

Ratkesiko kolmen kappaleen ongelma sata vuotta sitten?

■ Mauri Valtonen

Tänä vuonna tuli kuluneeksi sata vuotta Karl Fritshof Sundmanin julkaisusta *Acta Mathematica* –aikakauslehdessä, jossa osoitettiin, että niin sanottu kolmen kappaleen probleemalla on ratkaisu. Kyseessä oli jo Newtonilta peräisin oleva vanha ongelma, jossa kysyttiin, mitä tapahtuu kun kolme taivaankappaletta vetää toisiaan puoleensa Newtonin vetovoimalain mukaisesti. Ratkaisu etsittiin kuumeisesti parhaiden tiedemiesten voimin. Ongelma oli todettu mahdottomaksi ratkaista, kun aivan yllättäen Karl Sundman Helsingin yliopistosta esitti sille ratkaisun. Tapausta pidettiin niin merkittävänä, että Ranskan Tiedeakatemia myönsi Sundmanille Pontecoulantin palkinnon, erityisesti kaksinkertaiseksi korotettuna, tunnustuksena tästä tieteellisestä läpimurrosta.

Tässä kirjoituksessa en käy tarkemmin läpi Sundmanin menetelmiä, joista voi lukea muualta (esim. Raimo Lehti, *Arkhimedes* 4, 2000). Lyhyesti voidaan todeta, että tehtävänä on esittää matemaattinen kaava, josta voidaan laskea kunkin kappaleen paikka annetulla ajanhetkellä sen jälkeen, kun kappaleet on päästetty liikkeeseen toistensa suhteen. Esimerkkinä voidaan ajatella maapallon, kuun ja auringon muodostamaa kolmen kappaleen problemaa, kun planeettojen aiheuttamat häiriöt liikkeeseen sekä vuorovesivoima ja muut komplikaatiot jätetään huomiotta. Voidaan kysyä, missä kuu ja aurinko ovat maapallon suhteen esimerkiksi kymmenen vuoden päästä, ja voisiko kuu pudota maahan tällä välin. Tällaista törmäystä ei tietenkään ole mitään syytä odottaa, mutta jos meillä ei ole ratkaisua kolmen kappaleen ongelmaan, sitä ei voi myöskään ehdottomasti sulkea pois. Newton kertoi, että tämän ongelman ajattelu tuotti hänelle päänsäryn.

Sundman esitti ratkaisun sarjakehitelmän muodossa. Se vaatii useiden lukujen yhteenlaskua tietyn kaavan mukaisesti, ja kun lukuja on ynnätty tarpeeksi, saadaan tieto kappaleiden paikoista. Sundmanin menetelmän vaikeutena onkin kysymys, mikä on tarpeeksi. Aina kun otetaan uusi sarjan termi mukaan, tulos muuttuu hiukan, eikä se näytä tuottavan tarkkaa tulosta missään äärellisessä laskuajassa. Viktor Brumberg testasi Sundmanin menetelmää kahden kappaleen liikeradan laskuun, missä vastaus on tiedossa: Keplerin ellipsirata. Hän totesi, että ynnäämällä 1 700 termiä saadaan jokseenkin hyvä tulos. Mutta kolmen kappaleen probleemassa täytyisi laskea niin monta termiä, että minkään tietokoneen kapasiteetti ei riitä siihen.

Mikä näin ollen oli Sundmanin ratkaisun merkitys sata vuotta sitten? Silloin, kuten nytkin, pidettiin tärkeänä, että ratkaisun tiedettiin olevan olemassa periaatteellisella tasolla. Ei voitu sanoa, miten kolme kappaletta liikkuvat toisensa suhteen edes kvalitatiivisesti. Sundmanin saavutus oli kieltämättä merkkipaalu matemaatiikan historiassa, mutta tähtitieteessä, kuten edellä mainitussa maapallon, kuun ja auringon ongelman ratkaisussa siitä ei ollut apua. Kuitenkin Helsingin yliopistossa, kuten monessa muussakin yliopistossa, Sundmanilla oli legendaarinen maine.

