Matematiikan ja sen opetuksen asema kulttuurissamme

Raimo Lehti

On jossain määrin outoa, että samalla kun matematiikan välinearvo on kasvanut, näyttää myös kasvaneen heidän lukumääränsä, jotka tuntuvat olevan sokeita matematiikan kulttuuriarvojen suhteen. Olen kummastunut lukiessani mielipiteitä, joiden mukaan esimerkiksi kouluissa matematiikan merkitys rajoittuisi tiettyyn "ahtaaseen" tieteellis-tekniseen elämänpiiriin, jonka vastakohdaksi olisi nostettava laajemmin inhimillinen kulttuuri.

Kulttuuri on monimielinen sana, jonka voi tulkita *diakroonisesti* tai *synkroonisesti*. Näillä oppisanoilla tarkoitetaan seuraavaa: Diakroonisessa mielessä kulttuuri on pitkä ajallinen prosessi, jolloin meidän puheessamme *kulttuurimme* tarkoittaa ensisijaisesti länsimaista eli "latinalaisen Euroopan" kulttuuria. Synkroonisessa mielessä "kulttuurimme" on eräs meidän tämänhetkisen elämäntilanteemme komponentti, jolle eri henkilöt antavat eri sisällön. Jos käsitämme kulttuurin diakroonisesti ja tutkimme maailmanhistoriaa viimeisten muutaman vuosisadan ajalta, huomaamme matematiikalla olleen ratkaisevan merkityksen. Jos sen sijaan käsitämme kulttuurin synkroonisesti, voi monesta "kulttuurikeskustelusta" tehdä sellaisenkin päätelmän, että matematiikalla ei ole lainkaan merkitystä kulttuurillemme. Kiinnostava kysymys on, mikä on voinut saada aikaan tällaisen jossain määrin jakomieliseltä tuntuvan tilanteen. Antaaksemme asialle taustaa kerromme, mitkä matematiikan komponentit ovat vuosisatojen mittaan kulttuuriimme vaikuttaneet, ja millaisena niiden vaikutus on nähty.

Länsimaista kulttuuria luonnehtivat tiede ja tekniikka; ne määräävät myös matematiikan merkityksen. Tieteellis-teknisen kulttuurin syntyyn vaikuttivat maailmaa radikaalilla tavalla muuttaneet tapahtumat. Tällaisia ovat "tieteiden vallankumous" 1600-luvulla ja "tekniikan vallankumous"1700-luvulla. Euroopassa syntynyt tieteellis-tekninen kulttuuri levisi 1800-luvulla ja omalla vuosisadallamme kaikkialle; tänä päivänä se ei enää ole "eurooppalaista" vaan yleismaailmallista. Matematiikan oma sisäinen kasvu ja sen sisältämät tiedolliset ja esteettiset arvot lienevät vaikuttaneet kultuuriimme merkittävimmällä tavalla tieteellis-teknisen kulttuurin synnyn osatekijöinä. Kaikilla korkeakulttuureilla on ollut oma matematiikkansa. Egyptin, Babylonian, Kreikan, Kiinan, Intian ja arabimaiden matematiikat muodostavat historiallisen pohjan, jolta latinalaisen Euroopan matematiikka lähti nousuun. Jokainen näistä matematiikoista on kiinnostava itsenäisen tutkimuksen kohde. Varhaisempien kulttuurien matematiikka on ollut mukana oman aikamme matematiikkaa luomassa sikäli kuin se arviolta 1600-luvun päättyessä oli omaksuttu eurooppalaisen matematiikan osaksi. Ennen 1100-lukua oli tieteiden painopiste noin 500 vuoden ajan arabimaissa ja sitä ennen Välimeren itäosan kreikkalaisalueella; arviolta ajan 1100-1900 se sijaitsi Euroopassa. Merkittävää roolia eurooppalaisen kanta-alueen ulkopuolella sijaitsevat maat alkoivat esittää vasta 1800-luvun jälkipuoliskolla (*Lehti* 1996 s. 107-108).

Pythagoralaiset ja matematiikka oppiaineena

Aloitamme Pythagoraasta (n. 560-480 e. Kr.), vaikka voisimme aloittaa myös aikaisemmalta ajalta Kaksoisvirtainmaasta. Pythagoras opetti monenlaisista asioista, mutta kaikki hänen oppinsa tuntuvat sisältävän näkemyksen, että lukusuhteet antavat olioille tiedettävyyttä ja kauneutta. Tällainen ajatus oli myös taustalla pythagoralaisten opissa "liikkuvien tähtien universaalisesta harmoniasta ja yhteensopivuudesta" sekä "sfäärien musiikista". Monet kirjoittajat antavat Pythagoraan ansioksi Egyptistä ja Babyloniasta saatujen erillistietojen yhdistämisen. Matematiikan historian kannalta kiinnostavaa on, että oppialan matematiikka nimi esiintyy ensimmäisen kerran Pythagoraan opetustoimen yhteydessä. Tästä kertoo Jamblikhos (*Guthrie* 1987 s. 76-77):

"Pythagoralaisten parissa esiintyi kahta filosofian lajia, joita harrasti kaksi luokkaa: kuulijat (akousmatikoi) ja oppilaat (mathematikoi). Jälkimmäisiä pitivät yleisesti kaikki pythagoralaisina, mutta oppilaat eivät hyväksyneet kuulijoita [pythagoralaisiksi] ...

Kuulijoiden filosofia koostui luennoista ilman todistuksia tai keskusteluja tai argumentteja. neuvottiin vain tekemään jotain määrätyllä tavalla. Ne piti pitää mielessä jumalallisina totuuksina, joista ei tullut keskustella, ... "

Jotkut kertoivat Pythagoraan itse antaneen todistukset ja perustelut kaikille ohjeilleen, mutta niistä jätettiin todistukset pois, koska niitä opetettiin niin suurelle joukolle, ja monet olivat hidasälyisiä. Aikaa myöten jako "kuulijoihin" ja "oppilaisiin" sai toisen vivahteen. Nimi *mathematikoi* annettiin sellaisille, jotka erityisesti harrastivat geometriaa ja astronomiaa. Tämä merkitsi *matemaattisen oppisisällön ja kriittisen ajattelun* liittämistä toisiinsa. "Oppilas" eli "matemaatikko" ei vain hiljaisena kuunnellut opettajan oppeja, vaan teki kysymyksiä ja esitti mielipiteitä. Näin Pythagoras liitti jo Egyptissä ja Babyloniassa tunnettuihin matemaattisiin oppisisältöihin uuden metodisen näkemyksen, jota sitten ruvettiin kutsumaan *filosofiaksi*. Oppisisältö muodostui neljästä alasta, joiden kombinaatiota kutsuttiin myöhemmin *kvadriviumiksi*. Pythagoralaisen Arkhytaan luotettavana pidetty fragmentti kertoo (*Guthrie* 1987 s. 195):

"He ovat jättäneet meille varmoja ja evidenttejä teorioita aritmetiikasta, geometriasta ja pallon teoriasta [= astronomiasta], ja myös musiikista, sillä kaikki nämä tieteet näyttävät olevan sukulaisia."

Pythagoraasta alkaen on ollut vaikuttamassa ajatus, että kyselevän, epäilevän ja päättelevän asennoitumisen opettaminen liittyy erityisesti matematiikan opettamiseen. Esimerkiksi amerikkalainen pedagogi J. G. Fitch kirjoitti vuonna 1906 (Moritz 1958 s. 267-268):

" [Matematiikka] tarjoaa harjaannusta päättelemisen ja erityisesti deduktiivisen päättelemisen taidossa. Se vaatii keskittynyttä ja jatkuvana etenevää ajattelua. Se paljastaa, mitä erehdys on, eikä se mukaudu hyväksymään epävarmoja arvailuja. Kouluopetuksen oppiaineista se on ainoa, jossa epäilevällä ja kyselevällä mielellä on vallan oikeutetusti elintilansa; siellä ei auktoriteetti paina mitään. ... Aritmetiikan enemmän kuin koulun minkään muun oppiaineen avulla voi tehokkaasti opettaa ajattelemisen taitoa - päättelemistä syistä seurauksiin tiukasti ja loogisesti."

Olisimme varmaankin iloisia, jos samalle kyselevän ajattelun suhtautumistavalle myönnettäisiin sijaa laajemminkin. Ehkäpä sitä ei nykyisessä kulttuurissamme ole tarpeen liittää noin ehdottomasti juuri aritmetiikkaan. Kulttuurissamme ajallisena prosessina näin kuitenkin on tapahtunut. Fitchin ajatukset kuvaavat sitä, miten pythagoralainen näkemys *mathematikoi*-oppilaista paitsi kuuntelijoina myös kyselijöinä ja epäilijöinä on vaikuttanut meidän päiviimme asti.

