



Alhambran yhteinen perintö

Taneli Kukkonen

Vuotta 2000 juhlietaan monen muun asian ohella "Kansainvälisenä matematiikan vuotena". Aiheen tiimoilta on järjestetty ympäri maailmaa monenlaisia tapahtumia ja tempauksia. Yksi omaleimaisimmista tiedetapahtumista sai alkunsa suomalaisaloitteesta.

Dosentti Osmo Pekonen, Suomen edustaja komiteassa, joka suunnitteli Euroopan Matematiikan Seuran (EMS) vuoden 2000 juhlallisuuksia, ehdotti yhdeksi juhlatapahtumaksi erityistä eurooppalais-arabialaista yhteiskonferenssia. Kokouksen aiheena olisi kahden kulttuurin vuorovaikutus matematiikan historiassa, erityisesti keskiajalla ja uuden ajan alussa. Miten siis matemaattiset ja astronomiset innovaatiot siirtyivät muslimeilta kristityille mainittuna ajanjaksona. Tätä liikettä sopisi muistella Espanjassa, erityisesti sen eteläisimmässä osassa Andalusiassa, sillä keskiajan oppineiden kohtaamiset tapahtuivat usein juuri siellä. Koska vuoden 2000 matemaatikkojen suurkokouksen (10.-14. heinäkuuta) isäntänä toimi Barcelona, ehdotettu erikoistapahtuma sopi luontevasti sen yhteyteen.

Konferenssi pidettiin lopulta 3.-7.7. nimellä "Alhambra 2000", kokoontumiskaupunki Granadan loisteliaan arabilinnakkeen mukaan. Konferenssin avausluennon pitäjäksi kiinnitettiin Sir Michael Atiyah, joka on, paitsi eittämättä kuuluisimpia eläviä matemaatikkoja, myös itse määrätynlaisen eurooppalais-arabialaisen yhteistyön tulosta. (Atiyahin isä on libanonilainen, äiti skotti.) Kokous jännittyi näin alusta lähtien kahden huipun välille: modernin matematiikan terävimmän kärjen ja läheisen vuoren laella lepäävän majesteettisen linnan. Alhambra sai toimia koko konferenssin ajan arabien rikkaan aineellisen ja hengenperinnön symbolina. Itäisen Andalusian tarunhoitoisten sulttaanien rakennuttamasta linnasta kiinnostuneiden kannattaa tutustua Johannes Salmisen esseeseen, joka on äskettäin julkaistu uudelleen kokoelmassa *Bagdadin ihme* (WSOY 1997). Maineestaan huolimatta Washington Irvingin sepitelmä *Alhambra* (1835, suomeksi WSOY 1969) taas käy enemmän varoittavasta esimerkistä määrätynlaisen orientalismin sudenkuopista.

Alhambra 2000

Alhambra-konferenssi keräsi kaikkiaan runsaat 200 osallistujaa, joista noin puolet tuli Espanjan yliopistoista, toinen puoli lähinnä eri puolilta Eurooppaa ja Maghrebia (Saharan pohjoispuolista Afrikkaa).



Konferenssin yhteydessä järjestettiin pienoissymposiumit seitsemästä matematiikan erityisalasta: edustettuina olivat laskennallinen matematiikka, differentiaaligeometria, epälineaariset ongelmat, ortogonaalipolynomit, julkisen sektorin matematiikka, algebroiden esitysteoria sekä symmetria. Viime mainittu aihepiiri nautti erityistä suosiota Alhambran kokouksessa, sillä geometrinen symmetria on aina ollut islamilaisen kuvataiteen perusvoimavara. Alhambran linnan arkkitehtuurissa ja koristelussa symmetriaa on hyödynnetty aivan erityisesti. Historiallinen konferenssi ja seitsemän alasympposiumia eivät muutoin juuri limittyneet toisiinsa. Aamupäivisin pidetyissä oppihistoriallisissa esitelmissä istui aina ilahduttavan runsaasti nykymatemaatikkoja.