Kun menin Cambridgen yliopistoon vuonna 1971 jatko-opiskelijaksi, minut ohjattiin suoraan Sverre Aarsethin luo: hän tulisi toimimaan ohjaajanani. Aarseth ilmoitti, että tutkimukseni aihe on kolmen kappaleen ongelma, ja sanoi, että eikö tämä olekin sopivaa, kun tulen Sundmanin yliopistosta. Sitä paitsi samassa Helsingin yliopistossa Paul Kustaanheimo oli muutama vuosi aikaisemmin kehittänyt menetelmän,

millä kolmen kappaleen liikeratoja voitiin todella laskea, ja nähdä minne ne kappaleita johtavat. Hänen käsittääkseen nämä kaksi herraa olivat jopa koko yliopiston kuuluisimmat henkilöt tähtitieteen ja sovelletun matematiikan alalla. Aarseth oli hämmästynyt, kun purnasin aihetta vastaan. Jos kerran kolmen kappaleen ongelma on ratkaistu jo vuonna 1913, kuten jokainen Helsingissä tiesi, niin miksi minun pitäisi yrittää saada siitä vielä jotain irti. Seuraavaan tapaamiseen Aarseth kutsui mukaan William Saslaw'n jolla oli uusi idea kolmen kappaleen probleeman käytöstä astrofysiikassa. Se saikin minut innostumaan aiheesta.

Aarseth oli ryhtynyt ratkaisemaan tietokoneita käyttäen niin sanotun N-kappaleen ongelmaa, missä tutkitaan suuren kappalemäärän (N =kappalemäärä) liikkeitä Newtonin vetovoiman alaisuudessa. Fred Hoyle oli antanut hänelle tämän väitöskirja-aiheen, eikä työ tietenkään valmistunut säädettyssä kolmen vuoden ajassa. Aarseth sai tohtorin tutkintonsa vuonna 1963, ja jatkoi sitten saman ongelman parissa Hoylen laitoksen tutkijana. Tultaessa vuoteen 1970 hänelle oli käynyt selväksi, että N-kappaleen ongelma ei ratkea ennenkuin välituloksena ratkaistaan kolmen kappaleen ongelma. Kun Sundmanin menetelmästä ei ollut tässä apua, hän päätti ottaa kaksi jatko-opiskelijaa sitä ratkaisemaan. Toinen oli Douglas Heggie Skotlannista, ja minun onneni oli päästä toiseksi opiskelijaksi. Aarseth jakoi työn puoliksi, Heggie ratkaisee ns. siron-taongelman (yksi tähti tulee kaukaa ja törmää kaksoistähteen) ja minä katson, mitä tapahtuu kun kaikki kolme kappaletta lähtevät liikkeelle läheltä toisiaan.

Kuten arvata saattaa, nämäkin aiheet olivat liian laajoja loppuun vietäviksi kolmessa vuodessa. Tavallaan voidaan sanoa, että näiden kolmen väitöskirjan tulokset valmistuivat vasta 2000-luvulla. Silloin ilmestyi Cambridge University Pressin julkaisemana kirjasarja, jonka aloitti Aarseth vuonna 2003, sitä seurasi Douglas Heggien ja Piet Hutin teos samana vuonna sekä minun ja Hannu Karttusen kirja *The Three Body Problem* vuonna 2006. Voimme sanoa, että Sundmanin ongelma on ratkaistu myös käytän-

nön tasolla.

