Kiehtova esitys matematiikan suurimmasta ongelmasta

Aatos Lahtinen

John Derbyshire: *Alkulukujen lumoissa*. Suomentanut Juha Pietiläinen. Terra Cognita, 2006, 396+VIII sivua.

Viimeisimmän maailmaa kiertävän ajanvietteen Sudokun ratkaisemiseen riittää vain kokonaislukujen osaaminen. Näin ollen Sudokun harrastajat ovat selvästi kokonaislukujen lumoissa. Mutta miten tullaan alkulukujen lumoihin?

Matematiikka on pitkän historiansa aikana kasvanut valtaviin mittoihin. Sen abstrakti luonne ja kumulatiivinen rakenne estävät lähes täydellisesti matematiikan katedraalin matalienkin tornien huippujen näkymisen maanpinnalla seisoville tavallisille kansalaisille. Poikkeuksen muodostaa kokonaislukujen käsittely eli aritmetiikka, jota voidaan pitää matematiikan helpoimmin lähestyttävänä alueena. Aritmeettiset tai hienommin sanottuna lukuteoreettiset ongelmat voidaan usein esittää kaikille ymmärrettävällä tavalla.

Ongelman esittämisen helppous ei kuitenkaan aina takaa helppoa ratkaisua. Esimerkiksi Pierre Fermat esitti vuonna 1637, että yhtälöllä $x^n + y^n = z^n$ ei ole kokonaislukuratkaisuja, kun n>2. Hän sanoi löytäneensä asialle ”ihmeellisen todistuksen”, muttei esittänyt sitä. Tämä ns. Fermat'n suuri lause on välittömästi ymmärrettävissä. Niinpä ammattimatemaatikkojen lisäksi myös harrastelijat yrittivät löytää sille todistusta, mutta turhaan. Helsingin yliopiston matematiikan laitoksellakin oli ennen kokonainen kokoelma tällaisia matematiikan rakastajien todistusyrityksiä, jotkut jopa Fermat'n tapaan latinaksi. Niistä löytyi fataali virhe yleensä melko nopeasti. Lauseen todisti lopulta vuonna 1994 englantilainen matemaatikko Andrew Wiles vuosien uurastuksen jälkeen. Todistus on toistasataa sivua pitkä ja perustuu niin moninaisesti moderniin matematiikkaan, että jo sen ymmärtäminen on huikea suoritus. Fermat'lla ei ollut mitään mahdollisuuksia konstruoida Wilesin todistusta.

On melko helppoa keksiä aritmeettisia hypoteeseja, jotka näyttävät pätevän kaikille kokeilluille luvuille, mutta joiden todistaminen oikeaksi tai vääräksi on hirvittävän vaikeata. Vääräksi todistamiseen riittää löytää vastaesimerkki eli yhdet luvut, joille hypoteesi ei päde. Koska kokonaislukuja on ääretön määrä, ei edes tietokoneella voida käydä läpi kaikkia mahdollisia vaihtoehtoja. Näin ollen se, ettei vastaesimerkkiä ole löydetty, ei ratkaise hypoteesia suuntaan eikä toiseen. Ainoa ratkaisumahdollisuus on matemaattinen todistus. Fermat'n lause saatiin todistetuksi yli 350 vuoden kuluttua sen esittämisestä, mutta lukuisat muut viattoman näköiset vanhat hypoteesit odottavat edelleen todistajaansa.

Monet näistä hypoteeseista liittyvät alkulukuihin eli positiivisiin kokonaislukuihin, jotka ovat jaollisia vain yhdellä ja itsellään. Alkulukuja ovat 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 jne. Jo Eukleides osoitti, että alkulukuja on ääretön määrä, joten niitäkään koskevia hypoteeseja ei voida todistaa kokeilemalla. Esimerkiksi Christian Goldbach esitti vuonna 1742, että jokainen kahta suurempi kokonaisluku voidaan esittää kahden alkuluvun summana (3=1+2, 4=1+3, 5=2+3 jne). Tätä yksinkertaista väitettä ei ole vieläkään pystytty osoittamaan sen paremmin todeksi kuin epätodeksikaan.