Arabiedustus odotetussa kulttuurien kohtaamisessa jäi lopulta varsin vähäiseksi. Tämä oli sääli, semminkin, kun kokoukseen muuten saapui edustajia hyvinkin erikoisista maailman kolkista: Chilestä, Brasiliasta, Etelä-Koreasta, Japanista (ja Suomesta). Syitä arabimatemaatikkojen harvalukuisuuteen Alhambassa voi vain arvutella. Yhtäältä panarabialainen aate ei ole tällä hetkellä kovin suuressa huudossa. Kutsu tulla puhumaan vaikkapa *irakilaisesta* matematiikasta tai *persialaisesta* tähtitieteestä olisi saattanut houkuttaa enemmän väkeä.



Arabien perintö

Mitä eurooppalais-arabialaisesta kulttuurivaihdosta kaiken kaikkiaan voidaan nykytutkimuksen valossa sanoa? Alhambra 2000 -kokouksen esitelmät kertoivat vahvasta ja vilkkaasta tieteellisestä vuorovaikutuksesta 700-luvulta aina uuden ajan









alkuun saakka. Nouseva arabialainen mahti oli ensin vastaanottava osapuoli, mutta se sisäisti antiikin teoreettisten tieteiden pääsisällön pian ja siirtyi sitten ennakkoluulottomasti kehittämään omaksumaansa edelleen eteenpäin. Jo *Bayt al-hikmassa*, Baghdadin omassa Tieteiden talossa, joka perustettiin alkujaan lähinnä kreikkalaisten teosten kääntämistä varten, harjoitettiin itsenäistä matemaattista ja tähtitieteellistä tutkimusta. Tarinan mukaanhan kalifi al-Ma'mūn (k. 833) sai ajatuksen "Viisauden talosta" keskusteltuaan asiasta itsensä Aristoteleen kanssa. Tämä tosin tapahtui unessa.





1100-luvun alusta lähtien latinalainen länsi sai nauttia tämän työn hedelmistä. Tiedonvälityksen syväisyys ja prosessin pitkä kesto voivat kyllä edelleenkin yllättää. Yleisesti tiedetään, että algoritmit saivat nimensä *Bayt al-hikmassa* varhain vaikuttaneen al-Kh[awā]rizmīn (k. n. 844) mukaan, ja että sama mies oli vastuussa algebran (ar. *al-jabr*) alkuun saattamisesta. Samoin muistetaan arabialaiset (oikeammin intialaiset) numerot ja paikkajärjestelmä, jotka tavan mukaan myös jäljitetään al-Kh[awā]rizmīin. Edelleen muistetaan arabien ansiot tähtitieteellisten havaintojen kirjaajina ja taulukoiden laatijoina. Pikainenkin silmäys käytössä oleviin tähtikarttoihin riittää vahvistamaan, että olemme paljossa velkaa arabiastronomeille: tarvitsee vain poimia *al*-alkuiset tähtien nimet (ei niin, että arabialaisperäiset nimet siihen loppuisivat).





Toisaalta: moniko tietää, että vielä Kopernikuksen taivaanmekaniikan matemaattinen malli perustui Lähi-idässä 200-300 vuotta aiemmin kehitettyihin laskelmiin, laskelmiin, jotka Kopernikukselle olivat kiintoisia uutuuksia? Tämänkin seikan voi tarkistaa Vatikaanin valtavista käsikirjoituskokoelmista, joihin vasta nyt on alettu kiinnittää huomiota. Monet vanhat oppihistorialliset arvoitukset alkavat ratketa, kunhan se jo sinänsä kauan tunnettu tosiseikka, että Väliineri oli elävän ja vilkkaan vuorovaikutuksen näyttämönä pitkälle ns. uudelle ajalle asti, saa sille kuuluvan painoarvon myös käytännön tutkimustyössä.




Yleensä ajatellaan, että viimeistään renessanssi merkitsi Euroopalle käännettä pois arabitieteistä ja kohti "omia" kreikkalais-roomalaisia juuria. Kuva on tällaisenaan liian yksipuolinen. Renessanssijattelijat olivat valmiita hakemaan tietoa mistä tahansa lupaavista lähteistä, kuten juutalaista kabbalaa ja alkemia - historiantkirjoituksessa yhtä lailla ohitettu suuntaus - kohtaan tunnettu kiinnostus osoittaa. Ylipäätään jatkumo "vanhan" ja "uuden" ajattelun välillä oli kiinteämpi kuin meillä on ollut tapana ajatella, ja sitä mukaa jatkuvuus "keski"- ja "uuden" ajan välillä.






