Platon; matematiikan oikea olemus ja rooli

Ateenalainen filosofi Platon esitti oman muunnelmansa matematiikan merkityksestä. Mainitsemme tässä vain hänen ajatuksistaan matematiikan oikeasta olemuksesta ja matematiikasta kasvatuksen komponenttina. Aristokraattinen Platon suosi hierarkista yhteiskuntaa ja hän huolestui kysymyksestä, kenen tulisi valtiossa hallita, ja miten hallitsijat tulisi kasvattaa toimeensa kykeneviksi. Asiaa pohdittuaan Platon päättelee, että filosofien tulisi hallita; ei ehkä odottamaton johtopäätös filosofin tekemäksi. Mitä mieltä tästä lienemmekin, sekin on vaikuttanut matematiikan opetuksen historiaan, sillä Platon pythagoralaisia seuraten katsoi matemaattiset tieteet sopivaksi filosofin koulutusohjelmaksi.

Monin argumentein Platon perustelee, että pythagoralaisten luettelemat neljä matemaattista tiedettä: aritmetiikka, geometria, astronomia ja musiikkioppi ovat yhteiskunnan "vartijoiden koulutukseen sopivia oppiaineita. Niitä on kuitenkin opetettava oikealla tavalla (*Valtio* 514A-541B, *Platon* 1972 s. 309-354). Aritmetiikan on autettava filosofia kohoamaan "syntyvästä [ja muuttuvaisesta] ja tavotettava tosi-olevaista", ja kääntää sielu "olevaisen katselemiseen" (525B-C); sama tehtävä on geometriallakin, jota tulee harrastaa kokonaan tiedon vuoksi (526D-527B); myös tähtitiedettä tulee käsitellä "olennaisuuden kannalta ja siten tehdä sielussamme asuva luontainen ajatuskyky hyödylliseksi,... ". Mitään näistä tieteistä ei saanut harrastaa sen mahdollisen hyötykäytön takia, sillä tällainen olisi kääntänyt sielun filosofi-hallitsijalle sopimattomaan suuntaan. - Jo Pythagoraan *mathematikoi*-oppilaille sallittiin heidän kuulemiensa oppien arvioiminen ja kritisoiminen. Voi tietenkin kysyä, onko täsmällinen ja kriittinen ajattelu arvo sellaisenaan. Rolf Nevanlinna kehotti muistamaan, että "täsmällinen ajattelu muuttuu mielenkiintoiseksi vasta silloin, kun näköpiirissä on jotain merkitsevää, jota kannattaa täsmällisesti ajatella". Tämän sanoi jo Platon pohtiessaan matematiikan merkitystä "hallitsijoiden kasvatukselle" (*Valtio* 518F-519A):

"... Mutta älyllisen ajattelun avu näkyy kerrassaan kuuluvan jollekin jumalaisemmalle, joka ei koskaan menetä voimaansa, vaan tulee hyödylliseksi ja edulliseksi ja päinvastoin hyödyttömäksi ja haitalliseksi sen mukaan, mihin suuntaan se on kääntynyt. Vai etkö ole koskaan huomannut, mitenkä niiden ihmisten sielukurja, joita sanotaan pahoiksi mutta älykkäiksi, on tarkkanäköinen, ja terävästi älyää sen, minkä puoleen se on suuntautuneena? Sillä näet ei ole näkö heikko, vaan sen on pakko palvella pahuutta, ja niin se saa aikaan sitä enemmän pahaa, kuta terävänäköisempi se on.... "

Platonin ajatukset matematiikasta hallintovirkamiehelle ja sotilaalle sopivana ajatuksen harjaannuttajana on vaikuttanut lähempänä omaakin aikaamme. Englannissa oli viime vuosisadalle asti traditiona, että valtiomiehet ja hallinnon virkamiehet olivat saaneet antiikin klassikoihin ja matematiikkaan keskittyvän koulutuksen eivätkä niinkään myöhempään virantoimeensa liittyvää koulutusta. Tätä käytäntöä puolustettiin mm. Platoniin vetoamalla. Näin teki mm. Fitch jo mainitussa teoksessaan vuonna 1906 (*Moritz* 1958 s. 59):

"Kun Platon kirjoitti koulunsa portin ylle: "Älköön tästä käykö kukaan geometriaa osaamaton", niin tällä hän ei tarkoittanut, että hänen oppilaittensa töiden kohteena olisivat viivoja ja pintoja käsittelevät kysymykset. Hän päinvastoin suuntasi heidän huomionsa sosiaalisia, moraalisia ja poliittisia kysymyksiä koskeviin syvimpiin aiheisiin, ... Mitä tekemistä geometrialla on näiden asioiden kanssa? Yksinkertaisesti tämän verran: Jos ihmisen mieli ei ole saanut systemaattisen ajattelun sekä premisseistä tehtävien perustelujen teon tiukkaa harjaannusta, hän ei sovi ottamaan osaa keskusteluun näistä ylevistä aiheista; tähän hän tarvitsee sellaista loogista kurinalaisuutta, jota todennäköisimmin on saatavissa geometriasta, ... Tässä maassa [= Englannissa] olemme jo kauan toimineet tämän saman periaatteen mukaisesti. ... "

Siteerattua lausumaa voisi täydentää monilla muilla samanlaisilla, jotka eivät laisinkaan rajoittuisi vain anglosaksisia maita koskeviksi.

Eukleides ja hänen vaikutuksensa

Antiikin vaikutus matemaattisten tieteiden nousuun ja kehitykseen ei perustunut ensisijaisesti filosofien matematiikasta esittämiin mielipiteisiin, vaan oikeaa "kovaa" matematiikkaa harrastaneiden matemaatikkojen töihin. Eukleides keräsi vuoden 300 e.Kr. vaiheilla suurimman osan silloisesta matemaattisesta tiedosta sittemmin nimellä *Elementa* tunnettuun *Stoikheia* -teokseensa. Teoksella on ollut monia historiallisia vaikutuksia. Se on rakennettu aksioomeiksi ja postulaateiksi kutsuttujen perusolettamusten varaan rakennetuksi loogiseksi järjestelmäksi. Täten se antoi ideaalimallin sille, miten inhimillinen tieto olisi systematisoitava, jotta tulosta voisi kutsua tieteeksi. Olennaiseksi nähtiin tehtyjen perusolettamusten ehdoton oikeellisuus ja varmuus, toisaalta niistä tehtyjen johtopäätösten ketjun johdonmukaisuus.

Toinen historiallinen vaikutus liittyy kysymykseen, mitä "olevaista" teos oikeastaan käsitteli? Mistä asiasta perustaksi otetut aksioomat ja niistä tehdyt päätelmät sanoivat jotain? Pythagoralaisten mukaan matematiikan olettamukset ja tulokset käsittelivät luonnossa itsessään olevia matemaattisia olioita. Platonin mukaan ne käsittelivät joitain havaintomaailman ja kaikkein todellisimman ideoiden maailman välissä olevia entiteettejä. Aristoteleen mukaan ne käsittelivät yhtä luonnonolioiden ominaisuuksista abstrahoitua aspektia, nimittäin kvantiteettia. Tämän näkemyksen seurauksena kutsuttiin Suomessakin aikanaan matematiikkaa "suuretieteeksi". Kaikissa tapauksissa katsottiin matematiikan sanovan joitain "totuuksia" "maailmassa itsessään" olemassaolevasta todellisuudesta. Oppikirjaksi Eukleideen teos ei ole helppo, ja vuosien mittaan siitä onkin esitetty monenlaisia ajatuksia. Sitä pidettiin tieteen paradigmana ja loogisuutensa takia matematiikan opetukseen sopivana perusteoksena. Esim. P. Kelland kirjoitti vuonna 1843 teoksessa *Luentoja demonstratiivisen matematiikan periaatteista*:

"On varmaa, että täydellisyytensä, virheettömyytensä, järjestyneen ja etenevän luonteensa sekä yleisesti parhaan ja täydellisimmän argumentin omaksumisen takia kohoaa Eukleideen Elementit ylivoimaisesti kaikkien inhimillisten aikaansaannosten kärkeen. ... Yli 2000 vuoden ajan se on vallannut ihmiskunnan ihailun, ja tuona ajanjaksona on tuskin mitään ehdotettu sen parantelemiseksi."

Eukleideen teos oli kuitenkin kirjoitettu muita tarkoituksia kuin kouluopetusta varten, ja sen esitystavan sopivuutta kouluihin on myös varsin aiheellisesti epäilty. Ainoina epäilijöinä eivät ole olleet ne onnettomat, joille jo teoksen kolmen ensimmäisen lauseen ulkoa oppiminen (saati ymmärtäminen) tuotti vaikeuksia. Englantilaisen koulun käynyt matematiikko J. Sylvester kirjoitti myöhemmin 1800-luvulla:

"Varhainen Eukleideen opiskeleminen sai minut vihaamaan geometriaa. ... Minä iloitsisin nähdessäni ... Eukleideen kunnioittavasti hyllytettynä tai haudattuna pois koulupojan ulottuvilta 'syvemmälle kuin luotinuora milloinkaan yltää'."