Riemann ja yleistajuisuus?

Tällä perusteella voisi luulla, että *Alkulukujen lumoissa* -niminen yleistajuinen kirja esittelisi sellaisia alkulukuihin liittyviä tuloksia, joita voidaan helposti käsitellä ilman korkeampaa matematiikkaa. Kirjan nimilehdeltä löytyy kuitenkin alaotsikko *Bernhard Riemann ja matematiikan suurin ratkaisematon ongelma.* Tämä saattaa kirjan aivan toiseen valoon. ”Matematiikan suurin ratkaisematon ongelma” ei tunnu asialta, joka sopisi yleistajuiseksi tarkoitettuun kirjaan. Ja kuka on Bernhard Riemann ja miten hän liittyy asiaan?

Kirjan esipuheesta käy ilmi, että Bernhard Riemann oli saksalainen matemaatikko, joka nimitettiin elokuussa 1859 vain 32-vuotiaana Berliinin tiedeakatemian kirjeenvaihtajajäseneksi. Tavan mukaan uusi jäsen esitteli akatemialle tutkimusalaansa sopivalla julkaisulla. Riemannin tutkielman nimi oli ”*Annettua lukua pienempien alkulukujen lukumäärästä*”. Tutkielmassa Riemann kehitti tarkastelunsa apuvälineeksi funktion, jota hän kutsui zeta-funktioksi. Neljännellä sivulla Riemann ohimennen teki tämän funktion nollakohtiin liittyvän huomautuksen sanoen, että hän ei heti keksinyt todistusta asialle, mutta se ei haittaa, koska asia ei ole välttämätön hänen tutkimukselleen.

Tätä todistamatonta huomautusta ruvettiin myöhemmin kutsumaan *Riemannin hypoteesiksi*. Sitä pidetään nykyään yleisesti matematiikan tärkeimpänä ratkaisemattomana ongelmana. Hypoteesin myöhemmin vakiintunut muotoilu on:

Kaikkien zeta-funktion epätriviaalien nollakohtien reaaliosa on puoli

Kuten näkyy, monista muista lukuteoreettisista hypoteeseista poiketen Riemannin hypoteesin sisältö ei aukea maallikolle. Itse asiassa se ei aukea edes kaikille matemaatikoille. Tämä ei kuitenkaan vähennä hypoteesin merkitystä. Hypoteesia ei ole innokkaista yrityksistä huolimatta vieläkään pystytty todistamaan oikeaksi eikä myöskään vääräksi. Todistamisyritykset ovat kuitenkin synnyttäneet lukuisia uusia matemaattisia tuloksia. Lisäksi on olemassa suuri määrä matemaattisia julkaisuja, jotka optimistisesti alkavat: ”Oletetaan, että Riemannin hypoteesi pätee.”

Nykyään asioiden tärkeyttä mitataan usein rahassa. Riemannin hypoteesi pärjää tässäkin. Amerikkalainen Clay Institute on vuonna 2000 luvannut miljoonan dollarin palkinnon sen todistamisesta oikeaksi tai vääräksi. Palkinto on epäilemättä lisännyt kiinnostusta Riemannin hypoteesiin. Ainakin se on lisännyt aiheesta kirjoitettujen yleistajuisten teosten määrää. Pelkästään Yhdysvalloissa ilmestyi vuonna 2003 kolme suurelle yleisölle tarkoitettua kirjaa Riemannin hypoteesista. Yksi näistä on nyt käsiteltävänä oleva John Derbyshiren teos.