Jatkuvuutta edesauttoi osaltaan ajatus ikaikaisesta viisaudesta, joka yleisen käsityksen mukaan oli alkujaan peräisin Egyptin ja Babylonian papistolta ja jota kaikki kansat enemmän tai vähemmän tietoisesti sitten veivät eteenpäin. Jonkin verran huvittavaa on se, että tämä käsitys on nykytietämyksen valossa eräässä mielessä oikeellinen. Huomattavaa taas on, miten sama ajatus auttoi keskiajan ja vielä renessanssin ajattelijoita mieltämään länsimaiden henkisen perinnön laajempina kuin vain ahtaasti eurooppalaisena kokonaisuutena. Tämä vaikutti myös siihen, miten eurooppalaiset tiedemiehet suhtautuivat arabikollegoihinsa.




Historiallista kuvaa ovat osaltaan vääristäneet asenteelliset näkemykset koskien arabialaista tiedettä ylipäänsä. Vanhan käsityksen mukaan arabit eivät voineet (lue: osanneet tai halunneet) muuta kuin kuuliaisesti toistaa ja toisintaa kreikkalaisten jälkeensä jättämää tieteen perintöä: heidän keskuudessaan ei, vain vaivoin peitetysti rasistisia sanakäänteitä lainatakseni, esiintynyt "uutta luovaa, aito tieteellistä henkeä". Tradeeraaminenkin kuihtui ja näivettyi kuin kohtalon sanelemana, kunhan sen hedelmät vain ensin saatiin pelastettua kristilliseen länteen 1100- ja 1200-luvuilla. Moinen teleologinen näkemys ei vastaa tunnettuja tosiasioita. Esimerkiksi juuri matematiikasta tiedetään hyvin, että arabit paransivat merkittävästi sekä matematiikan teknistä välineistöä että sen sovellusten kattavuutta. Vaikkapa ptolemaiolaisen astronomian tapauksessa he myös aktiivisesti osallistuivat keskusteluun, jota käytiin kyseisen mallin pätevydestä ja sen periaatteellisista edellytyksistä.




Kaikenlaisen vuorovaikutuksen päälle on vielä laskettava ne arabialaisen matematiikan saavutukset, jotka eivät koskaan tulleetkaan eurooppalaisten tietoon. Tähän liittyen mainittakoon, että Alhambran kokouksen kenties hätkähdyttävän väite kuultiin kuin ohimennen pariisilaisen professori Christian Houzelin suusta. Houzel kartoitti






esitelmässään arabialaisia yrityksiä esittää kolmannen asteen yhtälön yleinen ratkaisu. Hänen mukaansa Sharāf al-Dīn al-Tūsī, 1100-luvun loppupuolella vaikuttanut persialainen matemaatikko, olisi tämän ongelman käsittelyn yhteydessä esittänyt derivaatan periaatteen. On toki eri asia törmätä raskaan sarjaan tieteelliseen läpimurtoon kuin muotoilla se niin, että tyhempikin sen ymmärtää; edelleen on eri asia hoitaa löytöön liittyvä välttämätön jälkityö - tiedon julkistaminen - niin, että jälkipolvetkin tietävät, ketä saamme jostakin ideasta kiittää. Silti voidaan kysyä kuten eräs tanskalainen pariskunta teki Houzelin esitelmän päätyttyä: velvoittaako jo tieteellinen kunniantunto tässä ilmi käyneiden seikkojen valossa kirjoittamaan matematiikan historian oppikirjat uusiksi?


Matematiikka ja maailma




Eräs konferenssin läpi kantanut teema koski matematiikan ja fyysikaalisen todellisuuden välistä suhdetta. Tutkiiko matematiikka joitakin erityisiä abstrakteja objekteja, vai saadaanko sen tutkimuskohde fyysikaalisesta todellisuudesta abstrahoida? Lukija tunnistaa edellisen näkökannan matemaattiseksi platonismiksi; kyseessä on varmaankin eräs länsimaisen tieteen historian kaikkein sitkeimmässä istuvista tieteellisistä ihanteista.