Eukleideesta esitetyt lukuisat mielipiteet ovat nekin merkkejä ja heijastuksia matematiikasta kulttuuritekijänä. Eukleideen teos on nyttemmin kouluissa varsin syvälle haudattu, mutta ikävä kyllä haudattiin samalla myös itse geometria.

Kvadrivium latinalaisessa Euroopassa

Ratkaisevana syynä siihen, että matematiikka kasvoi latinalaisessa Euroopassa laajalti vaikuttavaksi kulttuuritekijäksi, oli matematiikan saama asema opetusinstituutioissa. Pythagoralainen neljän matemaattisen tieteen yhdelmä vaikutti *kvadrivium*-nimisenä oppijaksona pitkälle uudelle ajalle asti. Varhaiskeskiajan Eurooppa sai oppineisuutensa pääasiassa "Roomalaisiksi käsikirjankirjoittajiksi" kutsuttujen kirjoittajien (Macrobius, Martianus Capella ym.) teosten välityksellä. Oppien esittämisen standardimuodoksi vakiintui asiat yhteen keräävä *ensyklopedia*. Niissä esitetty näkemys matematiikasta säilyi puolen vuosituhannen ajan melko muuttumattomana. Valaisemme sitä katkelmalla kauden alkuun sijoittuvasta Sevillan piispan Isidoruksen (kuoli vuonna 636) kirjoittamasta teoksesta *Etymologiæ*, ja kauden loppuun (noin 1120) sijoittuvasta Hugo St. Victoriksen teoksesta *Didascalicon*. Isidorus määrittelee matematiikan (Grant 1974 s. 3-4):

"Matematiikkaa kutsutaan latinankielisellä nimellä doctrinalis scientia (se on: teoreettinen tiede). Se tarkastelee abstraktia kvantiteettia. Abstraktia kvantiteettia, kuten esimerkiksi sen yhtäsuuruutta, erisuuruutta ja vastaavan kaltaista, me nimittäin käsittelemme pelkällä päättelyllä, ja järjen avulla erotamme sen aineellisuudesta tai muusta epäolennaisuudesta. Ja on neljänlaista matematiikkaa, nimittäin aritmetiikka, geometria, musiikki ja astronomia. ... "

"Sinänsä esiintyvä multituudi on aritmetiikan kohteena, kun taas sellainen, joka on suhteessa toiseen multituudiin, on musiikin kohteena. Geometria antaa tietoa liikkumattomasta magnituudista, kun taas astronomian alaan kuuluu tieto liikkuvasta [magnituudista]. Matematiikka on siis jakautunut aritmetiikkaan, musiikkiin, geometriaan ja astronomiaan."

Näiden määritelmien mukainen matematiikka oli pitkälti pelkkää käsitteiden luettelemista ja esimerkiksi geometrian tapauksessa yksinkertaisten kuvioiden nimeämistä. Näin saataisiin selville, millaisina palasina nämä liittyisivät olevaisen suureen rakennelmaan. Mitään näillä käsitteillä operoimista ei oppineisuuteen liittynyt. Pitkälti samanlaisena matematiikka säilyi vielä sydänkeskiaikanakin. Esimerkiksi Domingo Gundisalvo antoi vuoden 1150 vaiheilla teoksessa *De divisione philosophiæ* matematiikalle määritelmän (*Grant* 1974 s. 65):

"Se määritellään näin: Matematiikka on abstrahoiva tiede, joka käsittelee aineellisena olemassaolevia olioita mutta ilman niiden ainetta, esimerkiksi viivaa, pintaa, ympyrää, kolmiota ja muita samanlaisia asioita, joita ei ole olemassa muulla tavalla kuin aineellisina ... Joten toiset määrittelevät sen myös näin: Matematiikka on abstrahoiva tiede, joka käsittelee abstraktia kvantiteettia. Me kutsumme abstraktiksi kvantiteetiksi sellaista, jonka voi järjen avulla erottaa materiasta. ..."

Kuitenkin Gundisalvo laajensi matematiikan käsitteellisen piirin yli kvadriviumin rajojen. Hän luettelee matematiikkaan kuuluviksi "seitsemän vapaata taidetta" lisäämällä kvadriviumiin seuraavat kolme: "aspektien tiede" (= geometrinen optiikka), "painojen tiede" (= statiikka) sekä "laitteiden tiede" (= mekaniikka). Näin alkoi matematiikan laajeneminen käsittämään kaikki opinalat, joilla matematiikkaa tarvittiin ymmärtämisen aikaansaamiseksi. Uudistus merkitsi kvadriviumin lopun alkua. Matematiikan vaikutus latinalaisen Euroopan ja sen kulttuuriperillisten historiaan riippui ratkaisevasti matematiikan opetusinstituutioissa saamasta asemasta. Vaikka se kvadriviumin muodossa eli varsin muumioitunutta elämää, sen sija vakiintui kuitenkin itsestään selväksi. Tämä antoi sille perinteiden kultaaman taustan, kun se renessanssin jälkeen kasvoi myös jotain aikaansaavaksi oppiaineeksi. Kuitenkin matematiikan asema yliopistoissa oli 1400-luvulla vähäinen ja 1500-luvullakin ongelmallinen.

Laskuopin nousu kunniaan

Antiikin ja keskiajan aritmetiikka oli peräisin pythagoralaisilta, eikä se tarkoittanut ensinkään laskuoppia, vaan pikemminkin lukujen symmetria- ja muiden ominaisuuksien pohtimista. Laskutoimituksia varten olivatkin roomalaiset numerot hankalia. Intialais-arabialaiset numerot tulivat latinalaisessa Euroopassa tunnetuiksi 1100-luvulla. Tuolloin kukoistavien Italian kaupunkien kauppiaat tarvitsivat aritmetiikkaa, ja tätä he saivat kauppakumppaneiltaan. Arabimatematiikot olivat kehitelleet aritmetiikkaa ja algebraa 800-luvulta alkaen ehkä jopa babylonialaisilta perimänsä tiedon pohjalta. Heidän laskutekniikkaa suosiva traditionsa poikkesi kreikkalaisen geometrian traditiosta. Pisan Leonardo eli Fibonacci kirjoitti jo n. 1202 arabilähteisiin pohjautuvan laskuopin *Abakuksen kirja*, jossa opetetaan aritmetiikan peruslaskutoimitukset ja sovelletaan näitä kauppiaiden ongelmiin. Käytännön aritmetiikan sääntöjen lisäksi teos sisältää myös runsaasti sekalaisia tehtäviä, joista tunnetuin on kaniinitehtävä: Kaniinipari synnyttää kuukausittain uuden kaniiniparin, joka vuorostaan 2 kuukauden ikäisenä synnyttää jälleen uuden kaniiniparin. Montako kaniinia on vuoden kuluttua, jos yhtään kaniinia ei kuole? Esimerkki on matematiikan historialle tyypillinen käytännön miehen ponkaiseminen käytännön tarpeiden yli fantasian poluille. 'Kaniiniprobleema' antaa esimerkin rekursiivisesta yhtälöstä. Sen ratkaisuksi saatuja Fibonaccin lukuja tarvitaan monessa yhteydessä. Fibonaccista eteenpäin jatkuu kauppiasmatematiikan traditio Euroopassa katkeamattomana. Oppikirjoja kirjoitettiin, mutta usein nämä olivat Fibonaccin teosta alkeellisempia (Lehti 1996 s. 109-110).

1400-luvun loppupuolella kirjapainotaito rupesi edistämään laskuopin kuten muidenkin tietojen ja taitojen leviämistä. Esimerkinomaisesti tarkastelen varhaisinta painettuna julkaistua kauppiasaritmetiikkaa, Trevisossa vuonna 1478 kaikkia laskutaitoon pyrkiviä varten kirjoitettua oppikirjaa (*Swetz* 1989 s. 40-175). Huolimatta suuntautumisestaan käytäntöön kirja alkaa Pythagoraan päiviin asti palautuvalla lukujen kosmisen merkityksen julistuksella (s. 41):

"Kaikki oliot, jotka ovat aikojen alusta saakka olleet olemassa, ovat saaneet alkunsa luvusta. Samoin sellaiset, jotka nykyisin ovat olemassa, ovat [luvun] säännön alaisia, ja sen takia on tämä Practica välttämätön."

Kirjassa opetetaan laskumenetelmiä lukuisten esimerkkien suorittamisen avulla; perusteluja menetelmille ei esitetä. Periaatteena on jo egyptiläisistä papyrusteksteistä löytyvä "tee näin" -menetelmä. Usein ilmoitetaan: "Metodi ja tapa ymmärretään esityksestä", tai "Näistä esimerkeistä kykenemme ymmärtämään menetelmän, miten yksi suure vähennetään toisesta" (s. 62, 67, 195). Jakolasku oli traditionaalisesti vaikea asia; siitä sanottiinkin (s. 213): " ... se vaatii ajattelua, joka ei vaeltele eikä käänny muihin asioihin".