Matematiikkaa porras portaalta

John Derbyshire on syntynyt 1945. Matematiikan opiskelun jälkeen hän on työskennellyt pankkiirina ja tietokoneohjelmoitsijana. Sittemmin Derbyshire on siirtynyt vapaaksi kirjailijaksi ja kolumnistiksi. Sanomalehtikirjoituksissaan hän on käsitellyt laajaa kirjoa asioita historiasta politiikkaan ja rotukysymyksiin herättäen monesti voimakkaita sympatioita ja antipatioita.

Derbyshire ilmoittaa esipuheessa päätarkoituksensa olevan Riemannin hypoteesin ja sen tärkeyden selittämisen "älykkäälle ja uteliaalle, mutta matemaattisesti oppimattomalle lukijalle". Myöhemmin hän tarkentaa lähtötasoksi lukion matematiikan suorittamisen edes välttävästi ilman derivaattaa ja integraalia. Tämän lisäksi Derbyshire haluaa antaa kuvan Riemannista ihmisenä ja matemaatikkona 1800-luvun Euroopassa.

Tällainen tavoite yleistajuiselle kirjalle kuulostaa mahdottomalta toteuttaa. Riemannin hypoteesin selittäminen ilman korkeampaa matematiikkaa ei yksinkertaisesti ole mahdollista. Näin ollen kirjailijan on tavoitteeseen päästäkseen pakko aloittaa teos korkeamman matematiikan erikoiskurssilla. Tähän matematiikan kurssiin kirjailija haluaa lisäksi niveltää historiallisen katsauksen alkulukujen tutkimuksesta ja 1800-luvun Euroopasta sekä Riemannin elämäkerran.

Derbyshiren ratkaisu näiden erilaisten teemojen käsittelyyn on kuljettaa niitä lomittain. Kirjan parittomissa luvuissa johdetaan alkulukujen tutkimuksen ja Riemannin hypoteesin selittämiseen tarpeellista matematiikkaa aivan alkeista lähtien. Parillisissa luvuissa taas esitellään historiallista ja elämänkerrallista aineistoa, tärkeimpänä Riemannin elämä.

Kirjailija ilmoittaa pyrkineensä siihen, että nämä kaksi teemaa olisivat olleet itsenäisiä. Tämä oli kuitenkin liian kunnianhimoinen ajatus, matematiikan historiaa ei pysty kuvaamaan puhumatta mitään matematiikasta. Silti jako toimii yllättävän hyvin.

Derbyshire väittää itsetietoisesti, ettei hän usko Riemannin hypoteesia voitavan selittää käyttämällä yhtään alkeellisempaa matematiikkaa kuin hänen käyttämänsä. Esityksensä hyvyydestä varmana hän esittää haasteen lukijalle: "Jos et ymmärrä hypoteesia luettuasi tämän kirjan, et ymmärrä sitä koskaan." Haaste on, varmaankin tarkoituksellisesti, aivan liian kategorinen.

Sen sijaan kirjailijan matematiikan lähtötasoa koskeva väite voi hyvinkin olla totta. Derbyshire lähtee aivan peruskoulutasosta liikkeelle, joten hänen askeliaan on helppo kenen tahansa lähteä seuraamaan. Derbyshire etenee hyvin matematiikan esittelyssään käyttäen asiaa valaisevia esimerkkejä ja määritellen huolellisesti uudet käsitteet. Ongelmaksi voi tulla, että noustessaan vähitellen porras portaalta korkeammalle matematiikan katedraaliin kirjailija ei hidasta etenemistä ilman ohetessa ympärillä. Niinpä hänen tahdissaan etenevä lukija joutuu yhä useammin pysähtelemään henkeä haukkoen tai jopa palaamaan hetkeksi alempaan runsashappisempaan kerrokseen uutta vauhtia ottamaan.

