ovat suhteellisia käsitteitä."

Sanotaanpa "avaruuden sisäisestä rakenteesta" mitä hyvänsä, voi kysyä, tekevätkö *fysiikan lait* eron vasemman ja oikean välillä vai eivätkö tee. Tuskin enää esittäisimme väitteitä sellaisella varmuudella kuin Weyl tekee. Kysymystä absoluuttisen ja suhteellisen paikan probleemista Weyl käsittelee selostamalla Leibnizin ja Newtonin kantaa edustaneen Samuel Clarken kirjeenvaihtoa Vasemman ja oikean samanarvoisuuden Weyl rinnastaa tulevaisuuden ja menneisyyden samanarvoisuuteen fysiikan laeissa (s. 36):

"Kuitenkin ne lait, jotka voimme sanoa tuntevamme kohtuullisen hyvin, ovat invariantteja ajan suunnan muutoksen suhteen ja vasemman ja oikean vaihtamisen suhteen."

Mikä merkitys on sillä, että matemaattiseen muotoon puetut *lait* ovat tuolla tavoin invariantteja. Merkitseekö se, että myöskin luonto on? Weyl kirjoittaa (s. 38-39):

"Jos luonto olisi pelkkää lainmukaisuutta, niin jokaisella ilmiöllä olisi luonnon universaalien lakien täysi symmetria sellaisena kuin suhteellisuusteoria sen muotoilee. Tosiasia, ettei näin ole, osoittaa, että kontingenssi eli asiayhteyteen liittyvä sattumanvaraisuus on olennainen maailman piirre. ... Totuus sellaisena kuin se nykyään nähdään on seuraava: luonnonlait eivät määrää ainutlaatuisesti olemassa olevaa todellista maailmaa, ..."

Tämä on aiheellinen universaalisten *teorioiden* merkitystä koskeva rajoitus. On tietenkin jossain määrin problemaattista, mikä universumimme *universaalinen ominaisuus* on *laki*? Esimerkkeinä luonnossa esiintyvästä bilateraalisymmetriasta Weyl mainitsee kiteet ja toteaa mm. orgaanista alkuperää olevissa kiteissä esiintyvät *laevo* - ja *dextro* -muodot, joista hän kirjoittaa (s. 43-44):

"On kuitenkin muuan todellinen vaikeus: miksi luonto tuottaa niin monista miltei varmasti elävistä eliöistä peräisin olevista enantiomorfisista muotojen kaksikoista vain toisen?... Itse asiassa, jos kasveissa ja eläimissä olevat epäsymmetriset proteiinimolekyylit ovat syntyneet riippumattomasti monissa paikoissa, niin niiden laevo- ja dextro-muotojen pitäisi olla likimain yhtä yleisiä. ... On kuitenkin varmaa, että arvoituksen ratkaisu ei liity universaalisiin biologisiin lakeihin, vaan eliömaailman synnyn sattumiin. ... Tarvitaan kuitenkin vähemmän radikaali selitys, joka esimerkiksi palauttaa Maan asukkaiden epäsymmetrian johonkin itse Maan tai Auringosta Maahan tulevan valon perustavaa laatua olevaan, joskin sattumanvaraiseen epäsymmetriaan. ... Toinen mahdollisuus on olettaa, että kehitys todella alkoi enantiomorfisten muotojen tasaisesta jakautumasta, joka oli epätasapainossa siten, että satunnainen pieni häiriö johti sen toista muotoa suosivaksi."

Kaikesta ilmenee Weylin haluttomuus sijoittaa tätä epäsymmetriaa luonnon fundamentaalisiin tekijöihin. Asialla on tietty analogia positiivisen ja negatiivisen varauksen väliseen epäsymmetriaan tai materian ja ‘antimaterian' epäsymmetriaan. Niidenkin tapauksessa vedotaan ‘alussa' tapahtuneeseen satunnaiseen häiriöön, joka johti toisen vaihtoehdon ylivaltaan. Weyl käsittelee vielä elävien olentojen rakenteessa esiintyvää oikea-vasen-symmetriaa ja pohtii sen syntyä munasolun jakautumisesta alkaen (s. 44-50).