Keskiajalla Platonin kanssa ei kilpaillut Hilbert tai Brouwer, vaan hänen hyvä oppilaansa ja paras kriitikonsa Aristoteles. Aristoteeliset filosofit olivat taipuvaisia tarkastelemaan muutosta ja liikettä kvalitatiivisina suureina - esimerkiksi taivaankappaleiden liikkeitä tahdonalaisina ja tavoitteellisina toimintoina. Matematiikan perusteita koskevissa kysymyksissä aristoteeliset olivat eräänlaiseen logisismiin päin kallellaan. Olioiden käyttäytymisestä päästään perille, kun tunnetaan niiden olemus, minkä usein katsottiin tarkoittavan olion loogisesti välttämättömiä ominaisuuksia. Taivaankappaleiden liikkeitä kuvaavan matematiikan tulee tämän mukaisesti vastata taivaiden luonnetta koskevia apriorisia oletuksia, ei päinvastoin.




Antiikissa ja keskiajalla näkemys ero heijastui muun muassa siihen, minkä sijaan matematiikka sai tieteiden luokittelussa. Kun platonistisessa perinteessä matemaattinen astronomia saattoi toimia astinlautana aistihavainnoista puhtaan kontemplaation suuntaan, aristoteelikkujen luokituksessa matematiikka jäi osaksi tieteellisen toiminnan esivalmisteluja, sen "työkalupakkia" eli *Organonia*. Matematiikassa on kysymys aistittavien olioiden tietyn aspektin - kvantitatiivisen - tarkastelusta, aspektin, joka ei millään muotoa ole erityisen keskeinen.



Filosofisen mielenkiinnon lisäksi aihetta koskevalla keskustelulla oli eräissä tapauksissa merkittäviä heijastusvaikutuksia tieteelliseen käytäntöön. Yksi asiaa valaiseva esimerkki riittääköön. Jälkipolvet tuntevat persialaisen Umar al-Khayyāmin (1048-1131) paremmin tämän runollisista ansioista, erityisesti teoksesta *Ruba'iyāt*. Aikalaisensa silmissä tämä monilajakkuus oli kuitenkin ennen kaikkea matemaatikko ja astronomi. Al-Khayyām kehitti yleisen metodin, jonka avulla korkeamman asteen yhtälöitä voidaan ratkoa. Hän ei kuitenkaan katsonut aiheelliseksi kehittää teoriaansa kolmannen asteen yhtälöitä pidemmälle, sillä - kuten hän sanoi - "tällaisille matemaattisille rakennelmille ei löydy vastinetta todellisuudessa". Korkeamman asteen yhtälöt siis jäivät vuosisadoiksi unholaan siksi, etteivät ne koskeneet käsin kosketeltavia, konkreettisia - korkeintaan kolmiulotteisia - olioita. Asetelmahan on sittemmin kääntynyt toisin päin. Nykyään perusfysiikan tutkijat kehittävät meitä nimen omaan abstraktien laskelmien perusteella postuloimaan fyysikaaliseen todellisuuteen yhä uusia ulottuvuuksia. Lienemmekö menossa 10:ssä vai 11:ssä, vai joko taas on saatu jokunen lisää?


Edistystä vai taantumusta



Mainitun kaltaisilla kysymyksillä saattoi siis olla varsin suuri tieteenfilosofinen merkitys. Aihetta pohtinut kuuluisa tieteen historioitsija Pierre Duhem päätteli arabien linjanvedoista, että nämä olisivat olleet epäsuotuisalla tavalla mielikuvituksensa vankeja. Duhemin mukaan kieli eräänlaisesta hengen kehittymättömyydestä, etteivät muslimit esimerkiksi kysyneet käsittelemään taivaankappaleiden liikkeiden ennustamisessa käytettyjä matemaattisia kaavoja muuten kuin todellisia fyysikaalisia tapahtumia koskevinä kuvauksina.



Duhemin päättelyä voi arvostella monesta näkökulmasta.



Ensinnäkin tulee huomata, että siltä osin, kuin arabit todella toimivat kuvatuun kaltaisten rajoitusten puitteissa, he vain noudattivat kirjaimellisesti ja tarkkanäköisesti Aristoteleen alulle panemaa ohjelmaa. Toiseksi asiasta vallinnut mieltäpiden kirjo oli arabitiedemiesten parissa aivan yhtä laaja kuin latinalaisessa lännessä myöhemmin. Katolista skolastiikkaa korkealle arvostanut Duhem vain sovelsi kahden rinnastettavissa olevan tapauksen arvioinnissa eri kriteerejä. Hänen huomautustensa voi tältä osin katsoa kuvastavan kirjoitusajankohdan (1908) yleistä eurosentrisyyttä sekä kirjoittajan omaa erityistä frankofiliaa, kuten jo Stanley Jaki totesi Duhemin teoksen *Sôzein ta fainomena* englanninkielisen laitoksen esipuheessa.