Etenkin loppulukujen ymmärtämistä olisi huomattavasti auttanut hieman täydellisempi käsitteiden esittely. Toisaalta, kun nytkin sivuja on yli 400, on ymmärrettävää, että kirjailija "kustantajan jo hamutessa moottorisahaansa" ei laventanut matemaattisen osuuden loppunousuja, vaikka ne saattavatkin ottaa koville. Lukija joutuu esimerkiksi luvussa 17 ottamaan tukea sellaisista huojuvaisista kiinnekohdista kuten: "Matriisien laskusäännöt esitellään kaikissa kelvollisissa algebran oppikirjoissa, joten minun ei tarvitse käsitellä niitä tässä" tai "Riittäköön sanoa, että ne ovat olemassa" tai " Valitettavasti en voi näyttää" tai "Usko minua. Se on olemassa." Lisäksi tekijä toteaa ohimennen luvussa 8 olettavansa, että lukija tuntee Einsteinin yleisen suhteellisuusteorian idean. Ei ihme, jos lukijaa alkaa nousu huimata. Varsinkin kaiken matematiikan huipentava luku 21 on haastavaa luettavaa, joskin ahkeralle uurastajalle myös palkitsevaa.

Suomalaisen lukijan iloksi kirjassa esitellään myös "kuuluisa Lindelöfin hypoteesi", joka sekin on edelleen avoin kysymys. Derbyshire sanoo sen esittäjän, Helsingin yliopiston matematiikan professorin Ernst Lindelöfin (1870–1946) olevan pohjoismaisen matematiikan suuren sankarin, suomalaisen patriootin, joka osallistui innokkaasti tuoreen valtion elämään. Viimeksi mainittu kuvaisi mielestäni enemmän hänen isäänsä, todellista valtioneuvosta Lorenz Lindelöfiä.

Kokonaisuutena matemaattinen osuus on urhea yritys luoda matalalta perustalta nouseva torni, joka yltää Riemannin hypoteesiin saakka. Siinä Derbyshire onnistuu, jos ei täydellisesti, niin kuitenkin ihailtavan hyvin. Lukijan on tosin täytettävä Derbyshiren ehtojen ”älykäs ja utelias” lisäksi vielä vaatimus ”kärsivällinen”, ennen kuin hän pystyy olemaan varma, että portaat jalkojen alla kestävät astumisen. Lukija saa kiivetessään ylimääräisenä bonuksena näkymiä moneen eri matematiikan haaraan algebrasta analyysiin ja kaaosteoriasta todennäköisyyslaskentaan. Melko ylhäällä kurkistetaan jopa kvanttimekaniikan puolelle.

Riemann – 1800-luvun Einstein?

Parillisissa luvuissa esitellään sitten historiallista ja elämäkerrallista aineistoa. Niistä ensimmäisessä tekijä ”sijoittaa Riemannin omaan aikaansa ja paikkaansa” kuvailemalla Euroopan oloja 1800-luvun alussa. Myöhemmin esitellään huomattavia matemaatikkoja, jotka ovat olleet kiinnostuneista alkuluvuista. Sijansa saavat matemaatikkojen ruhtinas Carl Friedrich Gauss, uskomattoman tuottelias Leonhard Euler, Riemannin hypoteesin maineen sinetöijä David Hilbert ja monet muut.

Pääosassa on kuitenkin Bernhard Riemann (1826–1866), eräs uuden ajan omaperäisimpiä ja nerokkaimpia matemaatikkoja, joka mullisti kaiken, mihin hän tarttui. Lukijalle välittyy koskettava kuva puutteessa elävästä äärimmäisen ujosta nuoresta miehestä, jolle perheenjäsenet olivat ainoita läheisiä. Riemannin terveys oli aina heikko eikä hänen taipumuksensa depressiivisyyteen parantanut tilannetta. Riemann ehti julkaista vain vähän, mutta jokainen hänen julkaisunsa mullisti matematiikkaa ja fysiikkaa. On sanottu, että jos Riemann olisi saanut elää kauemmin, hänestä olisi tullut 1800-luvun Einstein. Itse asiassa Einstein saa kiittää yleisestä suhteellisuusteoriastaan Riemannia, joka loi sen muodostamiseen tarvittavan matemaattisen koneiston. Vaikuttaa epätodennäköiseltä, että kukaan muu ennen Einsteinia vaikuttanut matemaatikko olisi pystynyt samaan työhön.