Siirto- ja kiertosymmetriat

Toisessa luvussa Weyl siirtyy matemaattisempaan aiheeseen. Hän ilmoittaakin tarvitsevansa "hieman matematiikkaa", ja pyytää "sitä varten kärsivällisyyttä" (s. 53). – Matemaattisen tekstin omaksumiseen ei ikävä kyllä pelkkä kärsivällisyys riitä. – Weyl selostaa (s. 53-54) avaruuden bijektioita itselleen ja rajoittaa sitten kuvaukset *automorfeiksi*, jotka jättävät "avaruuden rakenteen muuttumattomaksi". Hän kertoo (s. 55) matemaatikkojen käyttävän sanaa ryhmä kuvaamaan tätä tilannetta ja siksi he sanovat, että *automorfismit muodostavat ryhmän*. Weyl rajoittaa käsitteen *ryhmä* koskemaan transformaatioryhmiä ja siksi ei ole ottanut antamaansa ryhmäominaisuuksien luetteloon mukaan assosiatiivisuutta. Käsitteen "avaruuden rakenne" Weyl määrittelee kongruenssirelaation avulla. Olennaisen tekijän muodostavat jäykän kappaleen liikkeet, joille Weyl ottaa käyttöön nimityksen *kongruentti kuvaus*. Olennaiset käsitteet selostetaan sivuilla 56-57:

"... Kongruenssi on joko aito, jolloin se vie vasenkätisen ruuvin vasenkätiseksi ja oikeakätisen oikeakätiseksi, tai se on epäaito eli refleksiivinen, jolloin se muuttaa vasenkätisen ruuvin oikeakätiseksi ja päinvastoin. ... Näin on luotu askelten rakenne: similariteetit kongruenssit = similariteetit ilman mittakaavan muutosta liikkeet = aidot kongruenssit. Kongruenssit muodostavat similariteetien aliryhmän ja liikkeet muodostavat kongruenssien ryhmän aliryhmän, jonka indeksi on 2. Tämä lisäys tarkoittaa, että jos B on mielivaltainen epäaito kongruenssi, kaikki epäaidot kongruenssit saa muodossa BS yhdistämällä B:n kaikkiin mahdollisiin aitoihin kongruensseihin S. ..."

Monista muistakin Weylin teksteistä ilmenee hauskalla tavalla kuluneen puolen vuosisadan aikaansaama muutos matemaattisessa tyylissä. Weyl ei *aloita* täsmällisillä määritelmillä. vaan pudottelee jonkinlaisia ‘pseudomääritelmiä' tekstiin sinne tänne sen jälkeen kun on jo käsitteitä käyttänyt. Esimerkiksi tässä hän ottaa käyttöön käsitteen *aliryhmä* vailla määritelmää¸ myöskään käsitettä aliryhmän *indeksi* hän ei määrittele, vaan valaisee sitä indeksin 2 tapauksessa konkreettisella esimerkillä. Kongruenssien joukosta määritellään *kierrot* jonkin pisteen ympäri ja *siirrot* eli translaatiot. Kaikki tämä liittyy symmetrian käsitteeseen seuraavasti (s. 58):

"Annetussa avaruuden rakenteessa F ne avaruuden automorfismit, jotka jättävät rakenteen F muuttumattomaksi, muodostavat ryhmän G, ja tämä ryhmä kuvaa rakenteen F symmetrian tarkasti."

Rakenteella F Weyl tarkoittaa jotain pisteistä muodostunutta kuviota. Hän osoittaa, että jos kuvio ei ulotu äärettömiin eikä supistu vain yhdeksi pisteeksi, täytyy sen muuttumattomaksi jättävän automorfismin säilyttää mittakaava, jolloin se on kongruenssi. Weyl käsittelee esimerkkien valossa siirtojen ja mahdollisten heijastuksen invariantteja kuvioita eli nauhaornamentteja ja antaa esimerkkejä tällaisista sekä eläinkunnasta että taiteesta. Seuraavaksi hän tarkastelee symmetrioita, jotka perustuvat kiertoihin tietyn akselin ympäri. Tällaisia löytyy ruukkujen, pylväiden ja rakennusten koristeluista sekä kukista ja eliöistä. Erityisesti viisilukuinen symmetria on yleinen sekä kukissa että alemmissa eläimissä (s. 73, 75, 77). Viisilukuisen symmetrian vastapainoksi Weyl mainitsee lumikiteiden kuusilukuisen symmetrian. Hän ei kuitenkaan varoita lukijaa siitä, että lumikiteistä esitetyt kauniit kuvat ylikorostavat kiteiden säännöllisyyttä.