Alhambra 2000 -konferenssissa Hélène Bellostta esitteli materiaalia, jonka pitäisi lopullisesti kumota Duhemin teesi. Aristoteelisessä tieteiden luokittelussa matematiikka, kuten jo todettiin, putoaa logiikan ja varsinaisen filosofian väliin: arabien kaanonissa se seuraa erilaisia epäpäteviä todistuksia (!) kuvaavaa *Retoriikkaa* ja *Runousoppia*. Matematiikan puolustajan ongelmana on tällöin osoittaa, miten matemaattinen päättely voi saavuttaa demonstratiivisen päättelyn varmuusasteen. Geometriian yhtenäisyydestä puhuttaessa ongelma kärjistyy vaikeudessa määrittellä analyysin ja synteysin suhde. Bellostan mukaan jo Ibn Sinân (909-946) huomautti siitä, että geometrisissa todistuksissa apuna käytetyt lisäkonstruktiot muodostavat tässä suhteessa ongelman logiikan teorian kannalta. Mistä ne ilmaantuvat todistukseen, ja mikä niiden rooli on? Kuinka geometrinen induktio kääntyisi deduktioksi? Kun huomataan, että kysymys on paitsi logiikasta, myös ontologiasta, nähdään, kuinka sofistikoitunutta arabialainen keskustelu oli jo 10. vuosisadalla.

Mitä tulee Duhemin esimerkkiin tähtitieteen ja matematiikan suhteesta, arabien kiistämättä konservatiivinen tulkinta tähtitieteellisten teorioiden fysikaalisesta perustasta johti paradoksaalista kyllä merkittäviin matemaattisiin löytöihin. Kehityksen moottorina toimi aristoteelinen ihanne, jonka mukaan planeettojen kiertoratojen täytyy olla tasaisen ympyrän muotoisia. Tätä ihannetta oli vaikea sovittaa yhteen lineaarisista liikkeistä todistavan havaintoaineiston kanssa.

Ratkaisevaksi osoittautui Nasîr al-Dîn al-Tûsîn (k. 1274) tekemä keksintö. Al-Tûsî huomasi, että ptolemaiolaista tähtitiedettä vaivannut tähtien ratojen näennäinen nouseminen ja laskeminen voitiin esittää kahden ympyräliikkeen tulona. "Tûsî-pareista", kuten niitä kutsutaan, tuli matemaattisen astronomian perustöväline: renessanssin aikana ne otettiin käyttöön myös lännessä.

Matematiikan kehittyminen johti taas periaatteellisempiin kysymyksenasetteluihin. Al-Tûsîn seuraajat huomauttivat, että Tûsîn esittämän yleisen periaatteen avulla mikä tahansa lineaarinen liike voidaan itse asiassa kuvata ympyräliikkeiden summana ja taas päinvastoin. Näin ollen havaintojen kanssa yhteensopivan matemaattisen kuvauksen laatiminen ei enää ollut ongelma: mille tahansa havaituille liikkeille voitiin vaivatta kehittää vaikka useampia kuvauksia (lineaaristen ja ympyrän muotoisten ratojen yhdistelmiä), jotka kaikki antoivat yhtä tarkkoja ennusteita. Kysymykseksi nousi, millä kriteereillä valinta näiden vaihtoehtoisten ennustusapparaattien välillä tuli tehdä. Mikä niistä, jos mikään, edusti fysikaalista todellisuutta? George Saliban innostava yleisöluento aiheesta osoitti, että arabialainen tähtitiede ennakoitiin tuloksiltaan eurooppalaista renessanssia ja että periaatteellisissa kysymyksissä arabit olivat vähintään yhtä tarkkavaistoisia kuin eurooppalaiset kollegansa. Tämä näytti tulevan joillekin kuulijoille yllätyksenä.