Riemannilla oli voimakkaasti visuaalinen mielikuvitus. Hän julkaisi matemaattisista näyistään vain pääkohdat, sillä hänellä ei ollut malttia ryhtyä tarkan todistuksen pitkäaikaiseen muotoiluun seuraavan uuden näyn jo hahmottuessa hänen mielessään. Derbyshire vertaa osuvasti Riemannia trapetsitaiteilijaan, joka lennättää itsensä rohkeasti matematiikan avaruuteen varmana siitä, että heilahduksen päässä keskellä taivasta, on jotain, mistä ottaa kiinni. Riemannin käyttämien menetelmien omaperäisyys ja hänen tulostensa laajakantoisuus ovat antaneet matemaatikoille tutkimusaiheita meidän päiviimme asti ja antavat vieläkin.

Kirjan lopussa on 36 sivua tekstiin liittyviä huomautuksia, aakkosellinen hakemisto sekä VIII sivua teoksessa mainittujen matemaatikkojen muotokuvia alkuperätietoineen. Kansikuvan alkuperästä en löytänyt tietoa.

Kulttuuriteko ja sujuva suomennos

Totesin alussa, että Derbyshiren matemaattisen tutkimustyön kansantajuistamisyritys tuntui mahdottomalta toteuttaa. Kirjan luettuani minun on todettava, että hän on kuitenkin päässyt yllättävän lähelle tavoitettaan. Kirja on hyvä, monin paikoin jopa loistava. Sitä lukiessa tulee vakuuttuneeksi, että Derbyshire on paitsi matematiikan hyvä kansantajuistaja myös ensiluokkainen kirjailija.

Kaikesta huolimatta kirjaa ei voi pitää varsinaisena suuren yleisön kirjana. Ei-matemaatikoilla on varmasti vaikeuksia matemaattisen esityksen seuraamisessa. Sitä voi kuitenkin yrittää lukea proosana, sillä teoksessa on lukuisia kiehtovia huomioita ja kuvauksia, jotka vievät lukijan mukanaan, vaikkei hänellä olisikaan kärsivällisyyttä päästä perille kaikesta. Uskoisin, että kirjan esityksen seuraaminen antaa enemmän elämyksiä kuin Sudokujen ratkaiseminen.

Sopiva älykkäiden ja uteliaiden lukijoiden kohderyhmä olisi ainakin Tieteessä tapahtuu -lehden lukijakunta. Voisin suositella kirjaa myös lukiolaisille. He saattaisivat saada siitä kuvaa todellisen matematiikan lumouksesta. Matemaatikot löytäisivät varmasti kirjasta nautittavaa, etenkin sen aikakauden ja matemaatikkojen kuvauksista, mutta myös matemaattisen osuuden helmistä. Saattaapa sieltä löytyä sellaistakin, mitä ei ole ennen tullut ajatelleeksi.

Kustantaja Kimmo Pietiläistä on jälleen syytä kiittää kulttuuriteosta. Matematiikan yleistajuinen esittäminen ei kuulu tavallisesti suomalaisten kustantajien mielenkiinnon kohteisiin saati sitten näin uskalias yritys. Terra Cognita on ihailtava poikkeus. Juha Pietiläisen hyvä suomennos on sujuvaa ja sen matematiikan osuus korrektia. Viimeksi mainitusta lankeaa ansio myös Riemannin hypoteesin suomalaiselle asiantuntijalle, professori Matti Jutilalle, joka on tarkastanut käsikirjoituksen. Toivottavasti kirja tavoittaa ansaitsemansa laajan lukijakunnan.

Kirjoittaja on matematiikan professori emeritus Helsingin yliopistossa.