Sundmanin vaikutus ulottui selvästi vielä 1970-luvun alkuun, jolloin aloitin tutkimukseni. Koska kappaleiden paikkakoordinaatit oli mahdollista esittää suppeenevan lukusarjan muodossa, joskin äärimmäisen pitkinä sarjoina, yleisesti oletettiin, että kolme kappaletta viihtyvät hyvin toistensa seurassa. Ajateltiin, että niiden liikeradat voivat olla hyvinkin mutkikkaita – siitä oli jo näyttöä numeeristen ratalaskujen muodossa – mutta ne eivät kuitenkaan koskaan pääsisi täysin eroon toisistaan. Tätä mieltä oli myös professori Archie Roy, joka toimi väitöskirjani tarkastajana. Hän kysyi, olinko ratalaskuissani kertaakaan havainnut systeemiä, jossa yksi kappale olisi karannut muilta. Tähän minun täytyi vastata, että tutkittuani 25 000 rataa en ollut löytänyt yhtäkään, missä näin ei olisi käynyt. Osoittautui, että Roy ei ollut ehtinyt lukea väitöskirjaani loppuun.

Kolmen kappaleen liikeradat ovat todella mutkikkaat, jopa siinä määrin, että niiden kuvaamiseen on parempi käyttää statistisen fysiikan keinoja kuin perinteistä liikeratojen piirtelyä. Yksi kappale pakenee aina, mutta sen pakonopeutta ja muita ominaisuuksia on lähes mahdotonta ennustaa. Mutta jos tutkimme vaikka sataa hajoamista, hajoamisnopeuksien jakauma noudattaa tiettyä statistisen fysiikan avulla johdettua kaavaa. Tässä mielessä kolmen kappaleen probleeman ratkaisu muistuttaa esimerkiksi radioaktiivisen atomin ytimen hajoamista. Myös Heggie päätteli, että kolmen kappaleen sironnassa on parasta soveltaa atomifysiikasta tunnettuja siron-takaavoja. Henri Poincare oli jossain määrin ennakoinut näitä tuloksia omissa töissään jo edellisellä vuosisadalla. Mainittakoon, että väiteltäessä Helsingin yliopistossa vuonna 1901 Sundman matkusti johtaviin eurooppalaisiin tutkimuskeskuksiin ja sai vahvoja vaikutteita erityisesti Poincarelta sekä hänen koulukunnaltaan Pariisissa, missä kolmen kappaleen probleema oli yksi keskeisiä tutkimusaiheita. Tässä mielessä Sundman oli myös Poincaren oppilas. Sundmanin väitöskirjan ohjaaja oli Oskar Backlund Pulkovon observatoriasta.

Kuun, maapallon ja auringon muodostama kolmen kappaleen ongelma on taas esimerkiksi hierarkisesta kolmen kappaleen ongelmosta.

Siinä kaksi kappaletta muostaa parin eikä kolmas kappale joudu radallaan koskaan niiden lähelle. Tässä tapauksessa ongelmaa lähestytään häirityn ellipsiradan pohjalta, jota on tutkittu jo 1700-luvulta lähtien. Mainittakoon vaikkapa Euler, Lagrange, Laplace ja suomalainen Lexell alan pioneereina. Tässäkin on tapahtunut edistystä tietokoneiden ansiosta, sillä nyt pystytään entistä paremmin määrittämään hierarkisen systeemin stabiilisuuden ehdot. Voidaan esimerkiksi sanoa, että kuun syöksymisestä maahan ei ole vaaraa ainakaan lähimpien miljardien vuosien aikana. Stabiilisuus on tullut kiinnostavaksi etenkin viime aikoina, kun on keksitty uusia planeettakuntia muiden tähtien ympäriltä. Nämä planeettakunnat voivat hajota, jos stabiilisuusehto ei täyty, kuten ilmeisesti on tapahtunut sille planeettakunnalle, josta on lähtöisin hiljattain keksitty ”irrationaalinen”, ilman emätähteä oleva planeetta.