Symmetrian salat

Toisille yhtä mullistava uutinen saattoi olla se, että Alhambran linnakkeesta löytyvät sittenkin kaikki 17 euklidisen tason symmetristä rakennetta eli "tapettikuviota", joilla tiettyä geometristä aihelmaa voidaan monistaa ja toistaa loputtomiin. Tähän tulokseen oli päätyneet Rafael Pérez Gómez, joka on pitkään tutkinut Alhambran palatsien koristelussa käytettyä matematiikkaa. Viime vuosisatoina arviot arabien käytössä keskiajalla olleista symmetriakuviosta ovat vaihdelleet 12:sta 17:ään, ja myös Alhambran kuvien määräästä on käyty väliin kiihkeitäkin väittelyitä. Mikäli Pérez Gómez nyt on oikeassa, voi löydöllä olla periaatteellistakin merkitystä. Jokaisen 17 symmetriakuvion löytäminen Alhambraa tukee epäsuorasti teoriaa, jonka mukaan keskiajan arabi- ja juutalaisarkkitehdit eivät olisi ainoastaan hyödyntäneet rakennuksissaan symmetriaa, vaan myös ainakin jossakin määrin olleet jyvällä

ilmiön teoreettisesta perustasta. Alhambran symmetriat muuten mainitaan 1952 Sinikka Kallio-Visapään teoksessa *Santiagon simpukka*.

Pohjoinen ulottuvuus

Alhambra 2000 -konferenssin 16 historiallisesta esitelmästä kaksi oli suomalaista tekoa. Dosentti Osmo Pekonen selosti omassa esityksessään Gerbert Aurillacilaisen (945-1003) elämää ja vaikutushistoriaa. Lukija saattaa tuntea Gerbertin paremmin paavi Sylvester II:nä (vuodesta 999) tai vaihtoehtoisesti ensimmäisenä matemaatikkona Euroopan historiassa, jonka tiedetään käyttäneen arabialaisia numeroita. Kuten Pekonen esitelmässään totesi, Gerbertiä voidaan pitää yhdistyneen Euroopan varhaisena puolestapuhujana ja teoreetikkona. Ihanteidensa edistämiseen Gerbertillä oli paremmat edellytykset kuin kenelläkään matemaatikolla sittemmin. Hän myös hyödynsi käytössään olleita resursseja sumeilematta, nostaen ja laskien hallitsijoita mielensä mukaan.

Oma esitykseni käsitteli erästä matematiikan historian harha-askelta. Cordobalainen filosofi ja lainoppinut Abū al-Walīd Ibn Rushd (1126-1198) oli puhdasoppisena aristoteelikkona sitä mieltä, ettei matematiikalla ole sen suurempaa virkaa astronomian perusteiden kartoituksessa. Ibn Rushd'in mukaan hänen aikansa tähtitiede vastasi kyllä "laskelmia, mutta ei sitä, miten asiat todella ovat": se, mitä silmät ja matemaattiset mallit todistivat, oli siis toissijaista verrattuna siihen, mitä puhdas järki kertoi taivaankansien välttämättömästä rakenteesta. Koska Ibn Rushd opittiin tuntemaan lännessä latinalaisella nimellä Averroës Aristoteleen arvovaltaisena kommentoijana, hänen astronomiaa koskevilla mielipiteillään oli niiden tieteellisiä ansioita suurempi painoarvo. Esitelmässä kartoitettiin kreikkalaisen hengenperinnön tarjoamia tieteenfilosofian malleja ja sitä, miten näitä keskiajalla tulkittiin yhtäältä islamilaisessa maailmassa, toisaalta kristillisessä lännessä (vai pitäisikö sanoa pohjoisessa?).

KIRJALLISUUTTA

Encyclopedia of the History of Arabic Science. Ed. Rashed, Roshdi. Routledge 1996.

History of Islamic Philosophy. Ed. Nasr, Seyyed Hossein & Leaman, Oliver. Routledge 1996.

Islamilainen kulttuuri. Toim. Palva, Heikki & Perho, Irmeli. Otava 1998. Ks. tässä yhteydessä Tapio Markkasen, Johannes Paasonen ja Heidi Ekholmin artikkelit tähtitieteestä, matematiikasta ja islamilaisesta filosofiasta.

Kirjoittaja on teologian maisteri ja filosofian maisteri, joka työskentelee tutkijana Helsingin yliopiston systemaattisen teologian laitoksella. Hän valmistelee väitöskirjaa arabialaisesta modaalimetafysiikasta ja Ibn Rushd'in (1126-1198) laatimasta aristoteelisen kosmologian ja luonnonfilosofian puolustuksesta.