Vaikka kauppiasaritmetiikan oppikirjoissa ei päättelyä eikä siis myöskään sen täsmällisyyden vaatimusta esiinny, nousee kuitenkin laskuopin opetuksessa esiin kriitillisen suhtautumisen esimuoto: laskujen tarkistaminen. Keskiajan yliopistollisessa filosofiassa saattoi ajatusvirheiden yli helposti liukua, sillä päättelyn tulokset olivat joka tapauksessa kontrollin ulottumattomissa. Laskuvirhe sen sijaan on paikannettavissa oleva erehdys, jonka seuraukset saattavat olla turmiollisia. Trevison aritmetiikassakin korostetaan yhä uudelleen laskutoimitusten tarkistamisen välttämättömyyttä, esimerkiksi "yhdeksän kokeen" avulla (Swetz 1989 s. 46-52). Peruslaskutoimitusten selvittämisen jälkeen siirrytään niiden monenlaisiin sovellutuksiin. Päätöslaskua koskeva jakso päättyy sanoihin (s.130):

"Niinpä tämän ja muiden esitettyjen probleemien avulla, joita on yhteensä kolmetoista, ymmärrät riittävästi kaikkien sellaisten tapausten metodin, joita saatat liiketoimissasi kohdata."

Tämä kaikki on ammattisuuntautuneisuuden ylistyslaulua. Kuitenkin tämän suuntauksen profeettojen tulisi huomata myös Trevison aritmetiikasta löytyvä vihjaus: olipa matematiikka miten käytännöllistä hyvänsä, aina sitä on syytä keventää matematiikalle tyypillisellä ajatusleikillä, kuten Fibonacci teki kaniinitehtävällään. Kauppiasmatematiikasta selvittyään kirja esittää vuosisadasta toiseen kulkeneita klassillisia "pähkinöitä" kuten seuraavan (Swetz 1989 s. 160):

"Jänis on 150 askelta edellä sitä ajavaa koiraa. Jänis juoksee 6 askelta ajassa, missä koira juoksee 10. Halutaan tietää, montako askelta koira on juossut, kun se saa jäniksen kiinni."

Käytännön matematiikan traditio

Käytännön matematiikan traditio syntyi ja pysyi yliopistojen ulkopuolella; sen tyyppiesimerkkinä oli italialainen kolmannen asteen yhtälön ratkaisija Niccolo Tartaglia. Englannissa syntyi kaupallisten ja muiden ammattien harjoittajien tarpeisiin 'matemaattisten praktikanttien' traditio. Näihin kuului tunnettuja matematiikan ja tähtitieteen oppikirjojen kirjoittajia, ja tämän ohella 'praktikantit' valmistivat merenkulkijoiden ja muiden käytännön miesten tarvitsemia geometrisia ja tähtitieteellisiä kojeita. Praktikanttien tradition pohjalta nousi varhaisen *Royal Societyn* jäsenten tiedeharrastus sekä tekniikan tarvitseman käytännön matemaattisen tietouden ja täsmällisesti suunniteltujen koneiden konstruoimisen taito. Euroopan tieteellis-teknisen nousun kenties tärkeimpänä perustana on ollut matematiikan peruskoulutus, joka levisi 'vallankumousta' edeltävinä vuosisatoina laajemmalle kuin aikaisemmin. Alkeisgeometria ja laskuoppi ei kenties tunnu kovin 'jännittävältä' kulttuuriarvoa luovalta aiheelta. Myöhempiä tapahtumia ajatellen oli ratkaisevaa, että käyttökelpoista matemaattista perustietoutta opetettiin useammalle ihmiselle kuin milloinkaan aikaisemmin. Tämä on yksi syistä, jotka johtivat kulttuurimme uusille teille (*Lehti* 1996 s. 110-113).

Italiasta alkanut kaupankäynnin matematisoiminen on johtanut lukuisiin asioihin, jotka ovat vaikuttaneet kulttuurimme "diakrooniseen" kulkuun, ja vaikuttavat tänä päivänä "synkrooniseen" kulttuuriimme. Tästä kirjoitti Edward Everett vuonna 1870 (Moritz 1958 s.247):

"... Numeroiden taidokas järjestely ja nopea käsittely on todellinen taikurin sauva. Yhdysvaltain mahtava ulkomaan- ja sisämaankauppa kulkee kautta kirjanpidon, josta huolehtii muutama tuhat uutteraa ja uskollista toimihenkilöä. Englannin pankin kahdeksansataa kirjanpitäjää pitää yllä puolen sivistyneen maailman rahatasapainoa. ... Katson hyvin pidettyä pääkirjaa jotensakin samanlaisella mielihyvällä, jolla katselen maalausta tai veistosta. Se on kuin kaunis taideteos."

Ehkäpä kaikki eivät pidä hyvin pidettyä pääkirjaa taideteoksena. Aritmetiikka ja muukin matematiikka on kuitenkin tänä päivänäkin keskeinen kulttuurimme materiaalista perustaa ylläpitävänä tekijänä. Sen seurauksena on muukin kulttuurin kasvu ollut mahdollista. Ei ole sattuma, että kaupankäynnin keskus Firenze oli myös taiteiden keskus. Samoin New York on tunnettu paitsi pörssistään myös taiteen harrastuksestaan. Missä osataan hyvin laskea, siellä osataan ilmeisesti tehdä hyvin myös muita asioita. Yksityiskohdat ja mittakaavat ovat vuoden 1870 jälkeen muuttuneet. Nyt tarvitaan monia tehokkaita tietokoneita siihen, minkä tuolloin teki 800 kirjanpitäjää. Aritmetiikan merkitys kulttuurin tekijänä on tämän ansiosta vain kasvanut.

Matematiikan nykyisen kulttuurimerkityksen keskeinen komponentti on sen käytännön arvo. Tämä on joskus selvästi näkyvää, mutta usein se on myös niin syvälle hautautunutta kaiken ihmistoiminnan alle, että emme huomaakaan sen läsnäoloa kaikkialla. Matematiikkaa tarvitaan ja käytetään kaikilla ajateltavissa olevilla tieteen, tekniikan, tuotekehittelyn, tuotannon, kaupan, sosiaalityön ym. aloilla. Aina kun nämä tieteen, tekniikan, talouden ja yhteiskuntaelämän alueet vaikuttavat kulttuuriimme, on matematiikka taustavaikuttajana mukana. Tietotekniikan ansiosta näemme asian tänä päivänä erinomaisen selvästi, mutta jo aikaisemminkin oli matematiikka välttämätön apuväline, jota ilman pyörät eivät pyörineet. Kun matematiikan kulttuurivaikutus arviolta ennen 1500-lukua jäi alaltaan suppeaksi, vaikutti tähän ennen kaikkea matematiikan käytännön merkityksen suhteellinen vähäisyys.

Antiikin klassikoiden tunnetuksi tuleminen

Eurooppalainen käytännön matematiikka ammensi alunperin pääasiassa arabimatematiikoiden Eurooppaan välittämästä ja itse kehittämästä traditiosta. Kreikkalaisille oli leimaa-antavana toisentyyppinen matematiikka: deduktiivinen ja parhaimmillaan uljaisiin saavutuksiin yltävä geometria. Kreikkalaisten geometrien miltei kaikki säilyneet teokset käännettiin latinankielelle 1100- ja 1200-luvuilla. 1400- ja 1500-lukujen humanismi kääntyi kulttuuriarvoja etsiessään antiikin puoleen. Antiikin kulttuuriperinnön osana humanistit hyväksyivät (ainakin teoriassa) myös matemaattiset tieteet sivistyksen osaksi. Eräs humanistisen suuntauksen myönteinen vaikutus matemaattisten tieteiden kehitykseen oli, että se nosti matemaattiset tieteet ainakin periaatteessa merkittäväksi yliopistoissa opetettavan oppikurssin osaksi silloinkin, kun yliopistojen pääasiallinen opetustehtävä nähtiin pappien, lainlukijoiden ja lääkärien kouluttamisena. Asennetta edusti protestanttiseen yliopistolaitokseen suuresti vaikuttanut Philip Melanchton, jonka matemaattinen asenne muodostui mm. Ruotsi-Suomen yliopistolaitokselle tärkeäksi (*Lehti* 1996 s. 115-117).