Seuraavaksi Weyl siirtyy käsittelemään aitojen kiertojen lisäksi epäaitoja, siis sellaisia, joissa on yhdistetty kierto heijastukseen. Hän määrittelee pelkistä kierroista koostuvat *sykliset ryhmät* C_n, n = 1, 2, 3, ..., sekä näiden ja kiertoakselissa tapahtuvan heijastuksen yhdistämisestä saatavat *diedraaliryhmät* D_n, n = 1, 2, 3, ... Hän kertoo näissä ryhmissä ilmenevän symmetrian mukaisten kuvioiden ilmenemisestä luonnossa ja taiteessa ja siirtyy tarkastelemaan nauhaornamenttien kaltaisia potentiaalisesti äärettömiä kuvioita, joissa peruskuvauksena ei olekaan kongruenssi vaan yleisempi similariteetti (joka siis muuttaa mittakaavaa). Hän tarjoaa esimerkeiksi jotkut nilviäisten kuoret sekä logaritmisen spiraalin ja mainitsee ruuviliikkeen (s. 80-89).

Äärellisiä transformaatioryhmiä C_n vastaavat symmetriset kuviot ovat säännöllisiä monikulmioita. Kolmiulotteisessa avaruudessa vastaavat kuviot ovat säännöllisiä monitahokkaita, ja niitä on vain viisi kappaletta. (s. 89-95). Viidelle säännölliselle kappaleelle muodostetaan niiden aitojen kiertojen ryhmät. Näitä on vain kolme; tetraedrin, kuution ja oktaedrin, sekä dodekaedrin ja ikosaedrin ryhmät *T*, *W* ja *P*. Weyl selittää, miksi kahdella kappaleella on sama transformaatioryhmä ja kertoo (s. 95):

"Tässä tilanteessa kuutio ja oktaedri ovat polaarikuvioita projektiivisen geometrian mielessä. ... Vastaavasti dodekaedri ja ikosaedri ovat polaarikuvioita."

Lukijalle ei kuitenkaan anneta selostusta siitä, mitä tämä tarkoittaa. Luvun 2 viimeisillä sivuilla 96-98 Weyl luettelee kaikki avaruuden äärellisten aitojen ja epäaitojen kiertojen ryhmät. Asian käsittäminen on vaikeaa lukijalle, joka ei jo alunperin tunne ryhmäteorian käsitteistöä.

Ornamenttisymmetria

Weyl aloittaa kolmannen luvun tarkastelemalla pintaornamentteja, siis säännöllisiä kuvioita, joiden avulla voi peittää tason. Ensimmäiseksi mainitaan säännöllisistä kuusikulmioista koostuva ornamentti ja kerrotaan sen esiintymisestä ja ominaisuuksista (s.101-108). Tämä ornamentti liittyy ympyröiden mahdollisimman tiheään pakkaukseen, joten Weyl siirtyy käsittelemään pallopakkauksia avaruudessa ja tässä yhteydessä viittaa myös Keplerin tekstiin *Strena* -teoksessa teosta itseään mainitsematta.

Weyl kertoo, millaisia spekulaatioita on esitetty siitä, että mehiläiset rakentavat kennonsa rombidodekaedreista ja ryhtyy sitten järjestelmällisesti tutkimaan tason ornamenttisymmetrioita. Hän antaa lyhyen selostuksen kaksidimensioisesta vektorialgebrasta sekä koordinaattimuunnoksista matriisien avulla (s. 111-115). Lieneekö suomennoksen vai alkutekstin lapsus, kun vektorin **r** *pituus* |**r**| määritellään neliömuodoksi $g_{11} x_1^2 + 2 g_{12} x_1 x_2 + g_{22} x_{22}$, jonka muodostavat vektorin koordinaatit x_1 ja x_2 sekä vakiokertoimet g_{11} , g_{12} ja g_{22} . Karteesiset koordinaatistot muodostuvat keskenään kohtisuorista ykkösen pituisista vektoreista; tällaisissa pituuden *neliön* lauseke saa muodon $x_1^2 + x_2^2$. Koordinaattimuunnos, joka säilyttää tämän lausekkeen on ortogonaalimuunnos; tällaisen voi tulkita myös itse *tason* muunnokseksi, jolloin on kyseessä kierto. Kun kiertoihin lisätään siirto, saadaan kaikille tason liikkeille koordinaattiesitys. Tätä aparaattia käyttäen Weyl tutkii tason diskreettien kongruenttien kuvausten ryhmiä sekä näiden määrittelemiä hilapisteistöjä (s. 116-129). Esityksen seuraamisen vaatimista matematiikan taidoista voi antaa hauskana esimerkkinä Weylin siteeraaman Maschken teoreeman (s.127):

"... voidaan osoittaa, että mille tahansa lineaarimuunnosten äärelliselle ryhmälle, jonka kertoimet ovat reaalilukuja, voidaan konstruoida positiivisia neliömuotoja, jotka ovat näissä muunnoksissa invariantteja. ...
... Todistus on varsin yksinkertainen. Otetaan positiivinen neliömuoto, vaikkapa $x_1^2 + x_2^2$, tehdään sille jokainen ryhmän muunnos S ja lasketaan näin saadut muodot yhteen. Tulos on invariantti positiivinen muoto."