Missä sitten näkyy Sundmanin vaikutus tämän päivän tähtitieteessä? Aarseth kuului ilman muuta Sundmanin ihailijoihin, vaikka hän ei pystynytään käyttämään suoraan hyväksi Sundmanin sarjakehitelmiä. Hänen menetelmänsä N-kappaleen ongelman ratkaisussa ovat nykyisin laajalti käytössä aurinkokunnan tutkimuksesta aina kosmologiaan asti. Seppo Mikkola, jonka opastin alalle Suomeen palattuani, on toiminut yhteistyössä Aarsethin kanssa jo vuosien ajan. Ratalaskumenetelmiä voisi kutsua (ja usein kutsutaankin) Aarsethin–Mikkolan menetelmiksi. Niiden avulla tutkitaan maailmankaikkeuden suuren mittakaavan syntyä, musta-aukkosysteemien kehitystä ja monia muita tutkimuksen etulinjan aiheita. Turussa muiden muassa Pekka Heinämäki ja Pasi Nurmi ovat Mikkolan ohella erikoistuneet näihin tutkimusaiheisiin.

Sundman olisi varmasti hämmästynyt, jos olisi vielä kanssamme, kuinka laajalle astrofysiikkaan kolmen kappaleen probleeman ratkaisut ovat edenneet. Itse hän ei ollut juurikaan kiinnostunut astrofysiikasta ja epäili muun muassa suhteellisuusteorioiden pätevyyttä. Jaakko Tuominen kertoi myöhemmin ensi kohtaamisestaan Sundmanin kanssa. Tuominen kysyi väitöskirjan aihetta, jolloin Sundman sanoi: ”Älä

vaivaudu, kaikki on jo tutkittu.” Sundmanilla oli varmasti mielessä kolmen kappaleen probleema. Tästä sisuuntuneena Tuominen meni Osloon opiskelemaan Svein Rosselandin johdolla, ja toi muutaman vuoden päästä valmiin väitöskirjan Sundmanille tarkastettavaksi. Rosseland, Niels Bohrin ja Oskar Kleinin entinen oppilas, oli astrofysiikan uranuurtajia, joka sovelsi kvanttimekaniikan uusia metodeja tähtien tutkimukseen. Sundman vei Tuomisen työn tarkastusprosessiin, väitöskirja hyväksyttiin, ja aikaa myöten Tuominen perusti astrofysiikan koulukunnan Helsingin yliopistoon. Sundmanin vaikutus jatkui Helsingin observatoriolla vielä pitkään hänen seuraajansa Gustaf Järnefeltin aikana.

Järnefeltin jäätyä eläkkeelle Helsingin yliopistossa syntyi vilkas keskustelu hänen seuraajastaan ja erityisesti siitä, pitäisikö seuraajan edustaa Sundmanin maineikasta tutkimuslinjaa, vai olisiko syytä siirtyä uudempaan astrofysiikkaan. Sundmanin linjaa lähimpänä katsottiin olevan Kustaanheimon, jonka tasavallan presidentti nimitti (akateemikko Yrjö Väisälän neuvosta) vuonna 1969 tähtitieteen professoriksi moninaisten vaiheiden jälkeen. Osa observatorion nuoremista opettajista oli tyytymättömiä ratkaisuun. He kutsuivat mielenosoituksellisesti muiden laitosten opettajia neuvonpitoon observatoriolle, tilaisuuteen, jota on sittemmin kutsuttu observatorion valtauksiksi. Kokous lähetti vaatimuksia suoraan yliopiston johdolle. Kustaanheimon olisi varmasti ollut helppo yhtyä vaatimuksiin, mutta hän kuitenkin pahoitti mieltä tapahtuneesta siinä määrin, että hän siirtyi Kööpenhaminaan jatkamaan tieteellistä uraansa. Näin 44 vuoden aikaperspektiivillä sen ajan kiista kolmen kappaleen probleeman ja astrofysiikan paremmuudesta tuntuu jossain määrin huvittavalta, kun muistetaan, että jo samoihin aikoihin kolmen kappaleen astrofysiikka nousi keskeiseen asemaan tähtitieteen tutkimuksessa, ja on sitä edelleenkin.

Kirjoittaja on Turun yliopiston tähtitieteen professori.