Eukleidesta luettiin hieman yliopistoissa, mutta hän oli pikemminkin tiedon systematisoija kuin uusien asioiden keksijä. Keksijöitä olivat sen sijaan kaksi Eukleideen suurta seuraajaa, kartioleikkauksien tutkijana tunnettu Apollonios Pergeläinen ja integraalilaskun esimuotojen kehittelijä Arkhimedes; näiden teosten vaikutus keskiajalla oli kuitenkin vähäinen. Näiden lisäksi vaikutti matematiikan kulttuurimerkitykseen voimakkaasti vuoden 150 j.Kr. vaiheilla kirjoittanut matemaatikko-tähtitieteilijä Klaudios Ptolemaios. Hänen nimellä *Almagest* tunnettu teoksensa on varhaisin säilynyt kirja, jossa todella mutkikkaan ja samalla tärkeän luonnonilmiön selittämiseksi rakennettiin aritmeettisen tarkkuuden ja geometrisen havainnollisuuden yhdistäviä matemaattisia malleja. Matematiikka fysikaaliselle maailmalle malleja ja metodeja antavana tekijänä ei olisi kasvanut kulttuuriin vaikuttavaksi ilmiöksi jos se se ei olisi tällä tavoin kombinoinut havainnollisia ja esteettisiäkin arvoja omaavia geometriaan vetoavia struktuureja. Yleisten rakenteittensa ja päämääriensä osalta Almagest antoi paradigmaattisen mallin siitä, mitä kaikkea ulkomaailman yksityiskohtien matemaattisella analysoinnilla voidaan saavuttaa. Ptolemaios vaikutti alkeellisimpiin asioihin rajoittuvien oppikirjojen välityksellä. Laajemmin antiikin matemaattiset teokset vaikuttivat mm. kirjapainotaidon ansiosta vasta 1400-luvun lopulla (*Lehti* 1996 s. 114).

Matematiikka ja luonnon ymmärtäminen

Tieteiden vallankumouksen tehokkuus perustui suuresti kerättyyn matemaattiseen tietoon ja taitoon. Mittapuullamme arvioiden saattoi tuolloinen matemaattinen sivistys olla vaatimatonta, mutta se oli eräissä Euroopan maissa tukevampaa ja laajemmalle levinnyttä kuin se oli sitä ennen milloinkaan ollut. Laskutaidon nousu ja leviäminen oli yksi 1600-luvulla tapahtuneen tieteiden nousun ehdoista. Vaatimaton Trevison aritmetiikka symbolisoi useita "tieteellisen vallankumouksen" taustoja. Antiikin matemaatikot, Eukleides, Arkhimedes, Ptolemaios ja monet muut antoivat tarvittavan tiedollisen pohjan. Oppien vastaanottaminen ja uuteen kasvuun nostattaminen vaativat perustaitoja, joita ei riittävän laajalti levinneinä Euroopassa aikaisemmin ollut. Vasta käytännön matematiikan kypsyminen teki antiikin suurten tiedemiesten perinnön hedelmälliseksi. Matematiikka vaikutti tieteiden nousuun muullakin tavoin kuin laskutekniikan avaamien uusien mahdollisuuksien kautta. Se keikautti näkemykset "luonnon ymmärrettävyydestä" skolastikkojen lingvistis-käsitteellisestä lähestymistavasta pythagoralaiseen matematisointiin. Matematisoinnin apostolina toimi varsinkin Galileo Galilei, joka teoksessaan *Il Saggiatore* julisti:

"... Filosofia on kirjoitettu tähän suureen kirjaan, maailmankaikkeuteen, joka on pysyvästi avoinna meidän katseellemme. Sitä kirjaa ei kuitenkaan ymmärrä ennenkuin oppii käsittämään kieltä ja lukemaan kirjaimia, joilla se on kirjoitettu. Se on kirjoitettu matematiikan kielellä, ja sen aakkoset ovat kolmioita, ympyröitä ja muita geometrisia kuvioita, joita ilman ihmisen on mahdotonta ymmärtää siitä sanaakaan. Ilman näitä vaellamme vain pimeässä labyrintissa."

Näkemys matematiikasta luonnon kirjan kirjaimistona on 1600-luvun tapahtumien jälkeen vaikuttanut yhä voimakkaammin ajatusmaailmaamme. Se muodostanee tänä päivänäkin matematiikan yleisen kulttuurivaikutuksen otaksuttavasti keskeisimmän komponentin. Tieteiden vallankumous vaikutti käänteentekevästi matematiikan tulevaisuuteen nostamalla matematiikan luontoa koskevan tiedon lähteeksi.

Miten kuitenkaan matematiikka nykyisellään ymmärrettynä voisi olla ulkomaailmaa koskevan reaalitiedon lähde? Aristoteelisen luonnonfilosofian mukaan käsitteli luontoa koskeva tieto luonnonolioiden syitä, olemuksia, kvaliteettia, tarkoitusta sekä niiden vaikutustapoja ja niissä piileviä voimia. Näiden tutkimisessa ei matematiikkaa käytetty, vaan niitä tutki tyystin toisenlaisia spekulaation aseita käyttävä physica -niminen tiede. Jotkut tähtitieteellisistä maailmanjärjestelmistä pohdiskelevat filosofit ja teologit esittivät, että matemaatikot pystyvät sommittelemaan vain planeettaliikettä kuvailevia malleja, mutta eivät voi väittää mallejaan todellisuutta vastaaviksi. Vastaväite esitettiin myöhemmin varsinkin Maan liikkumisen fysikaalista reaalisuutta koskeville väitteille.

Galilein sekä hänen seuraajiensa dynamiikkaa koskevat tutkimukset johtivat matematiikan 'tietoa tuovien' mahdollisuuksien uudelleen arvioimiseen. Tähtimaailman ilmiöitä matemaattisesti analysoimalla päästiin maailman rakenteesta luotettavampaan tietoon kuin sen syistä ja tarkoituksesta spekuloimalla. 1600-luvun kehityksen päätös oli

Isaac Newtonin v. 1687 ilmestynyt *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, joka osoitti, että matematiikan käyttö on oikea tapa luonnossa vaikuttavien voimien ja lakien selvittämiseksi. Matematiikka ainutlaatuisena tiedon hankkimisen menetelmänä antanee 'ideatasolla' sen tärkeimmän merkityksen kulttuurillemme (*Lehti* 1996 s. 118-120).

Johannes Kepler ja teologisoiva matematiikka

Saksalainen tähtitieteilijä Johannes Kepler antaa erään (osittain varsin omalaatuisen) esimerkin tieteen matematisoitumisen joistakin motiiveista. Hänen suhteensa tähtimaailmaan on teologisten näkemysten värittämä. Hän näkee maailman Jumalan tarkoituksellisesti rakentamaksi, ja tähtien tutkimisen varsinainen päämäärä on sen selville saaminen, miksi Jumala on luonut juuri tämänkaltaisen maailman. Jumalan käyttämän luomissuunnitelman selville saaminen on Keplerin mukaan mahdollista sen ansiosta, että Jumala loi ihmisen omaksi kuvakseen, joten ihmisen ajatukset niiden rajoittuneisuuden huomioon ottaen ovat Jumalan ajatusten kaltaisia. Ihmisajattelun varsinainen kohde ja myös ajatuksen metodi on matematiikka. Kepler kirjoittaa (*Lehti* 1996 s. 186):

"Miksi olisikaan välttämätöntä arvioida jumalallisten asioiden hyötyä kuten elintarvikkeiden? Mitä hyötyä on luonnonolioiden tuntemisesta nälkäiselle vatsalle, mitä hyötyä on kaikesta muusta astronomiasta? Harkitsevat ihmiset eivät kuitenkaan kuuntele sellaisia barbaareja, jotka vaativat tuosta syystä näiden tutkimusten hylkäämistä. Hyväksymmehän taidemaalarit, jotka ilahduttavat silmiämme, ja säveltäjät, jotka ilahduttavat korviamme. ..."

Sen takia nimittäin meidän Luojamme liitti aisteihin mielen, että me ihmiset emme vain ylläpitäisi itseämme, minkä monet eläinlajit osaavat paljon etevämmin tehdä raaemmankin mielen avulla, vaan myös, kun silmät varmistavat jonkin olevaksi, me sen perusteella pyrkisimme olioiden olemisen ja syntymisen syiden selvittämiseen, vaikka emme tästä mitään hyötyä saisikaan. Ja ihmisenkin ruumista pitää muiden eläinten tavoin ruoka ja juoma yllä; samoin myös itseään ihmisen henkeä, joka on jotain ihmisestä poikkeavaa, ravitsee, kasvattaa ja tavallaan kypsyttää tämä tiedon ravinto; ja henki on pikemminkin kuolleen kuin elävän kaltainen, jos näiden asioiden tarve ei sitä lainkaan kosketa."

Jotkut ehkä käyttäisivät nykyisin vähemmän teologisia muotoiluja. Tällä mahdollisella muutoksella olisivat varmaankin monet oman aikamme tieteenharjoittajat valmiit allekirjoittamaan Keplerin julistuksen. Toivon, että allekirjoittajien joukkoon olisivat valmiit liittymään myös matematiikan opettajat ja varsinkin yhteiskunnan vaatimuksia korostavat tieteen ja myös matematiikan kouluopetuksen suunnittelijat (*Lehti* 1996 s. 186-187).