Jos lukija muutamassa minuutissa löytää tälle todistuksen ja lisäksi iloitsee todistuksessa vaadittavasta hyvälle matematiikalle tyypillisestä 'niksistä', niin Weylin kirjan lukeminen ei tuota hänelle vaikeuksia. - Yleisten lauseittensa sovellutuksena Weyl antaa lukuisia esimerkkejä kauneista pintaornamenteista (s. 129-136).

Kiteistä ja symmetrian yleisestä käsitteestä

Neljännessä luvussa Weyl käsittelee kolmidimensioisen avaruuden äärellisiä kiertoryhmiä sekä näiden invariantteina kuvioina "kappalemaisia ornamentteja" (s. 139-141). Tällaisia esiintyy kiteissä. Kiteiden tutkiminen röntgensäteillä otettujen valokuvien avulla antaa hänelle aiheen "epistemologiseen huomautukseen" (s. 146):

"Röntgensäteiden tuottamat kuvat esittävät vääristymistään huolimatta kiteen symmetrian tarkasti. Tämä on seuraavan yleisen periaatteen erikoistapaus: jos ilmiön yksikäsitteisesti määrittävillä syillä on tiettyjä symmetrioita, niiden seurauksillakin on sama symmetria.... Mielestäni kaikilla fysiikan a priori lausumilla on symmetriaan perustuva alkuperä."

Kirjan lopuksi Weyl siirtyy käsittelemään symmetrioiden esiintymistä yleisemmissä yhteyksissä. Ensimmäiseksi hän tarkastelee geometriassa ilmenevää 'suhteellisuusperiaatetta' (s. 149-150) ja siirtyy paikasta paikan ja ajan yhdelmään. Jo aikaisemmin Weyl kertoi koko suhteellisuusteorian riippuvan symmetriasta (s. 28). Mitä hän tällä tarkoittaa, selviää, kun Weyl identifioi symmetrian invarianssiksi tilannetta luonnehtivassa transformaatioryhmässä. Weyl on perusteellisesti tutkinut suhteellisuusteoriaa, joten hänellä on aiheesta kiinnostavaa sanottavaa. Hän aloittaa (s. 151):

"Nämä päätelmät ovat puutteellisia yhdessä suhteessa: ne jättävät huomiotta fysikaaliset tapahtumat ei vain avaruudessa, vaan myös avaruudessa ja ajassa. Kolmiulotteisen jatkumon asemesta maailma on neliulotteinen jatkumo. Einstein kuvasi ensimmäisenä oikein tämän neliulotteisen väliaineen symmetrian, suhteellisuuden tai homogeenisuuden."

Weyl kertoo Newtonin absoluuttista paikkaa koskevista ajatuksista ja siirtyy ajan probleemiin (s. 151):

"Siis onko väitteellä, että kaksi tapahtumaa ovat samanaikaiset (mutta eri paikoissa, vaikkapa täällä ja Siriuksessa), objektiivinen merkitys? Ennen Einsteinia vastaus kuului kyllä."

Valon äärellinen etenemisnopeus on Weylin mukaan kumonnut tämän uskomuksen (s. 152):

"Tämä kyseenalaisti sen, voiko maailman rakenteen objektiivisia piirteitä kuvata siten, että neliulotteinen jatkumo jakautuu kolmiulotteisiksi samanaikaisuuden kerroksiksi ja sitä vastaan kohtisuoriksi yksiulotteisiksi lepotilan kuiduiksi eli avaruuden pisteiden maailmanviivoiksi. Einstein keräsi ennakkoluulottomasti kaiken neliulotteisen avaruusajan jatkumon todellista rakennetta koskevan fysikaalisen todistusaineiston ja tämän perusteella johti sen todellisen automorfismien ryhmän. Sitä sanotaan Lorentzin ryhmäksi hollantilaisen fyysikon H. A. Lorentzin mukaan,.... Osoittautui, että tämän ryhmän mukaan ei ole invariantteja samanaikaisuuden kerroksia tai invariantteja levon kuituja. Valokartio ... jakaa maailman tulevaisuuteen ja menneisyyteen, siihen maailman osaan, johon toimeni pisteessä O voivat vaikuttaa ja siihen osaan, johon ne eivät vaikuta. Tämä tarkoittaa, että mikään vaikutus ei kulje valoa nopeammin ja että maailmalla on objektiivinen kausaalinen rakenne, jonka nämä jokaisesta maailmanpisteestä O tulevat valokartiot kuvaavat."