Monimutkaisten ilmiöiden palauttaminen hallittaviksi

Galileista lähtien oli muodostunut monin tavoin muunteleva tieteen paradigma, jonka mukaan maailman moninaisuus on palautettava yksinkertaisten ja hallittavissa olevien osakomponenttien toimintaan. Ohjelma vastasi matematiikan mahdollisuuksia. Eräs sen variaatio on, että monimutkaisemmat prosessit katsotaan muodostuneiksi yksinkertaisemmista prosesseista superponoitumalla. Moninaisuuden älyllinen ja tekninen hallitseminen jakamalla se yksinkertaisiin osakomponentteihin on ohjelmana ollut ylivertaisen menestyksellinen. Menetelmän toi fysiikkaan ranskalainen lämpöopin tutkija Joseph Fourier, joka analysoi differentiaaliyhtälöiden monimutkaisempia ratkaisuja yksinkertaisten perusratkaisujen lineaarisiksi yhdistelmiksi. Hän kirjoitti vuonna 1822 teoksessaan *Théorie Analytique de la Chaleur, Discours Préliminaire* mm. seuraavaa (*Fourier* 1955 s. 6):

"Luonnon syvällinen tutkimus on matemaattisten keksintöjen kaikkein hedelmällisin lähde. Koska tämänkaltainen tutkimus tarjoaa määrätyn kohteen tarkasteltavaksi, sen etuna on häilyvien kysymysten ja tarkoituksettomien laskutoimitusten pois sulkeminen; tämän ohella se on varma metodi analyysin itsensä muotoilemiselle sekä niiden elementtien keksimiselle, jotka meidän tulee tuntea, ja jotka luonnontieteen tulee aina säilyttää. Nämä ovat kaikissa luonnonilmiöissä toistuvia fundamentaalisia elementtejä. .. "

Tästä perspektiivistä katsottuna matemaattinen analyysi kattaa saman kuin luonto itse, se määrittelee kaikki havaittavissa olevat relaatiot, mittaa ajat, paikat, voimat, lämpötilat. Se on vaikea tiede, joka muotoutuu hitaasti mutta säilyttää huolellisesti kaikki kerran saavuttamansa prinsiipit. Se kasvaa ja voimistuu taukoamatta kaikkien ihmismielen muuntelujen ja virheiden keskellä.

Sen pääasiallinen attribuutti on selkeys; sillä ei ole välineitä sekavien ideoiden esittämiseksi. Se vertaa toisiinsa mitä erilaisimpia ilmiöitä ja *paljastaa niitä yhdistävät salatut analogiat. Jos materia pakenee otteestamme, kuten ilman ja valon [materia] äärimmäisen ohuutensa takia, jos kappaleet sijaitsevat meistä etäällä valtavassa avaruudessa, jos ihminen haluaa tuntea taivaan aspektit monien vuosisatojen toisistaan erottamina peräkkäisinä ajanjaksoina, jos gravitaatio ja kuumuus vaikuttavat kiinteän Maan sisuksien syvyyksissä, jotka jäävät ikiajoiksi saavuttamattomiin, niin matemaattinen analyysi pystyy silti jäljittämään noiden ilmiöiden lait. Se saa ne läsnäoleviksi ja mitattaviksi, ja se näyttää olevan elämän lyhyyden ja aistien riittämättömyyden täydentämiseksi määrätty ihmismielen kyky. Mikä on vielä merkillisempää, se seuraa samaa polkua kaikkien ilmiöiden tutkimisessa; se selittää ne samaa kieltä käyttäen aivan kuin se todistaisi universumin suunnitelman yhtenäisyydestä ja yksinkertaisuudesta, ja saattaisi yhä ilmiselvemmäksi kaikkia luonnossa vaikuttavia syitä hallitsevan muuttumattoman järjestyksen."*

Fourier vetoaa tosiseikkaan, että suuri määrä klassillisen analyysin keskeisiä käsitteitä ja teorioita on formuloitu klassillisen mekaniikan (erityisesti taivaanmekaniikan) probleemien innoittamana. Hän sanoo jopa enemmän: hän olettaa, että analyysin *fundamentaaliset peruskäsitteet* ovat peräisin 'luonnosta itsestään'. Kuvitelma matemaattisesta analyysista luonnon itsensä perustavien elementtien oikeana kuvana on yksi myöhemmän matemaattisen metafysiikan yksi kulmakivistä. - Fourier katsoo, että matematiikan rakentaminen luonnonilmiöiden itsensä mukaiseksi takaa matematiikan mielekkyyden. Jos matematiikkaa rakennetaan 'häilyvien kysymysten ja tarkoituksettomien laskutoimitusten' mukaisesti, siitä tulee epämielekäs ja mielenkiinnoton rakennelma. Tämä on yksi matematiikan ikuisuuskysymyksistä.

Matematiikan rakentaminen pelkästään oman itsensä ilosta on johtanut mm. rakennelmiin, joita kohtaan tunnettu mielenkiinto ei ole osoittautunut pitkäikäiseksi. Toisaalta tällä tavoin rakennetut 'puhtaan matematiikan' rakennelmat ovat joissain tapauksissa osoittautuneet luonnonilmiöidenkin tutkimisen kannalta yllättävän, jotta emme sanoisi pelottavan, tehokkaiksi. Lämpöopin luomisen innoittamana Fourier päätyy samaan johtopäätökseen kuin oman aikamme alkeishiukkasfyysikot: Universumissa vallitsee *yhtenäinen ja yksinkertainen* suunnitelma, jota hänen tuntemansa matematiikka toteuttaa. Nykyiset fyysikot löytävät yhtenäisen suunnitelman toisenlaisesta matematiikasta ja toisenlaisista voimista.

Matematiikan eriytyminen ja sen sovellutusalueen laajentuminen

1800-luvun puolivälistä eteenpäin matematiikka on eriytynyt omaehtoisemmaksi kehityslakiensa mukaan eteneväksi tieteeksi ja myös solminut kontakteja muihinkin kuin fysikaalisiin tieteisiin. Matematiikka ja tähtitiede eivät 1800-luvun puolivälin jälkeen muodostaneet aikaisemman kaltaista kiinteää kombinaatiota. Matemaatikot rupesivat enenevässä määrässä tutkimaan matematiikan sisäisen kehityksen esille nostamia probleemeja.

Tapahtumia luonnehtivat mm. seuraavat linjat: Yhtälöteoriasta ja neliömuotojen teoriasta (muiden lähtökohtien ohella) alkoi abstraktin algebran kehitys. Tällöin muovautuvat algebran peruskäsitteet, ryhmä, rengas ja kunta suunnilleen nykyisilleen. 1900-luvulla abstrakti algebra ja yleinen topologia ovat yhdistyneet 'struktuurimatematiikan' perustaksi. Kehitystä on vaikea pitää fysiikassa tarvittavien matematiikan aseiden hiomisena, vaan on kyseessä matematiikan kasvattaminen matemaatikkojen omien arvostusten suuntaan. Edelleenkin ovat sovellutusperäiset ideat vaikuttaneet, mutta näiden suhteellinen merkitys on ollut vähäisempi kuin aikaisempina vuosisatoina.

Fysikaalisissa tieteissä rupesi 1800-luvun puolivälissä mekaniikka
menettämään johtoasemansa, ja sen rinnalle nousivat ensin termodynamiikka ja sähköoppi, myöhemmin aineen rakennetta ja alkeishiukkasia tutkivat teoriat. Samalla nousevat biologiset tieteet merkittävään asemaan ja rupesivat tarvitsemaan matemaattisia malleja ja menetelmiä. Myös psykologia, sosiologia ja taloustiede rupeavat tarvitsemaan matemaattisia apuneuvoja; kaikki johti uusien matemaattisten menetelmien rakentamiseen.

1800-luvun alusta alkaen ruvettiin perustamaan insinöörien systemaattiselle tieteelliselle koulutukselle omistettuja oppilaitoksia, joiden merkitystä korosti uusien, voimakkaammin fysikaalisiin teorioihin nojautuvien teollisuudenalojen syntyminen. Tällaisia olivat ensin termodynamiikkaa ja kemiallisten prosessien teoriaa tarvitseva kemian teollisuus ja seuraavaksi elektrodynamiikkaa soveltava sähkötekniikka.