Weyl kirjoittaa aivan kuin "maailma" olisi identtinen Minkowskin avaruuden kanssa. Täytyihän hänen tietää, että Einstein oli jo vuonna 1917 kosmologiassaan ottanut käyttöön juuri Weylin kritisoimat "yksiulotteiset lepotilan kuidut". Vaikka tällaisia ei suppeammassa suhteellisuusteoriassa olekaan, sellaisia on yleisen suhteellisuusteorian mukaisessa kosmologiassa. Kumman, jos kummankaan, maailmasta antamaa kuvaa on aiheellista pitää "objektiivisena"? Mikä merkitys maailman todelliselle rakenteelle on sillä, että Weylin mainitsemia kuituja ja kerroksia ei ole olemassa *erään matemaattisesti konstruoidun ryhmän mukaan*?

Suhteellisuusteorian jälkeen Weyl tarkastelee vielä kvanttimekaniikkaa ja siellä ilmeneviä symmetrioita (s.154-156). Kvanttimekaniikan ryhmäteoreettisia menetelmiä Weyl olikin perusteellisesti tutkinut. Vielä Weyl esittelee yhtälöiden ratkaisujen ja niiden juurien Galois-ryhmien välisiä yhteyksiä (s. 156-164). Tässä yhteydessä hän antaa hyvin havainnollisen esityksen Gaussin tuloksesta, että säännöllisen 17-kulmion voi konstruoida harpilla ja viivoittimella (s. 160-162).

Weylin teos julkaistiin ensimmäisen kerran vuonna 1946. Siitä on jo kulunut yli puoli vuosisataa, ja tämä aika on huomattavasti muuttanut matematiikan sekä sisältöjä että 'tyyliä'. Niinpä kirja valaisee paitsi matematiikkaa myös matematiikan historiaa. Weyl ei ole sellaisella tavalla 'formalisti' kuin useimmat nykyiset (ehkä mm. Bourbakilta suoraan tai välillisesti vaikutuksia saaneet) matemaatikot ovat. Hän ei useinkaan aloita kunkin aiheen käsittelyä määritelmillä ja oletuksilla, vaan tällaiset seuraavat usein vasta myöhemmin, kun aihetta on jo käsitelty. Tämän johdosta lukija saattaa usein törmätä uuteen käsitteeseen, josta annetaan selvitys vasta myöhemmin.

Weyl on pikemminkin 'klassillinen' matemaatikko kuin moderni 'struktuurimatemaatikko'. Tämä käy esimerkiksi ilmi siitä, miten hän määrittelee "algebrikon" oman aikamme matemaatikosta jo vieraalta tuntuvalla tavalla (s. 156):

"Algebrikko on ihminen, joka käsittelee lukuja, mutta saa käyttää vain neljää operaatiolajia +, - , ×, ÷. Näillä neljällä operaatiolla nollasta ja ykkösestä saadut luvut ovat rationaalilukuja. ... Niinpä algebrikolla ei ole syytä astua rationaalilukujen kunnan F ulkopuolelle, elleivät geometrian ja fysiikan vaatimukset pakota matemaatikkoa tarttumaan jatkuvuuden hankalaan analyysiin ja upottamaan rationaaliluvut reaalilukujen jatkumoon. ..."

Modernia matematiikkaa Weyl luonnehtii ryhmä-käsitteen merkitystä korostaen hieman Kleinin Erlangenin ohjelmaa muistuttavalla tavalla (s. 165):

"Saamme koko esityksestä seuraavanlaisen opin, josta on tullut koko modernia matematiikkaa ohjaava peeriaate: Kun käsitellään kohdetta S, jolla on rakenne, on yritettävä määrittää sen automorfismien ryhmä eli se alkioita koskevien muunnosten ryhmä, joka ei muuta rakenteeseen liittyviä relaatioita."

Tarkastelipa Weylin kirjaa oman aikamme matematiikan tai matematiikan historian perspektiivistä, joka tapauksessa se antaa oivallisen kuvan matemaatikon tavasta katsoa sekä omaa tiedettään että luontoa. Kimmo Pietiläinen ansaitsee suuren kiitoksen siitä, että on liittänyt suomennoksensa kustantamiensa kirjojen komeaan ja Suomen matemaattis-luonnontieteellistä kulttuuria avartavaan valikoimaan.

Kirjoittaja on Teknillisen korkeakoulun matematiikan emeritusprofessori.