Noin viimeisen sadan vuoden ajan on matematiikassa vaikuttanut kaksi kehitystendenssiä vastakkaisiin suuntiin. 1500-luvulta 1800-luvulle asti kulkivat matematiikassa teoreettisten struktuurien ja numeraalisten algoritmien rakentaminen rinta rinnan; matemaattiset lauseet puettiin laskutoimituksiin sopivien kaavojen asuun. 1800-luvun jälkipuoliskolla ovat abstraktit matemaattisten struktuurien rakennetta ja keskinäisiä relaatioita koskevat lauseet nousseet keskeisiksi, jolloin usein 'vain mekaaniseksi laskutoimitukseksi' luonnehditun kalkyylin merkitys on vähentynyt. Numeraalisia menetelmiä tutkiva matematiikka puristettiin täten ulos "puhtaaksi" nimetystä matematiikasta, jolloin tavallaan palattiin ennen "tieteiden vallankumousta" vallinneeseen tilanteeseen. Suuntaa voi pitää paradoksaalisena, sillä samanaikaisesti matemaattisten algoritmien tarve kasvoi ja käyttömahdollisuudet laajenivat. Algoritmisten laskentaprosessien koneellistaminen on nostanut niiden tutkimisen jälleen keskeisemmälle sijalle. Ilmeistä on, että numeerinen realisoitavuus näyttelee nykyään matematiikassa keskeisempää roolia kuin mitä se muutamia vuosikymmeniä sitten näytteli (*Lehti* 1996 s. 129-133).

Matematiikan metafysiikka

Matemaattisten luonnontieteiden kulttuurimerkitys ilmenee toisaalta luonnon intellektuaalisessa ymmärtämisessä, toisaalta sen saattamisessa ihmisen palvelukseen. Aspektit liittyvät toisiinsa, sillä toiminnan onnistuminen on yksi, ehkä tärkein, asioiden ymmärtämisen kriteeri. Matemaattisten mallien rakentamisella fysikaalisille systeemeille on "kääntöpuoli "kääntöpuoli". Joskus sellaiset on ylen metafyysisessä mielessä oletettu todellisuuden kuviksi.

Eräs asian aspekti on rakennettujen maailmanmallien esteettisten arvojen ottaminen niiden oikeellisuuden kriteeriksi. Pythagoraasta Hilbertiin asti esiintyy näkemys, että ulkomaailmaa koskeva teoria on tosi, kun se on yksinkertainen ja elegantti. Platonin mukaan tieto tosiolevaisista on tietoa ideoista; matemaattiset käsitteet ovat ainakin lähempänä näitä kuin materiaaliset oliot. Maailma on Platonin mukaan luotu sittemmin 'arkkityyppiperiaatteeksi' kutsutun ajatuksen mukaisesti Tässä ilmenee yksi matematisoivan metafysiikan aspekti. Kunakin aikana etsitään fysikaalisen luonnon perusrakenteita sen ajan pisimmälle menevästä matematiikasta. Ilmiö herättää kysymyksen: Missä määrin luonnolle kulloinkin esitetty matemaattinen rakenne on riippuvainen kulloisestakin matematiikasta? Missä määrin kulloinenkin 'huippumatematiikka' on determinoitua, ja onko sen mahdollinen determinismi peräisin matematiikasta itsestään vai luonnosta? Toinen fysiikan matemaattisen metafysiikan aspekti nousee fysiikasta itsestään: Luonnonilmiöiden tutkiminen johtaa matemaattisiin yrityksiin, joista aikaa myöten kehittyy perusteltu matemaattinen teoria; esimerkkinä vaikkapa Diracin ä-funktio.

Matematiikan käyttö fysiikassa on meille nykyään niin itsestään selvää, että emme aina pysähdy hämmästelemään sen onnistumisen ihmettä. On ymmärrettävää, että matematiikka soveltuu johonkin luonnonilmiöön, kun matemaattinen teoria on saanut tuosta luonnonilmiöstä inspiraationsa ja on rakennettu sen hallitsemista varten. 1700-luvulla ja 1800-luvun alussa rakennettiin monia matemaattisia teorioita tällä tavoin tähtitieteestä tulleiden impulssien vaikutuksesta. Asia muuttuu arvoituksellisemmaksi kun tyystin toisten impulssien vaikutuksesta kehitetty matemaattinen teoria osoittautuu uuden fysikaalisen ilmiön yhteydessä sopivaksi kuin räätälin työnä tehdyksi matemaattiseksi puvuksi. Kompleksiluvut tarjoavat yhden varhaisimmista esimerkeistä aivan toisista lähtökohdista kehittyneen matematiikan yllättävästä soveltamisesta fysiikkaan. Kompleksiluvut konstruoitiin algebrallisten probleemien yhtenäistämiseksi; yhtälöiden ratkaisujen lukumäärä ja rakenne sai niitä käyttäen aikaisempaa symmetrisemmän muodon. Tämä johti niiden käyttöön myös analyysissä, jolloin Euler keksi yllättäviä kompleksialueella ilmeneviä yhteyksiä eksponenttifunktioiden ja trigonometristen funktioiden välille. Näkemys valosta aaltoliikkeenä syntyi alunperin kvalitatiivisena teoriana. Teorian läpimurto tapahtui vasta kun Fresnel tulkitsi valon *poikittaiseksi* aaltoliikkeeksi, ja esitti sitä täsmällisessä matemaattisessa asussa, nimittäin sini- ja kosinifunktioita käyttäen. Eulerin tulokset johtivat tällöin mahdollisuuteen esittää tuota aaltoliikettä kompleksisena eksponenttifunktiona. Tätä esitystapaa käyttäen Fresnel tulkitsi kompleksiluvuksi erään alunperin reaaliseksi tulkitun vakion, nimittäin aaltoliikkeen amplitudin, jolloin hän sai johdetuksi faasin muutosta koskevia relaatioita, joita ei aikaisemmin laisinkaan tunnettu.

Tämä herätti monissa hämmennystä ja jopa paheksuntaa. Matemaattiset suureet, joilla oli fysikaalinen merkitys reaalisina suureina, yleistettiin vailla fysikaalista 'perustelua' kompleksisiksi, ja tällöin ne antoivat jälleen oikeita tuloksia. Tämä antaa esimerkin siitä, miten ajan parhaan matematiikan kuvitteleminen fysikaaliseksi realiteetiksi saattaa johtaa menestykseen. Aihetta on Wigner käsitellyt artikkelissa matematiikan järjenvastaisesta tehokkuudesta, ja Einstein on pohtinut maailman käsittämätöntä käsitettävyyttä.

Matematiikan estetiikka

Matematiikka on vaikuttanut tieteellis-teknisen kulttuurimme syntyyn monin tavoin, ja toisaalta luonnontieteen ja tekniikan probleemit ovat vaikuttaneet matematiikan teorianmuodostukseen. Tämänkö mukaan tulee arvioida matematiikan merkitystä kulttuurimme komponenttina? Eikö matematiikkaa pitäisi arvioida kulttuurimme omaehtoisena luomuksena? Pidetäänhän matematiikkaa usein yhtenä ihmisten suurista intellektuaalisista ja esteettisistä aikaansaannoksista. Matematiikan 'itseisarvoista' merkitystä arvioitaessa nousevat esille sen ominaisuudet, joita voi kuvailla esteettisin termein: onhan matematiikan kauneus ollut luovia matemaatikkoja innostavana ja tutkimuksen suuntaukseenkin vaikuttavana tekijänä. Esteettisiä arvoja luonnehditaan vaikkapa täten: Kaavojen sekä lauseiden johtojen tulee olla symmetrisiä ja yksinkertaisia, joten turhia askeleita ja olettamuksia tulee välttää. Matematiikan osa-alueiden välille täytyy löytyä yhteisiä rakenteen piirteitä, teemoja sekä analogioita. Saman kaltaisia metodiin liittyviä ehtoja asetetaan monelle muullekin inhimilliselle toiminnalle, varsinkin tieteille. Esteettiset arviointiperusteet liittyvät matematiikan kuten muunkin tiedon tehokkuuteen; ne ovat ehtoja tiedon kasvulle ja käyttöarvolle aseena. Matematiikan kauneus 'toimivaa kauneutta' (*Lehti* 1996 s. 134-135).

Jos haluaa ymmärtää matematiikan merkitystä kulttuurillemme, tulee yrittää päästä myös sisään sen 'taiteelliseen' maailmaan. Tämä on ikävä kyllä usein mahdollista vain yksinkertaisten esimerkkien tapauksessa; komplisoidumman matematiikan kauneusarvot avautuvat vain ekspertille. Niinpä matematiikan esteettinen kokeminen, 'matematiikka taiteena', tuskin on kulttuurimme kokonaisuuteen voimakkaimmin vaikuttanut matematiikan komponentti. - Mitä tarkoittaa matemaattisen teorian "kauneus"? Mitkä ovat sen kriteerit, ja mikä merkitys niillä on matemaattisia teorioita arvioitaessa? Kiinnostavan näkemyksen esitti vuonna 1867 E. E. Kummer (Moritz 1958 s. 185):

"Matematiikan maailmaa hallitsee erikoislaatuinen kauneus, joka ei niinkään muistuta taiteen vaan pikemminkin luonnon kauneutta. Se vaikuttaa sen arvostamiseen pystyvään pohdiskelevaan mieleen hyvin samalla tavalla kuin luonnon kauneus."

Samaa kysymystä harkitsi matemaatikko Hermann Weyl pohdiskellessaan symmetristä kuvapatsasta (*Weyl* 1999 s. 17):

"... Keksikö taiteilija symmetrian, jonka luonto on antanut olennoilleen lakiensa mukaan? Kopioiko ja hioiko hän sen, minkä luonto antaa vain epätäydellisessä muodossa? Vai onko symmetrian esteettisellä arvolla riippumaton lähde? Minulla on taipumus ajatella Platonin tapaan, että matemaattinen käsite on molempien syntyprosessin yhteinen lähde: luontoa hallitsevat matemaattiset lait synnyttävät luonnon symmetrian ja käsitteen vaistomainen hahmottuminen luovan taiteilijan ajatuksissa synnyttää symmetrian taiteeseen. ..."

Weylillä on mielessään myös analoginen tieteenfilosofian probleemi. Missä määrin matemaattiseen asuun puetut teoriat koskevat jotain 'luonnossa itsessään' olevaa? Törmäämme kysymykseen: Onko matematiikka kaunista siksi, että matematiikkaa luova ihminen tietoisesti seuraa normeja, jotka ovat esteettisten normien kaltaisia, vai onko se kaunista, koska objektiivisessa matematiikan maailmassa on yllättäviä ominaisuuksia, jotka vaikuttavat ihmiseen samalla tavalla kuin jotkut luonnon näkymät?

Tietokoneet ovat tuoneet mahdollisuuksia komplisoitujen matemaattisten struktuurien käsittelemiseksi ja visualisoimiseksi, ja samalla ne ovat tuoneet uusia aspekteja kysymykseen matematiikan kauneudesta. Tietokonegrafiikka on tuonut jokaisen silmin nähtäväksi sellaisenaan yksinkertaisten matemaattisten probleemien ratkaisuissa ilmenevän hierarkisen struktuurin. Niiden estetiikka ei ole symmetriaa ja säännöllisyyttä korostavaa jo pythagoralaisilla esiintynyttä estetiikkaa, vaan "monimutkaisuuden estetiikkaa", johon on tilaisuus tutustua kuvitetuista fraktaalien geometriaa käsittelevistä teoksista.

Matematiikka ja maailmankuva

Matematiikka jo sellaisenaan saattaa muodostaa maailmankuvaan vaikuttavan tekijän, esimerkiksi kun sitä on ajateltu luonnon itsensä aakkosiksi. Matematiikka on tarjonnut mahdollisuuden luonnonilmiöiden moninaisuuden redusoimiseksi yksinkertaisten komponenttien sijaintien ja liikkeiden aikaansaannoksiksi. Jälleen on tietokoneiden nousu avannut uusia perspektiivejä, jolloin aikaisemmin pelkkinä spekulaatioina esitetyt mahdollisuudet ovat tulleet realisoituviksi. Olemme joutuneet arvioimaan uudelleen, mitä saattaa syntyä yksinkertaisten elementtien 'pelkästä kombinatoriikasta', kun kombinaatioiden lukumäärä kasvaa suureksi. Milloin kombinaatiot 'luovat uutta' ja milloin ne vain 'toistavat ulkoapäin annettua' ei ole enää niin selväpiirteisesti erotettavissa kuin aikaisemmin oletettiin.

Edelliseen liittyen: Matematiikka rakentaa nykyisin malleja muillekin kuin tavanomaisesti fysikaalisiksi kutsutuille järjestelmille, nimittäin biologisille tai yhteiskunnallisille järjestelmille ja ihmisajattelullekin. Näin on matematiikan maailmankuvallinen vaikutus laajentunut alueelle, jota on kauan pidetty matemaattis-fysikaalisen lähestymistavan ulottumattomissa olevana. Näkemys ihmisajattelusta periaatteessa koneen suoritettavissa olevien rekursiivisten operaatioiden kombinaationa sai uutta väriä elektronisten laskukoneiden kehityksen myötä. Alan pioneeri Alan Turing puolusti miltei uhmakkaasti ärtymystä herättänyttä teesiä, että koneellisen "ajattelun" ja ihmisajattelun välillä ei ole mitään olennaista eroa. Tietotekniikan nousun myötä tämä ajatuskuvio on avannut matematiikalle uusia vaikutusteitä kulttuuriamme muovaavana komponenttina.

Matematiikka tämän päivän kulttuurissa

Kulttuuriimme matematiikka on vaikuttanut ulkomaailman ilmiöiden älyllisen lähestymisen metodina, selitysten löytäjänä, kätkettyjen relaatioiden paljastajana, käsitteellisten aseiden takojana, sekä ulkomaailman hallitsemisen ja hyödyntämisen teknisenä apuvälineenä. Nämä matematiikan käyttötavat ovat yhteydessä toisiinsa, sillä ilmiöiden hallitseminen ja käyttö on yksi ilmiöitä koskevan tiedon komponentti ja kriteeri. Keskeiseksi nousee matematiikan onnistumisen ihme; miten on ulkoisten vaikutusten ja ihmisajattelun kombinaatio saattanut lisätä inhimillistä tietoa siten kuin on tapahtunut? Matematiikan historioitsijat, filosofit ja sosiologit ovat yrittäneet antaa tälle kysymykselle vastauksia, joita tuskin voi pitää vakuuttavina. Matematiikassa historiallisena ilmiönä tuntuu olevan mukana ennakoitavissa olevaa etenemistä pilkkaava yllätysmomentti, kuten myös jokaisessa hyvässä matemaattisessa todistuksessa. (*Lehti* 1996 s. 135-136).

Käytin tämän esityksen alussa sanan 'kulttuuri' merkitystä valaistessani kahta oppisanaa: *diakroonisena* ilmiönä tarkastelemme kulttuuria halki vuosituhansien kulkevana tapahtumasarjana; kulttuuri synkroonisena ilmiönä on tämän tapahtumasarjan ajallinen viipale, jonka näemme ympärillämme. Matemaattisten tieteiden merkitys diakrooniselle kulttuurillemme on varsin näkyvää. 1500 - 1600- ja 1700 -luvuilla lukuisat kulttuurin edustajat kirjoittivat esimerkiksi tähtitieteestä milloin markiisittarille, milloin prinsessoille, milloin muille daameille osoitettuja esityksiä. Kyllä tuollaisia kirjoja kirjoitetaan edelleenkin, mutta tiedotusvälineiden yleisesti kulttuuriksi luokittelemän informaation seuraaminen saa kuitenkin lukijan vakuuttuneeksi, että kulttuuri-ihmisen rooli ei ole enää saavutettavissa tällä aikaisemmin kunnianarvoiseksi katsotulla tavalla, vaan aivan toisenlaisilla ansioilla.

On jossain määrin outoa, että samalla kun matematiikan välinearvo on kasvanut, näyttää myös kasvaneen heidän lukumääränsä, jotka tuntuvat olevan sokeita matematiikan kulttuuriarvojen suhteen. Olen kummastunut lukiessani mielipiteitä, joiden mukaan esimerkiksi kouluissa matematiikan merkitys rajoittuisi tiettyyn "ahtaaseen" tieteellis-tekniseen elämänpiiriin, jonka vastakohdaksi olisi nostettava laajemmin inhimillinen kulttuuri. Pythagoralaisista ja Platonista alkaen ovat kuitenkin monet kulttuuriimme suuresti vaikuttaneet ajattelijat nähneet matematiikan yhtenä henkistyneimmistä ajatuksen aloista. Vaikka tällaisten auktoriteettien ajatuksia emme sellaisinaan hyväksyisikään, on ne vähintäänkin katsottava yhdeksi merkittäväksi kulttuurimme juureksi. Matematiikka on kieltämättä vaikeaa, eikä mikään sen opettamisen tekniikka voi tätä realiteettia muuksi muuttaa. On kuitenkin murheellista, jos tietoyhteiskunnaksi itseään mainostavassa yhteiskunnassa tämä johtaa matematiikan syrjäytymiseen sellaisenaan hyväksyttyjen kulttuuriarvojen piiristä.

KIRJALLISUUTTA

Fourier, Joseph (1955): The Analytical Theory of Heat. Dover, New York (1878).
Grant, Edward (ed.) (1974): A Source Book in Medieval Science. Harvard University Press, Cambridge Mass.
Guthrie, Kenneth Sylvain (1988): The Pythagorean Sourcebook and Library. Grand Rapids Miss. (1987).
Lehti, Raimo (1996): Tähtiä ja ihmisiä. Ursa, Helsinki.
Moritz, Robert Edouard (1958): On Mathematics. Dover Publications, New York (1914).
Platon (1972): Valtio. Suom. O. E. Tudeer. Helsinki (1933).
Swetz, Frank J. (1989): Capitalism and Arithmetic. La Salle, Ill., (1987).
Weyl, Hermann (1999): Symmetria. Terra Cognita, Helsinki.

Kirjoittaja on Teknillisen korkeakoulun matematiikan emeritusprofessori.